

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

**Nekaj malega o modeliranju, matrikah in metodi
najmanjših kvadratov**

doc. dr. Marko Orel

DRUGO UČNO GRADIVO

34 strani

Biopsihologija, dodiplomski študijski program

PRVA IZDAJA

Koper, 2015

Kazalo

Predgovor	3
1 Snov	4
1.1 Motivacijski problemi	4
1.1.1 Telesna masa in masa možganov pri sesalcih	4
1.1.2 Upor zraka pri prostem padu	7
1.1.3 Napoved brucovega uspeha na izpitu	8
1.1.4 Napoved brucovega uspeha na izpitu 2	10
1.2 Matrike in vektorji	11
1.2.1 Operacije nad matrikami	11
1.2.2 Nekaj pravil	15
1.2.3 Vektorji	15
1.2.4 Ukazi v programu Maxima	17
1.3 Metoda najmanjših kvadratov	18
1.4 Rešitev motivacijskih primerov	23
1.4.1 Rešitev problema 1 na strani 5	23
1.4.2 Rešitev problema 2 na strani 7	24
1.4.3 Rešitev problema 3 na strani 9	24
1.4.4 Rešitev problema 4 na strani 10	25
2 Vaje	27
2.1 Naloge za utrjevanje	27
2.2 Naloge za preverjanje znanja	28
2.3 Rešitve nalog za utrjevanje	32
2.4 Rešitve nalog za preverjanje znanja	33
Literatura	34

Predgovor

Snov v gradivu je primarno namenjena študentom biopsihologije v okviru predmeta Osnove naravoslovja. Študenti biopsihologije, kot uporabniki statistike, metodo najmanjših kvadratov srečajo pri preučevanju statistične regresije. Razumevanje slednje je precej bolj enostavno, če študent pozna nekaj terminov iz linearne algebre. Znanje le te je potrebno tudi pri bolj sofisticiranih statističnih orodjih, na katere lahko študent naleti v bodočnosti svoje kariere. Namen tega učnega gradiva je tako predstavitev nekaterih osnovnih pojmov iz linearne algebre, osrednjo nit pa predstavlja metoda najmanjših kvadratov. Ker je tekst primarno namenjen nematematikom, je manjši povdarek na strogi matematični eksaktnosti, večji povdarek pa na motivaciji. Tekst je pospremljen z nekaj izdelanimi datotekami za programsko opremo Maxima. Datoteke so trenutno na voljo na spletnem naslovu

<https://sites.google.com/site/markoorel/najmanjsi-kvadrati>,

programaska oprema pa je na voljo na naslovu

<http://maxima.sourceforge.net/>.

Snov

1.1 Motivacijski problemi

1.1.1 Telesna masa in masa možganov pri sesalcih¹

Dani so podatki o povprečni masi W_b (v kilogramih) in povprečni masi možganov W_{br} (v gramih) za 43 vrst sesalcev, pri čemer se podatki nanašajo na odrasle osebkke posamezne vrste (imena sesalcev so zapisana v angleškem jeziku).

VRSTE={African giant rat, Asian elephant, Baboon, Big brown bat, Brazilian tapir, Cat, Chimpanzee, Chinchilla, Cow, E. Amer. mole, European hedgehog, Galago, Goat, Golden hamster, Gray seal, Ground squirrel, Guinea pig, Horse, Short tail shrew, Little brown bat, Man, Mole rat, Mountain beaver, Mouse, Musk shrew, N. Amer. opossum, Nine banded armadillo, Owl monkey, Patas monkey, Phanlanger, Pig, Rabbit, Rat, Red fox, Rhesus monkey, Rock hyrax (h.b.), Rock hyrax (p.h.), Sheep, Tenrec, Tree hyrax, Tree shrew, Vervet, Water opossum}

¹Podatki v tem podrazdelku so pridobljeni iz članka oz. podatkovne baze [1].

$$W_b = \{1, 2547, 10.55, 0.023, 160., 3.3, 52.16, 0.425, 465, 0.075, \\ 0.785, 0.2, 27.66, 0.12, 85, 0.101, 1.04, 521, 0.005, 0.01, \\ 62, 0.122, 1.35, 0.023, 0.048, 1.7, 3.5, 0.48, 10, 1.62, \\ 192, 2.5, 0.28, 4.235, 6.8, 0.75, 3.6, 55.5, 0.9, 2, \\ 0.104, 4.19, 3.5\}$$

$$W_{br} = \{6.6, 4603, 179.5, 0.3, 169, 25.6, 440, 6.4, 423, 1.2, \\ 3.5, 5, 115, 1, 325, 4, 5.5, 655, 0.1, 0.2, \\ 1320, 3, 8.1, 0.4, 0.3, 6.3, 10.8, 15.5, 115, 11.4, \\ 180, 12.1, 1.9, 50.4, 179, 12.3, 21, 175, 2.6, 12.3, \\ 2.5, 58, 3.9\}$$

Odrasli osebek azijskega slona, ki je v seznamu drugi, je tako v povprečju težek 2547 kg, njegovi možgani pa v povprečju tehtajo 4603 g.

Problem 1. Med zgornjimi 43 vrstami ni gorile. Povprečna telesna masa pri gorilah znaša 207 kg. Kako naj ocenimo povprečno maso možganov pri gorili?

Zgornji problem bomo znali rešiti šele ob koncu tega poglavja. Intuitiven način reševanja pa lahko nakažemo že sedaj.

Znano je, da povprečno telesno maso in povprečno maso možganov pri sesalcih grobo opiše enačba

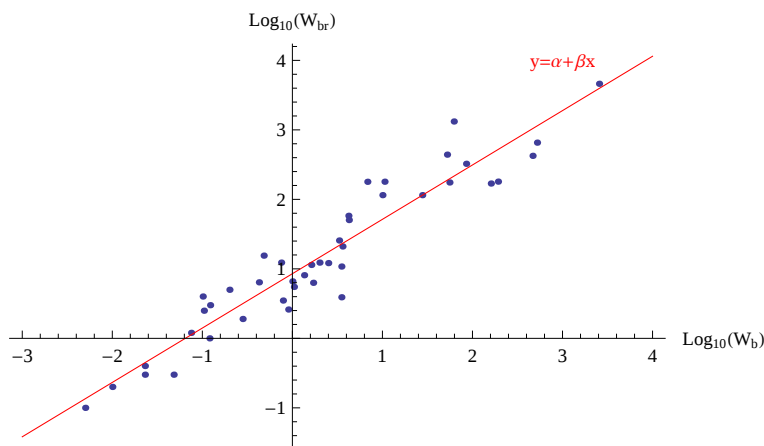
$$\log_{10} W_{br} = \alpha + \beta \log_{10} W_b, \quad (1.1)$$

kjer sta α in β neznani števili. Pri tem smo z $\log_{10}$ označili logaritem z osnovo 10. Števili α in β moramo določiti tako, da bo enačba (1.1) kar najboljše ustrezala danim podatkom za naših 43 vrst sesalcev. Za lažjo predstavo označimo $y = \log_{10} W_{br}$ in $x = \log_{10} W_b$. S temi oznakami so podatki o telesni masi in masi možganov zajeti v 43 točkah v koordinatnem sistemu.

$$\begin{aligned} T_1 &= (x_1, y_1) = (\log_{10} 1, \log_{10} 6.6) = (0., 0.819544), \\ T_2 &= (x_2, y_2) = (3.40603, 3.66304), \\ &\vdots \\ T_{43} &= (x_{43}, y_{43}) = (0.544068, 0.591065), \end{aligned} \quad (1.2)$$

enačba (1.1) pa se spremeni v enačbo premice

$$y = \alpha + \beta x. \quad (1.3)$$



Slika 1.1: Iskana premica, ki se najbolj prilega danim 43 točkam.

Števili α in β moramo torej določiti tako, da se bo premica (1.3) kar najbolj prilegala danim točkam² (glej sliko 1.1). Ko bomo števili α in β poznali, bomo problem 1 rešili s pomočjo enačbe (1.1), v katero bomo vstavili podatek $W_b = 207$ o gorili, tj.

$$\log_{10} W_{br} = \alpha + \beta \cdot \log_{10} 207$$

oz.

$$W_{br} = 10^{\log_{10} W_{br}} = 10^{\alpha + \beta \cdot \log_{10} 207}. \quad (1.4)$$

Kako določiti števili α in β oz. kaj pomeni, da se premica ‘najbolje prilega’ danim točkam, bomo spoznali tekom tega poglavja.

²V statistiki pravimo, da je taka premica *regresijska*.

1.1.2 Upor zraka pri prostem padu³

Če skočimo iz balona bomo nekaj časa pospešeno leteli proti tlu, tj. hitrost padanja se bo nekaj časa povečevala. Po določenem času se bo ustalila. Tedaj bo sila zračnega upora enaka sili naše teže. Do tega trenutka pa je silo zračnega upora težje izračunati. Direktnih formul, ki bi to silo izračunale, namreč ni, saj je sila zračnega upora odvisna od oblike padajočega telesa.

Za polkilo telo, ki smo ga spustili iz visoke višine, smo v 18 trenutkih izmerili hitrost telesa v (m/s) ter silo F_z zračnega upora na telo (N).

v	0	1.38	1.99	2.2	2.51	3.06	3.77	4.09	5.51
F_z	0.0	0.1	0.3	0.3	0.4	0.5	0.7	0.8	1.3
v	6.21	7.22	7.88	8.53	9.79	10.31	10.93	11.21	11.37
F_z	1.9	2.3	2.6	2.9	3.8	4.1	4.4	4.7	4.9

Kot vidimo, smo merjenje opustili približno tedaj, ko se je hitrost ustalila, tj. ko je sila zračnega upora dosegla težo telesa 5 N.

Problem 2. Kako naj ocenimo kakšna je sila zračnega upora pri hitrosti $v = 4.65$ m/s?

Znano je, da silo zračnega upora na padajoče telo dobro opiše enačba

$$F_z = \alpha v + \beta v^2, \quad (1.5)$$

kjer sta α in β neznani števili. Izbrati ju bomo morali tako, da se bo enačba (1.5) kar najboljše ujemala z danimi merjenji. Če označimo $x = v$ in $y = F_z$, potem se enačba (1.5) spremeni v

$$y = \alpha x + \beta x^2, \quad (1.6)$$

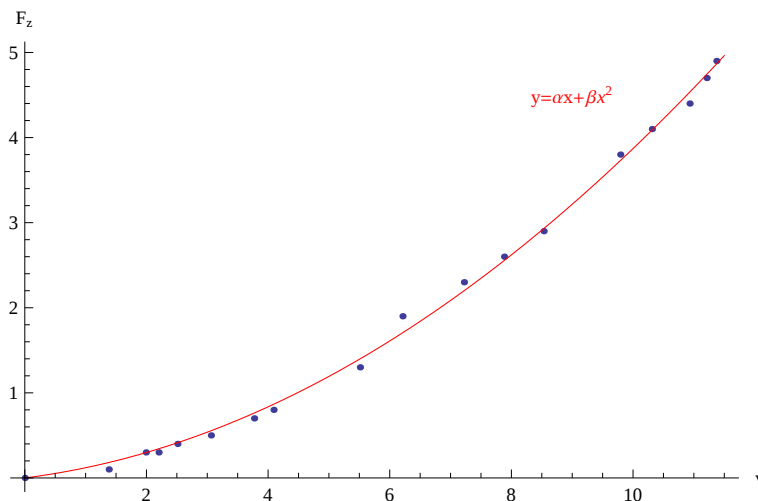
kar je posebna vrsta enačbe parabole, podatke o meritvah pa lahko ponazorimo z 18 točkami v 2-razsežnem koordinatnim sistemom:

$$\begin{aligned} T_1 &= (0, 0.0), \\ T_2 &= (1.38, 0.1), \\ &\vdots \\ T_{18} &= (11.37, 4.9). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Poiskati moramo torej tisto parabolo oblike (1.6), ki se najbolj prilega danim točkam (glej sliko 1.2). Ko bomo to parabolo, tj. števili α in β , določili, bomo rešitev problema 2 dobili kot

$$F_z = \alpha \cdot 4.65 + \beta \cdot 4.65^2. \quad (1.8)$$

³Podatki v tem podrazdelku so pridobljeni iz e-gradiva [4].



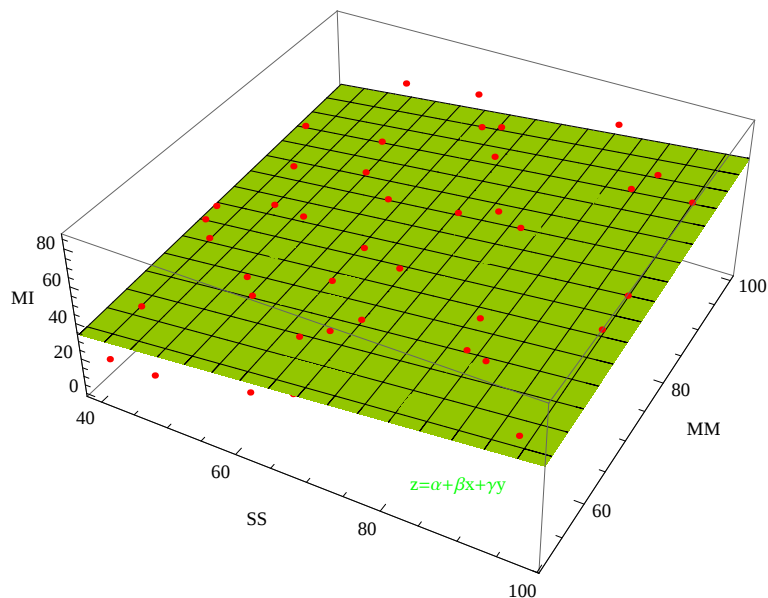
Slika 1.2: Iskana parabola, ki se najboljše prilega danim 18 točkam.

1.1.3 Napoved brucovega uspeha na izpitu

Na nekem študijskem programu neke fakultete je do sedaj 82 brucov opravljalo izpit iz matematike. Poleg rezultata na izpitu (MI), fakulteta pozna tudi njihov rezultat pri matematiki na maturi (MM) ter njihov povprečni rezultat pri matematiki v srednji šoli (SS). Vsi rezultati so v procentih.

SS	MM	MI	SS	MM	MI	SS	MM	MI
85	94	86	51	70	65	98	67	51
46	80	55	39	100	37	41	88	31
62	51	33	89	99	46	66	98	55
45	65	53	93	89	80	48	51	22
51	98	65	62	67	44	66	93	67
53	62	50	95	79	45	78	89	41
63	77	47	98	57	52	86	59	43
82	62	51	63	79	41	83	100	57
54	88	58	63	65	52	56	55	28
98	72	69	77	79	68	70	61	52
62	70	36	94	89	38	90	64	43
63	97	73	42	56	37	41	71	50
64	70	57	91	86	78	62	93	50
58	58	32	52	74	29	39	53	12
66	55	56	55	83	54	47	70	37
63	93	41	79	81	56	90	55	77
45	84	67	61	96	32	52	74	49
60	100	47	58	57	61	69	70	52
39	71	40	64	100	36	99	86	80
68	51	41	80	98	51	72	78	64
98	54	56	42	56	36	49	79	35
45	55	34	63	91	46	85	90	54
86	71	41	84	61	55	42	93	32
95	64	37	97	68	62	64	75	70
85	62	70	96	52	58	50	82	44
74	59	27	49	65	39	71	88	68
87	83	52	71	54	69			
67	87	44	75	83	49			

Fakulteta bi rada sestavila model, ki bo napovedal brucov uspeh pri izpitu iz matematike (MI), na podlagi predhodno znanih podatkov SS in MM .



Slika 1.3: Iskana ravnina.

Odloči se za t.i. linearni model

$$MI = \alpha + \beta SS + \gamma MM. \quad (1.9)$$

Problem 3. Kolikšen uspeh bo tak model napovedal brucu z ocenama $SS = 70$ in $MM = 80$?

Števila α, β, γ so zaenkrat neznana. Določiti jih moramo tako, da se bodo podatki o 82 brucih kar najboljše ujemali z enačbo (1.9). Če označimo, $x = SS$, $y = MM$ in $z = MI$, potem se enačba (1.9) spremeni v

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y,$$

kar je enačba ravnine, podatke o brucih pa opišemo z 82 točkami

$$\begin{aligned} T_1 &= (85, 94, 86), \\ T_2 &= (46, 80, 55), \\ &\vdots \\ T_{82} &= (71, 88, 68) \end{aligned} \quad (1.10)$$

v 3-razsežnem prostoru. Poiskati moramo torej tisto ravnino, ki se najbolj prilega tem točkam (glej sliko 1.3). Ko jo bomo našli, tj. ko bomo števila α, β, γ določili, bo odgovor na vprašanje iz problema 3 enako

$$MI = \alpha + \beta \cdot 70 + \gamma \cdot 80.$$

Opomba. Take vrste model seveda lahko za posameznika precej zgreši napoved, za množico brucov pa je napoved lahko precej dobra.

1.1.4 Napoved brucovega uspeha na izpitu 2

Naj bo situacija enaka kot v podrazdelku 1.1.3, le da fakulteta za 82 brucov, poleg ocen SS in MM , pozna tudi rezultat SI na sprejemnem izpitu (v procentih).

SS	MM	SI	MI	SS	MM	SI	MI	SS	MM	SI	MI
85	94	100	86	51	70	80	65	98	67	89	51
46	80	65	55	39	100	76	37	41	88	66	31
62	51	59	33	89	99	72	46	66	98	82	55
45	65	71	53	93	89	73	80	48	51	80	22
51	98	76	65	62	67	63	44	66	93	52	67
53	62	51	50	95	79	77	45	78	89	58	41
63	77	74	47	98	57	79	52	86	59	82	43
82	62	84	51	63	79	53	41	83	100	85	57
54	88	65	58	63	65	81	52	56	55	82	28
98	72	66	69	77	79	76	68	70	61	84	52
62	70	80	36	94	89	55	38	90	64	67	43
63	97	77	73	42	56	93	37	41	71	74	50
64	70	50	57	91	86	90	78	62	93	72	50
58	58	95	32	52	74	50	29	39	53	52	12
66	55	98	56	55	83	81	54	47	70	55	37
63	93	51	41	79	81	66	56	90	55	100	77
45	84	98	67	61	96	60	32	52	74	66	49
60	100	74	47	58	57	84	61	69	70	59	52
39	71	68	40	64	100	54	36	99	86	96	80
68	51	50	41	80	98	83	51	72	78	66	64
98	54	59	56	42	56	78	36	49	79	55	35
45	55	100	34	63	91	69	46	85	90	86	54
86	71	76	41	84	61	54	55	42	93	80	32
95	64	65	37	97	68	100	62	64	75	96	70
85	62	86	70	96	52	70	58	50	82	57	44
74	59	59	27	49	65	53	39	71	88	71	68
87	83	63	52	71	54	80	69				
67	87	72	44	75	83	71	49				

Tokrat se odloči za model oblike

$$MI = \alpha + \beta SS + \gamma MM + \delta SI, \quad (1.11)$$

kjer so $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ neznanata števila.

Problem 4. Kolikšen uspeh bo tak model napovedal brucu z ocenama $SS = 70$, $MM = 80$ in $SI = 78$?

Z oznakami $x = SS$, $y = MM$, $z = SI$ in $w = MI$ enačba (1.11) preide v enačbo

$$w = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z,$$

kar je enačba t.i. *hiperravnine* v 4-razsežnem prostoru. Prav tako so podatki o brucih predstavljeni s točkami

$$T_1 = (85, 94, 100, 86),$$

$$T_2 = (46, 80, 65, 55),$$

$\vdots$

$$T_{82} = (71, 88, 71, 68)$$

v 4-razsežnem prostoru. Pri iskanju hiperravnine, ki se tem točkam najbolj prilega, nam morebitna predstava, ki smo jo imeli v prejšnjih podrazdelkih tega poglavlja, povsem zataji. Tako so matematična orodja edina, s katerimi si bomo lahko pomagali.

Ko bomo hiperravnino našli, tj. ko bomo določili števila $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, bo odgovor na vprašanje iz problema 4 enako

$$MI = \alpha + \beta \cdot 70 + \gamma \cdot 80 + \delta \cdot 78.$$

Opomba. Kot vidimo, se v matematiki pogosto pojavijo večrazsežni prostori, tudi če preučujemo povsem vsakdanje probleme.

1.2 Matrike in vektorji

1.2.1 Operacije nad matrikami

Matrika bo za nas pravokotna (ali kvadratna) tabela, ki ima v vsaki svoji ‘celici’ neko realno število.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \\ 9 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 1.4: Primer 3×4 matrike.

Včasih števila v matriki ločimo tudi z vejicami (Predvsem takrat, ko zaradi večjih števil, predznakov, decimalk, itd. ni dovolj jasno v kateri vrstici/stolpcu leži katero število; glej npr. sliko 1.5.). Če ima matrika m vrstic in n stolpcev, potem bomo rekli, da je matrika oblike $m \times n$. Oglejmo si nekaj operacij nad matrikami.

1. **Seštevanje matrik.** Matriki, ki sta enakih oblik, lahko seštejemo tako, da seštejemo istoležne člene.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2, & -1+4 \\ 0+1, & 1+2 \\ 9+3, & -5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika 1.5: Primer seštevanja dveh matrik.

Bolj natančno, če sta matriki A in B enake oblike, a_{ij} in b_{ij} pa sta njuna člena v i -ti vrstici in j -tem stolpcu, potem je istoležni člen v matriki $A + B$ enak

$$a_{ij} + b_{ij}.$$

2. **Množenje matrike s številom.** Matriko lahko pomnožimo s poljubnim številom c tako, da vsak člen matrike pomnožimo s c .

$$\begin{aligned} 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2, & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0, & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 3 &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 3, & (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 3, & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Slika 1.6: Primer množenja matrike s številom 3. Množimo lahko iz leve ali desne strani, pri čemer sta rezultata enaka.

Bolj natančno, če je a_{ij} tisti člen matrike A , ki leži v i -ti vrstici in j -tem stolpcu, potem sta istoležna člena v matrikah $c \cdot A$ in $A \cdot c$ oba enaka

$$c \cdot a_{ij}.$$

3. **Transponiranje matrike.** *Transponiranko* matrike A označimo z $A^\top$. Dobimo jo tako, da vrstice matrike A zapišemo kot stolpce (in stolpce kot vrstice).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Slika 1.7: Primer transponiranja matrike.

Bolj natančno, če je A matrika oblike $m \times n$ in je a_{ij} tisti člen matrike A , ki leži v i -ti vrstici in j -tem stolpcu, potem je istoležni člen v matriki $A^\top$ enak

$$a_{ji},$$

matrika $A^\top$ pa je oblike $n \times m$.

4. **Množenje matrik.** Če je matrika A oblike $m \times p$ in je matrika B oblike $p \times n$, potem lahko izračunamo produkt AB , ki je oblike $m \times n$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1, & 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2, & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1, & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2, & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 9 \cdot 2 + (-5) \cdot 1, & 9 \cdot 4 + (-5) \cdot 2, & 9 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1, & (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 2, & (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 13 & 26 & 9 \\ -4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Slika 1.8: Primer množenja dveh matrik. Z množenjem 4×2 matrike v levem faktorju in 2×3 matrike v desnem faktorju smo dobili matriko oblike 4×3 . Število v produktu, ki leži v tretji vrstici in drugem stolpcu, smo dobili s pomočjo tretje vrstice v levem faktorju in drugega stolpca v desnem faktorju.

Bolj natančno, če a_{ij} in b_{ij} označujeta tista člena matrik A in B , ki ležita v i -ti vrstici in j -tem stolpcu, potem je istoležni člen v matriki AB enak

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Zgornjo vsoto na kratko označimo tudi kot

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Pozoren bralec je že opazil, da moramo biti pri množenju matrik pozorni na vrstni red množenja. Če produkt AB obstaja, to še ne pomeni, da obstaja tudi produkt BA , kadar obstaja, pa je običajno različen. Včasih je celo drugačne oblike. Omenjeno vidimo tudi v spodnjih primerih.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 AC &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, & CA &\text{ ne obstaja,} \\
 CD &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, & DC &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \\
 AB &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, & BA &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

5. **Inverz matrike.** Za matriko pravimo, da je *kvadratne* oblike, če ima enako število stolpcev in vrstic. *Diagonalo* kvadratne matrike A tvorijo členi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. *Identična matrika* ali *identiteta* je tista kvadratna matrika, ki ima povsod na diagonali vrednost 1, drugod pa vrednost 0. Označimo jo s simbolom I . Kadar želimo poudariti, da ima n stolpcev in vrstic, lahko uporabljamo tudi oznako I_n .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 1.9: Identična matrika I_4 .

Nekatere kvadratne matrike A imajo *inverzno matriko* oz. *inverz*. To je taka matrika B , ki je enake oblike kot A , in za katero velja $AB = I = BA$. Inverz matrike A označimo z A^{-1} . Za inverz sta torej značilni enakosti

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A.$$

Če je 2×2 matrika podana kot

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

potem je njen inverz enak

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Pri 2×2 matrikah pravimo, da je izraz $ad - bc$ *determinanta* matrike. Označimo jo z $\det A$. Iz enačbe (1.12) opazimo, da ima 2×2 matrika inverz natanko tedaj, ko je njena determinanta različna od 0.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4)} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0.5 \\ 2, & 1.5 \end{bmatrix}$$

Slika 1.10: Primer izračuna inverza 2×2 matrike.

Inverze večjih kvadratnih matrik se bomo naučili računati le s programom Maxima, saj je ‘prostoročno računanje’ precej zamudno.

1.2.2 Nekaj pravil

V spodnjih pravilih so matrike takih oblik in vrst, da so vsi produkti, vsote ter inverzi smiselni.

$$\begin{aligned} A + B &= B + A && \text{(komutativnost seštevanja)} \\ (A + B) + C &= A + (B + C) && \text{(asociativnost seštevanja)} \\ AB &\neq BA && \text{(produkta } AB \text{ in } BA \text{ sta enaka le izjemoma)} \\ (AB)C &= A(BC) && \text{(asociativnost množenja)} \\ A(B + C) &= AB + AC && \text{(distributivnost)} \\ (B + C)A &= BA + CA && \text{(distributivnost)} \\ (A + B)^\top &= A^\top + B^\top \\ (AB)^\top &= B^\top A^\top \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ AI &= A = IA \end{aligned}$$

1.2.3 Vektorji

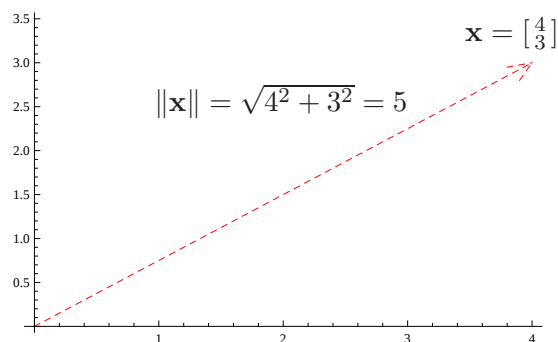
Vektor bo za nas matrika, ki ima le en stolpec, tj. matrika oblike $n \times 1$, kjer je n neko naravno število. Z normo⁴ vektorja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ bomo imeli v mislih naslednji izraz

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Norma ima vlogo ‘dolžine’. To lahko vidimo tudi na sliki 1.11, če si vektor predstavljamo kot t.i. ‘krajevni vektor’. Matriko A oblike $m \times n$ lahko interpretiramo kot preslikavo, ki vektor $\mathbf{x}$ oblike $n \times 1$ preslika v vektor $A\mathbf{x}$ oblike $m \times 1$. Npr. množenje 2-razsežnega vektorja z matriko

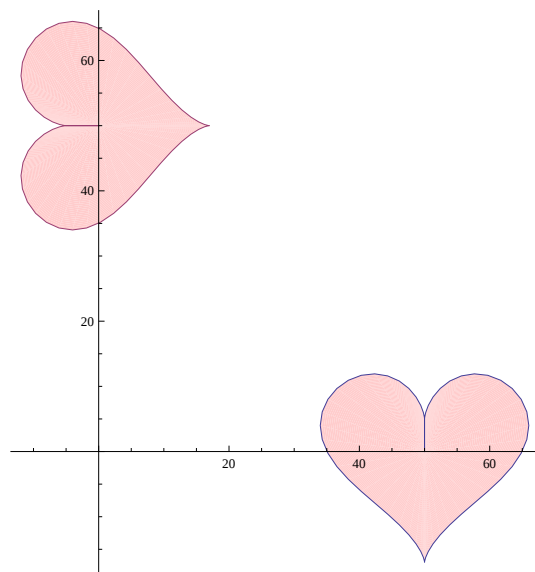
$$\begin{bmatrix} \cos \varphi, & -\sin \varphi \\ \sin \varphi, & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

⁴Normo lahko definiramo bolj splošno, a se bomo tukaj omejili na t.i. 2-normo.



Slika 1.11: Norma danega vektorja je enaka dolžini daljice med izhodiščem in točko $(4, 3)$.

predstavlja rotacijo za kot φ v nasprotni smeri urinega kazalca. V primeru



Slika 1.12: Rotacija za 90 stopinj. Srce in z rotacijo preslikano srce.

kota 90 stopinj dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

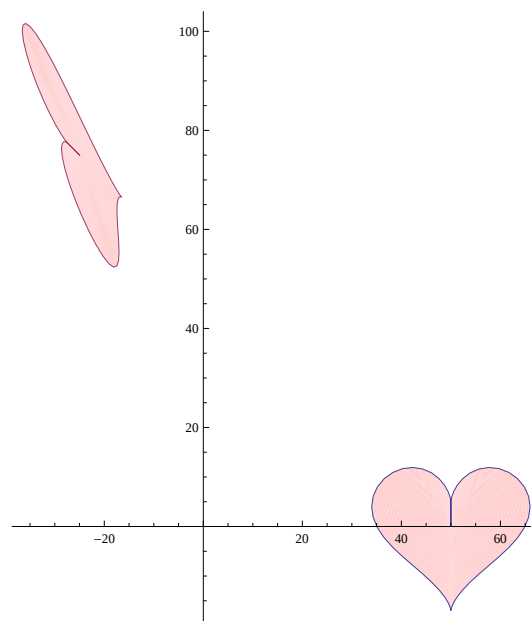
Kot vidimo tudi iz slike 1.12, se npr. konica srca iz točke $(50, -17)$ preslika v točko $(17, 50)$, saj velja

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Seveda predstavljajo matrike v splošnem tudi bolj komplicirane preslikave. Kam nam matrika

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

preslika dano srce, vidimo na sliki 1.13. Ker za dano matriko velja $|\det A| =$



Slika 1.13: Manj lepa preslikava.

$|-0.5 \cdot 0.5 - (-0.5) \cdot 1.5| = 0.5$, ima preslikano srce za pol manjšo ploščino od originalnega.

1.2.4 Ukazi v programu Maxima

Vse ukaze v programu Maxima potrdimo s sočasnim stiskom tipk **Enter** in **Shift**. Če bi radi v tem programu sešteli matriki iz slike 1.5, lahko to naredimo z naslednjimi ukazi:

```
A:matrix([3,-1],[0,1],[9,-5]);
B:matrix([2,4],[1,2],[3,5]);
A+B;
```

Če bi radi zmnožili matriko in število iz slike 1.6, potem lahko to naredimo z ukazom

```
3*matrix([2,-1],[0,1]);
```

Za transponiranje iz slike 1.7 uporabimo ukaza:

```
A:matrix([2,1],[0,7],[-2,3]);
transpose(A);
```

Matriki iz slike 1.8 lahko zmnožimo z naslednjimi ukazi:

```
A:matrix([3,-1],[0,1],[9,-5],[-3,2]);
B:matrix([2,4,1],[1,2,0]);
A.B;
```

Inverz iz slike 1.10 lahko izračunamo z ukazom

```
invert(matrix([3,-1],[-4,2]));
```

Normo vektorja

```
x:matrix([4],[3])
```

iz slike 1.11 lahko izračunamo npr. z ukazom

```
mat_norm(x,frobenius);
```

ali pa npr. z ukazom

```
sqrt(transpose(x).x);
```

1.3 Metoda najmanjših kvadratov

Če imamo m 'linearnih' enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.13}$$

z n neznankami $x_1, x_2, \dots, x_n$, kjer je $m > n$ (enačb je več kot neznank), potem sistem (1.13) običajno nima rešitve. *Metoda najmanjših kvadratov* nam, grobo rečeno, pove, katera 'rešitev' še 'najbolje reši dane enačbe'. Če označimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

potem lahko sistem enačb (1.13) nadomestimo z eno matrično enačbo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1.14)$$

Poiskati moramo torej tak vektor $\mathbf{x}$, da bo enačba $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ kar najboljše rešena. To bo tedaj, ko bo vektor $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ najmanjši možen, tj. ko bo norma

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \quad (1.15)$$

najmanjša. V kolikor obstaja inverz $(A^\top A)^{-1}$ (v praksi je to skoraj vedno res), potem se izkaže, da vektor

$$\mathbf{x} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b}$$

najbolje reši enačbo (1.14) oz. sistem (1.13). Vektorju $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$, ki smo ga minimalizirali, včasih pravimo *vektor napake*. Njegova norma (1.15) pa nam predstavlja ‘velikost napake’.

Primer 1.3.1. Recimo, da želimo poiskati premico $y = \alpha + \beta x$, ki se najboljše prilega točkam

$$(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 4).$$

Če bi obstajala taka premica, da bi vse 4 točke ležale na njej, potem bi veljalo

$$\alpha + \beta \cdot 1 = 1$$

$$\alpha + \beta \cdot 1 = 2$$

$$\alpha + \beta \cdot 2 = 2$$

$$\alpha + \beta \cdot 3 = 4$$

oz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Seveda take premice ni. Tisto premico, ki najboljše ustreza danim enačbam, tj. se najboljše prilega danim točkam, nam poda metoda najmanjših kvadratov, ki pravi, da velja

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Z nekaj truda lahko poračunamo:

$$A^{\top}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{bmatrix},$$

$$(A^{\top}A)^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 15 - 7^2} \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^{\top}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 19 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 19 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \\ \frac{13}{11} \end{bmatrix}.$$

Torej velja $\alpha = \frac{2}{11}$ in $\beta = \frac{13}{11}$, iskana premica pa je enaka

$$y = \frac{2}{11} + \frac{13}{11}x.$$

Primer 1.3.2. Poiščimo sedaj tisti polinom $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ druge stopnje (ali manj), katerega graf se najboljše prilega točkam

$$(-2, 3), (-1, 3), (0, 1), (1, 2), (2, 4).$$

Če bi obstajal polinom z grafom, ki bi šel skozi vse dane točke, potem bi veljalo

$$\alpha + \beta \cdot (-2) + \gamma \cdot (-2)^2 = 3$$

$$\alpha + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot (-1)^2 = 3$$

$$\alpha + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0^2 = 1$$

$$\alpha + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1^2 = 2$$

$$\alpha + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 2^2 = 4$$

oz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Spet uporabimo metodo najmanjših kvadratov. Najboljšo rešitev dobimo kot

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Tokrat uporabimo kar program Maxima:

```
A:matrix([1,-2,4], [1,-1,1], [1,0,0], [1,1,1], [1,2,4]);
b:transpose(matrix([3,3,1,2,4]));
invert(transpose(A).A).transpose(A).b;
```

Dobimo $\alpha = 1.6$, $\beta = 0.1$ in $\gamma = 0.5$ oz. $p(x) = 1.6 + 0.1x + 0.5x^2$.

Primer 1.3.3. Ponovimo primer 1.3.2, le da tokrat iščemo polinom $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ tretje stopnje (ali manj), ki se najbolj prilega danim točkam. Podobno kot prej poračunamo koeficiente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s pomočjo formule

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b},$$

kjer je

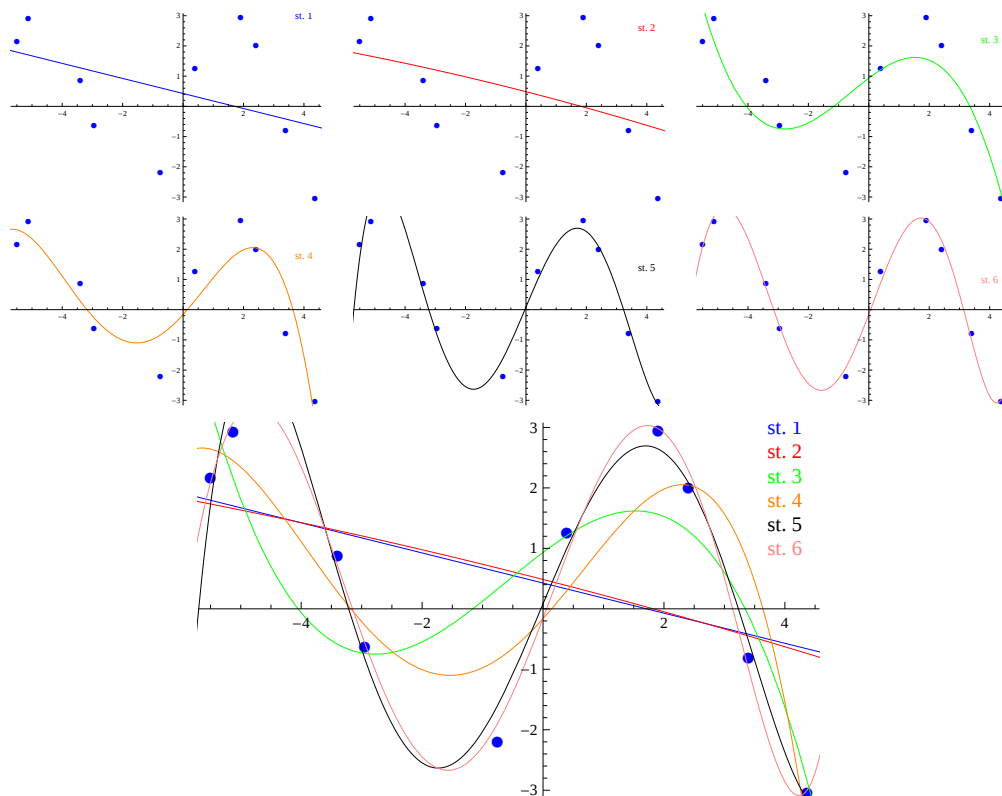
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Tudi tokrat uporabimo program Maxima:

```
A:matrix([1,-2,4,-8], [1,-1,1,-1], [1,0,0,0],
[1,1,1,1], [1,2,4,8]);
b:transpose(matrix([3,3,1,2,4]));
invert(transpose(A).A).transpose(A).b;
```

Dobimo $\alpha = 1.6$, $\beta = -0.75$, $\gamma = 0.5$ in $\delta = 0.25$ oz. $q(x) = 1.6 - 0.75x + 0.5x^2 + 0.25x^3$.

S programom Maxima ni težko poračunati normo vektorja napake (1.15). V primeru 1.3.2 znaša norma približno 1.26, v primeru 1.3.3 pa norma znaša približno 0.84, kar je pričakovano manj⁵. Na sliki 1.14 imamo polinome stopenj od 1 do 6, ki se najbolj prilegajo naboru danih točk. Iz slike se jasno



Slika 1.14: Polinomi stopenj od 1 do 6, ki se najbolj prilegajo danim točkam.

vidi, da se polinomi višjih stopenj bolje prilegajo. To bi potrdile tudi norme ustreznih vektorjev napak, če bi jih izračunali, saj bi bile manjše pri višjih stopnjah.

Numerična opomba. Večina računalnikov računa na 16 decimalok natančno. V določenih primerih se izkaže, da lahko direktni izračun formule $(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ s pomočjo računalnika povzroči tako veliko napako, da je rezultat povsem napačen. V takih primerih si lahko pomagamo z bolj stabilnimi izračuni, kot sta npr. *QR razcep* in *singularni razcep*. Bralec si lahko več o tem prebere v knjigi [7]. So pa ti primeri v praksi dokaj redki in se pojavijo kvečjemu tedaj, ko ima matrika A zelo veliko vrstic in tudi precej stolpcev. Nauk zgodbe: Če

⁵Normi lahko bralec izračuna s pomočjo datoteke `vektor_napake.wxm`.

ima matrika A zelo veliko vrstic/stolpcev in je rezultat za vas zelo pomemben, je mogoče smiselno, da se posvetujete z (numeričnim) matematikom.

1.4 Rešitev motivacijskih primerov

1.4.1 Rešitev problema 1 na strani 5

Določiti moramo števili α in β tako, da se bo premica $y = \alpha + \beta x$ kar najboljše prilegala 43 točkam (1.2). Enačbe

$$\begin{aligned}\alpha + \beta \cdot 0 &= 0.819544, \\ \alpha + \beta \cdot 3.40603 &= 3.66304, \\ &\vdots \\ \alpha + \beta \cdot 0.544068 &= 0.591065,\end{aligned}$$

zamenjamo z matrično enačbo

$$A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3.40603 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0.544068 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.819544 \\ 3.66304 \\ \vdots \\ 0.591065 \end{bmatrix}.$$

Iskana koeficienta dobimo s spodnjo formulo. Uporabimo program Maxima⁶:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.930348 \\ 0.782262 \end{bmatrix}.$$

Kot smo že ugotovili v enačbi (1.4), lahko sedaj maso možganov gorile ocenimo kot

$$W_{br} = 10^{\log_{10} W_{br}} = 10^{0.930348 + 0.782262 \cdot \log_{10} 207} \doteq 552 \text{ g}.$$

⁶Glej datoteko `sesalci.wxm`.

1.4.2 Rešitev problema 2 na strani 7

Določiti moramo števili α in β tako, da se bo parabola $y = \alpha x + \beta x^2$ kar najboljše prilegala točkam (1.7). Enačbe

$$\begin{aligned}\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0^2 &= 0.0, \\ \alpha \cdot 1.38 + \beta \cdot 1.38^2 &= 0.1, \\ &\vdots \\ \alpha \cdot 11.37 + \beta \cdot 11.37^2 &= 4.9,\end{aligned}$$

zamenjamo z matrično enačbo

$$A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0^2 \\ 1.38 & 1.38^2 \\ \vdots & \vdots \\ 11.37 & 11.37^2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.1 \\ \vdots \\ 4.9 \end{bmatrix}.$$

Iskana koeficienta dobimo s spodnjo formulo. Uporabimo program Maxima⁷:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.03 \end{bmatrix}.$$

Kot smo že ugotovili v enačbi (1.8), lahko sedaj silo zračnega upora na dano telo pri hitrosti 4.65 m/s ocenimo kot

$$F_z = 0.09 \cdot 4.65 + 0.03 \cdot 4.65^2 = 1.06 \text{ N}.$$

1.4.3 Rešitev problema 3 na strani 9

Določiti moramo števila α, β, γ tako, da se bo ravnina $z = \alpha + \beta x + \gamma y$ kar najboljše prilegala točkam (1.10). Enačbe

$$\begin{aligned}\alpha + \beta \cdot 85 + \gamma \cdot 94 &= 86, \\ \alpha + \beta \cdot 46 + \gamma \cdot 80 &= 55, \\ &\vdots \\ \alpha + \beta \cdot 71 + \gamma \cdot 88 &= 68,\end{aligned}$$

,

⁷Glej datoteko `prostipad.wxm`.

zamenjamo z matrično enačbo

$$A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 85 & 94 \\ 1 & 46 & 80 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 71 & 88 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 86 \\ 55 \\ \vdots \\ 68 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Iskane koeficiente dobimo s spodnjo formulo. Uporabimo program Maxima⁸:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10.209 \\ 0.356 \\ 0.209 \end{bmatrix}.$$

Dobljeni model bo tako brucu z ocenama $SS = 70$ in $MM = 80$ napovedal oceno

$$MI = 10.209 + 0.356 \cdot 70 + 0.209 \cdot 80 \doteq 52.$$

1.4.4 Rešitev problema 4 na strani 10

Za rešitev tega problema postopamo na enak način kot v prejšnjem, le da matriko A iz enačbe (1.16) nadomesti matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 85 & 94 & 100 \\ 1 & 46 & 80 & 65 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 71 & 88 & 71 \end{bmatrix}.$$

S programom Maxima⁹ dobimo

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.925 \\ 0.309 \\ 0.232 \\ 0.364 \end{bmatrix}.$$

Dobljeni model bo tako brucu z ocenami $SS = 70$, $MM = 80$, $SI = 78$ napovedal oceno

$$MI = -14.925 + 0.309 \cdot 70 + 0.232 \cdot 80 + 0.364 \cdot 78 \doteq 54.$$

⁸Glej datoteko `ocene1.wxm`.

⁹Glej datoteko `ocene2.wxm`.

Statistična opomba. V določenih primerih ocene, ki jih naredimo na podlagi metode najmanjših kvadratov, kot je opisano zgoraj, niso najbolj natančne. Nekaj problematičnih primerov lahko bralec najde v [5], za boljše razumevanje tematike pa si lahko pomaga tudi s knjigo [3]. Oba vira sicer zahtevata razumevanje ‘globoke’ statistike. Nauk zgodbe: Če je od vašega izračuna odvisno npr. delovanje jedrske elektrarne, se je bolje posvetovati z matematikom/matematičnim statistikom.

Vaje

2.1 Naloge za utrjevanje

1. Seštej

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & -9 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Zmnoži

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 0.5, 1 \\ 1.5, 2 \end{bmatrix}.$$

3. Izračunaj

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{\top} - \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. Zmnoži

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Zmnoži

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

in rezultat preveri s programom Maxima.

6. Določi obliko produkta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 3 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 9 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

in izračunaj tisti koeficient produkta, ki leži v tretji vrstici in v četrtem stolpcu.

7. Izračunaj inverz

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

8. Izračunaj

$$2 \cdot \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{\top}.$$

2.2 Naloge za preverjanje znanja

1. Določite števili α in β tako, da se bo graf polinoma $p(x) = \alpha + \beta x^3$ kar najboljše prilegal točkam $(1, 2)$, $(-1, -1)$, $(-2, -3)$ glede na metodo najmanjših kvadratov.
2. Za pet avtomobilov imamo podatek (M, G) , kjer je M masa avtomobila (v tonah) in G povprečna poraba goriva (v litrih na 100 prevoženih kilometrov):

$$(1.5, 6.6), (1.8, 9.3), (1.1, 5.8), (2.0, 9.8), (1.3, 6.0).$$

Določite števili α in β tako, da bo model $G = \alpha + \beta M$ kar najboljše opisal dane podatke (glede na metodo najmanjših kvadratov), tj. izražal povprečno porabo goriva s pomočjo mase avtomobila.

3. V tabeli so podane povprečne mase (v kg) prebivalk ZDA, starih od 30 do 39 let, glede na telesno višino (v cm)¹.

x_i	147	150	152	155	157	160	163
y_i	52.21	53.12	54.48	55.84	57.20	58.57	59.93

x_i	165	168	170	173	175	178	180	183
y_i	61.29	63.11	64.47	66.28	68.10	69.92	72.19	74.46

- (a) S pomočjo programa Maxima določite števili α in β tako, da bo model $Y = \alpha + \beta X$ kar najboljše opisal dane podatke (glede na metodo najmanjših kvadratov), tj. izražal povprečno maso s pomočjo višine. Z dobljenim modelom ocenite povprečno maso tistih prebivalk ZDA, ki so visoke 153 cm.
- (b) Zgolj s pomočjo kalkulatorja ponovite nalogo (a) na simboličnem primeru, kjer upoštevate le tri podatke v **krepkem** tisku.
4. Pri 46 ponovitvah nekega fizikalnega pojava smo izmerili tlak P (v barih) in temperaturo T (v stopinjah Celzija). Meritve so zapisane v obliki $\{P, T\}$:

{25366, 20.8}, {25356, 20.9}, {25336, 21.0}, {25256, 21.9}, {25267, 22.1}, {25306, 22.1}, {25237, 22.4}, {25267, 22.5}, {25138, 24.8}, {25148, 24.8}, {25143, 25.0}, {24731, 34.0}, {24751, 34.0}, {24771, 34.1}, {24424, 42.7}, {24444, 42.7}, {24419, 42.7}, {24117, 49.9}, {24102, 50.1}, {24092, 50.1}, {25202, 22.5}, {25157, 23.1}, {25157, 23.0}, {25366, 20.8}, {25356, 20.9}, {25336, 21.0}, {25256, 21.9}, {25267, 22.1}, {25306, 22.1}, {25237, 22.4}, {25267, 22.5}, {25138, 24.8}, {25148, 24.8}, {25143, 25.0}, {24731, 34.0}, {24751, 34.0}, {24771, 34.1}, {24424, 42.7}, {24444, 42.7}, {24419, 42.7}, {24117, 49.9}, {24102, 50.1}, {24092, 50.1}, {25202, 22.5}, {25157, 23.1}, {25157, 23.0}.

- (a) S pomočjo programa Maxima določite števili α in β tako, da bo model $P = \alpha + \beta T$ kar najboljše opisal dane podatke (glede na metodo najmanjših kvadratov). Lahko si pomagata z datoteko **tlaktemp.wxm**.
- (b) Zgolj s pomočjo kalkulatorja ponovite nalogo (a) na simboličnem primeru, kjer upoštevate le tri podatke v **krepkem** tisku.
5. Za 60 zaposlenih v nekem podjetju imamo podatke o plači P (v nekih enotah) in številu mesecev M , ki jih je posameznik oddelal v tem podjetju. Podatki so zapisani v obliki $\{P, M\}$:

¹Podatki so pridobljeni iz vira [6].

{50.1742, 204}, {39.2465, 39}, {48.8400, 96}, {48.3355, 94}, {64.1026, 24}, {41.2088, 97},
 {49.0279, 48}, {54.9451, 222}, {67.9096, 228}, {40.8817, 102}, {43.8095, 58}, {43.0942, 27},
 {36.5854, 20}, {43.3455, 41}, {40.7000, 48}, {46.7596, 60}, {61.9893, 153}, {40.5748, 7},
 {59.5238, 78}, {40.0183, 16}, {39.6825, 74}, {39.1304, 45}, {50.7143, 43}, {54.9451, 24},
 {40.2037, 20}, {34.3407, 98}, {32.3822, 13}, {38.1563, 65}, {80.5861, 150}, {51.7130, 30},
 {50.0905, 76}, {33.7163, 124}, {55.8379, 95}, {46.9043, 48}, {60.3792, 60}, {54.9451, 104},
 {43.1894, 61}, {48.8400, 7}, {70.2786, 34}, {60.5637, 30}, {38.5579, 22}, {57.2344, 184},
 {97.6801, 70}, {39.2760, 57}, {54.1126, 156}, {48.5795, 108}, {47.6564, 78}, {39.8687, 25},
 {67.1551, 61}, {44.6864, 36}, {27.4725, 43}, {38.7847, 10}, {45.7875, 83}, {67.9584, 36},
 {51.8926, 68}, {65.6288, 66}, {44.9317, 60}, {51.8326, 54}, {33.5775, 47}, {51.5612, 102}.

- (a) S pomočjo programa Maxima določite števili α in β tako, da bo model $P = \alpha + \beta \cdot M$ kar najboljše opisal dane podatke (glede na metodo najmanjših kvadratov). Lahko si pomagata z datoteko `place.wxm`.
- (b) Zgolj s pomočjo kalkulatorja ponovite nalogo (a) na simboličnem primeru, kjer upoštevate le tri podatke v **krepkem tisku**.

6. Neka populacija ima $n = 50$ enot. Na njej imamo dve statistični spremenljivki: X in Y . Spodaj so podatki oblike $\{x_i, y_i\}$ o teh dveh spremenljivkah. Primer: vrednost spremenljivke X na 2.enoti je 8.0, vrednost spremenljivke Y pa je enaka 237.

{8.1, 231}, {8.0, 237}, {11.3, 427}, {9.7, 319}, {11.1, 399}, {11.7, 456}, {11.3, 422}, {11.9, 464},
 {10.4, 360}, {10.7, 391}, {9.6, 324}, {9.9, 334}, {11.4, 417}, {9.6, 327}, {11.7, 447}, {9.8, 320},
 {8.3, 258}, {8.8, 272}, {9.3, 303}, {10.4, 364}, {9.5, 306}, {11.4, 421}, {11.1, 414}, {10.7, 376},
 {10.3, 359}, {9.8, 325}, {9.2, 288}, {8.5, 260}, {11.0, 407}, {10.3, 362}, {9.5, 313}, {8.3, 239},
 {10.7, 385}, {8.5, 253}, {9.4, 313}, {8.2, 244}, {8.4, 256}, {11.9, 459}, {8.5, 263}, {11.2, 412},
 {11.6, 433}, {9.2, 292}, {9.1, 282}, {11.7, 452}, {10.2, 355}, {10.2, 343}, {11.2, 415}, {11.8, 449},
 {9.2, 289}, {9.0, 282}.

- (a) S pomočjo programa Maxima določite števili α in β tako, da bo model $Y = \alpha X + \beta X^2$ kar najboljše opisoval dane podatke (glede na metodo najmanjših kvadratov). Ocenite vrednost spremenljivke Y za enoto, kjer spremenljivka X zavzame vrednost 8.9. Lahko si pomagata z datoteko `spremenljivki.wxm`.
- (b) Zgolj s pomočjo kalkulatorja ponovite nalogo (a) na simboličnem primeru, kjer upoštevate le podatke za prve 4 enote (**v krepkem tisku**).

7. Intenziteta sevanja radioaktivne substance je bila izmerjena v polletnih intervalih. V tabeli je prikazana relativna intenziteta γ pri teh merjenjih (tj. delež sevanja v primerjavi z začetnim stanjem).²

²Naloga je povzeta iz knjige [2].

t (leta)	0	0.5	1	1.5	2	2.5
γ	1.000	0.994	0.990	0.985	0.979	0.977
t (leta)	3	3.5	4	4.5	5	5.5
γ	0.972	0.969	0.967	0.960	0.956	0.952

- (a) S pomočjo programa Maxima določite števili C in D tako, da bo model $\log_{10} \gamma = C + Dt$ kar najbolj opisal dane podatke (glede na metodo najmanjših kvadratov). Napovejte relativno intenziteto γ po $t = 6$ letih.
- (b) Zgolj s pomočjo kalkulatorja ponovite nalogo (a) na simboličnem primeru, kjer upoštevate le podatke (**v krepkem tisku**).
8. Dani so podatki o uspehu 66 študentov matematike na izpitih iz linearne algebre (LA), analize (ANA), topologije (TOP) in funkcionalne analize (FA). Vse ocene so v procentih. Radi bi sestavili model, ki bi iz ocen linearne algebre, analize in topologije napovedal oceno iz funkcionalne analize. Odločimo se za model oblike

$$FA = \alpha \cdot LA + \beta \cdot ANA + \gamma \cdot TOP.$$

LA	ANA	TOP	FA	LA	ANA	TOP	FA
45	38	41	38	31	58	22	23
77	38	35	55	28	51	17	25
26	58	37	32	54	79	23	40
38	41	51	37	76	79	34	47
30	65	19	42	61	75	35	48
51	24	49	43	64	41	31	44
85	51	31	48	73	29	61	52
41	31	28	34	69	61	22	38
71	32	21	40	15	30	26	18
50	32	56	49	76	70	62	59
26	46	18	19	32	22	62	52
31	43	35	34	51	79	41	50
69	54	12	42	55	58	52	50
74	61	37	62	36	72	18	34
22	72	65	51	83	43	66	71
24	57	26	42	77	45	68	70
18	65	44	43	29	62	62	45
30	23	46	42	31	51	66	46
85	34	15	45	64	66	34	48
79	46	65	69	47	51	68	50
52	69	31	50	61	54	29	47
21	32	45	29	58	56	39	44
63	21	11	21	15	38	22	14
71	25	22	46	32	52	52	48
16	23	38	34	66	52	49	54
24	21	44	32	76	39	42	51
19	40	17	21	82	65	24	60
45	70	49	55	81	80	52	77
31	26	21	21	18	24	13	9
31	79	63	50	33	40	62	40
41	22	40	38	52	47	61	57
83	41	69	64	57	49	38	52
69	42	35	39	66	73	61	57

- (a) S pomočjo programa Maxima določite števila α, β, γ tako, da bo dani model kar najbolj sovpadal z danimi podatki (glede na metodo najmanjših kvadratov). Kakšno oceno FA dobljeni model

napove študentu z ocenami $LA = 51$, $ANA = 52$, $TOP = 31$? Lahko si pomagata z datoteko `fa.wxm`.

- (b) Recimo, da se odločite za model $FA = \alpha \cdot LA + \gamma \cdot TOP$, kjer ignorirate oceno ANA . Zgolj s pomočjo kalkulatorja določite števili α in γ tako, bo dani model kar najbolj sovpadal z danimi podatki (glede na metodo najmanjših kvadratov). Pri tem se omejite na simbolični primer, kjer upoštevate le podatke prvih pet študentov (v levem delu tabele).

2.3 Rešitve nalog za utrjevanje

1.

$$\begin{bmatrix} 7 & 11 & -8 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

3.

$$\begin{bmatrix} 21 & 1 & 10 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -15 & 15 & -15 \\ 24 & -24 & 24 \end{bmatrix}.$$

6. 4×6 , -1 .

7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

8.

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{103}{30} \\ 2 & \frac{31}{10} \end{bmatrix}.$$

2.4 Rešitve nalog za preverjanje znanja

1. $\alpha = \frac{42}{67}, \beta = \frac{65}{134}$.
2. $\alpha \doteq -0.23, \beta \doteq 5.02$.
3. (a) $\alpha \doteq -39.062, \beta \doteq 0.613, \quad 54.68 \text{ kg};$
(b) $\alpha \doteq -12.898, \beta \doteq 0.442, \quad 54.74 \text{ kg}.$
4. (a) $\alpha \doteq 26173, \beta \doteq -41.284;$
(b) $\alpha \doteq 28488, \beta \doteq -150.$
5. (a) $\alpha \doteq 44.213, \beta \doteq 0.0731;$
(b) $\alpha \doteq 39.399, \beta \doteq 0.0592.$
6. (a) $\alpha \doteq 9.23752, \beta \doteq 2.47467, \quad 278;$
(b) $\alpha \doteq 7.37661, \beta \doteq 2.67561, \quad 278.$
7. (a) $C \doteq -0.000688563, D \doteq -0.00375211, \quad 0.948;$
(b) $C \doteq -0.00056391, D \doteq -0.00395015, \quad 0.946.$
8. (a) $\alpha \doteq 0.359, \beta \doteq 0.172, \gamma \doteq 0.441, \quad 41;$
(b) $\alpha \doteq 0.619, \gamma \doteq 0.330.$

Literatura

- [1] T. Allison and D. V. Cicchetti. Sleep in mammals: ecological and constitutional correlates. *Science* 12 November 1976, 732–734. Podatki dostopni dne 14. 10. 2013 na <http://lib.stat.cmu.edu/datasets/sleep>
- [2] J. Kiusalaas. Numerical Methods in Engineering with Python 3. Cambridge University Press, 2013.
- [3] J. A. Rice, Mathematical statistics and data analysis, 3rd ed., Duxbury advanced series, Belmont (CA) : Thomson/Brooks/Cole, cop., 2007.
- [4] University of Wyoming, Curve Fitting: Linear and Non-linear Least Squares. Dne 13. 10. 2013 dostopno na http://www.uwyo.edu/ceas/classes/meref/curve_fitting.pdf
- [5] Wikipedia. Linear regression. Dne 17. 10. 2014 dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_regression
- [6] Wikipedia. Ordinary Least Squares. Dne 10. 11. 2013 dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Ordinary_least_squares
- [7] E. Zakrajšek, Uporabna numerična linearna algebra, Ljubljana : DMFA - založništvo, 2000. Prevod originala: J. W. Demmel, Applied numerical linear algebra. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997.