UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

1-popolno usmerljivi produktni grafi

(1-Perfectly Orientable Product Graphs)

Ime in priimek: Mojca Šentjurc
Študijski program: Matematika
Mentor: prof. dr. Martin Milanič

Koper, oktober 2019

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Mojca ŠENTJURC

Naslov zaključne naloge: 1-popolno usmerljivi produktni grafi

Kraj: Koper

Leto: 2019

Število listov: 32 Število slik: 14 Število referenc: 7

Mentor: prof. dr. Martin Milanič

Ključne besede: kartezični produkt, leksikografski produkt, direktni produkt, krepki produkt, 1-popolna usmeritev, 1-popolno usmerljiv graf

Math. Subj. Class. (2010): 05C75, 05C20, 05C76

Izvleček:
Graf G je 1-popolno usmerljiv, če ima 1-popolno usmeritev, tj. usmeritev, v kateri izhodna soseščina vsake točke inducira turnir. Koncept 1-popolno usmerljivih grafov se je v literaturi prvič pojavil leta 1982. Kljub temu da jih lahko prepoznamo v polinomskem času, pa je vprašanje strukturne karakterizacije še vedno odprto. Znanih je nekaj delnih rezultatov, med njimi tudi karakterizacija 1-popolno usmerljivih netrivialnih produktnih grafov glede na poljubnega izmed štirih standardnih produktov grafov: kartezični, leksikografski, direktni in krepki produkt. V zaključni nalogi bo glavna tema karakterizacija 1-popolno usmerljivih netrivialnih produktov dveh grafov. Na poti pa spoznamo nekaj osnovnih lastnosti 1-popolno usmerljivih grafov, operacije, ki ohranjajo razred 1-popolno usmerljivih grafov in štiri prepovedane inducirane minorje. Spoznamo tudi osnovne lastnosti vseh štirih standardnih produktov in razred koveričnih grafov.

Key words documentation

Name and SURNAME: Mojca ŠENTJURC

Title of final project paper: 1-perfectly orientable product graphs

Place: Koper

Year: 2019

Number of pages: 32 Number of figures: 14 Number of references: 7

Mentor: Prof. Martin Milanič, PhD

Keywords: Cartesian product, lexicographic product, direct product, strong product, 1-perfectly orientable graph

Math. Subj. Class. (2010): 05C75, 05C20, 05C76

Abstract: A graph G is 1-perfectly orientable if it admits a 1-perfect orientation, that is, an orientation in which every out-neighborhood induces a tournament. The concept of 1-perfectly orientable graphs was first introduced in 1982. Even though such graphs can be recognized in polynomial time, the problem of characterization of 1-perfectly orientable graphs remains open. Partial results are known, including a characterization of 1-perfectly orientable nontrivial product graphs, for each of the four standard graph products: the Cartesian, the lexicographic, the direct, and the strong product. In this final project paper, the main topic is to describe the characterizations of 1-perfectly orientable nontrivial products of two graphs. We describe the main properties of 1-perfectly orientable graphs, operations preserving them, and four minimal forbidden induced minors. We also describe the basic properties of each of the four standard graph products and the class of co-chain graphs.

Zahvala

Najprej bi se iskreno rada zahvalila prof. dr. Martinu Milaniču, za ves vložen čas in pomoč pri izdelavi zaključne naloge. Hvala, ker ste bili vedno na voljo za dodatno razlago in nasvete.

Zahvaljujem se tudi vsem ostalim profesorjem in asistentom, s katerimi sem se srečala v času študija.

Posebna zahvala gre tudi družini in prijateljem za vso podporo, dobro voljo, lepe trenutke, posojene zapiske in neumnosti, pa tudi za vso dobronamerno teženje. Skratka, hvala za najboljša študijska leta.

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Seznam kratic

tj.	to je
ti.	tako imenovan
npr.	na primer
1-*p.u.*	1-popolno usmerljiv

1 Uvod

V zaključni nalogi bomo obravnavali 1-popolno usmerljive, oziroma krajše 1-p.u. grafe. To so natanko tisti grafi, za katere obstaja taka usmeritev, ki je izhodni turnir. To pomeni, da izhodna soseščina poljubne točke inducira usmeritev polnega grafa. Kammer in Tholey sta leta 2014 vpeljala bolj splošen koncept, in sicer koncept k-popolno usmerljivih grafov [8]. Graf je k-popolno usmerljiv, če premore usmeritev, v kateri je vsaka izhodna soseščina vsake točke unija takih k množic, da vsaka izmed njih inducira turnir. Sledeč njuni terminologiji je usmeritev grafa 1-popolna, če izhodna soseščina vsake točke inducira turnir, graf pa je 1-popolno usmerljiv, če premore 1-popolno usmeritev.

Koncept 1-popolno usmerljivih grafov se je v literaturi prvič pojavil leta 1982 pod imenom $\{B_2\}$-grafi v okviru splošne študije Skriena, ki je med drugim postavil vprašanje strukturne karakterizacije 1-p.u. grafov [9]. Vprašanje je še vedno odprto. V številnih člankih je omenjena tudi t.i. bratska usmeritev, to je usmeritev, v kateri vse vhodne soseščine inducirajo turnirje. Če celotno usmeritev obrnemo, se vhodne soseščine preslikajo v izhodne in dobimo natanko 1-popolno usmeritev.

Kljub temu da 1-p.u. grafe lahko prepoznamo v polinomskem času, pa struktura 1-p.u. grafov ni znana. Znani so le nekateri delni rezultati. Podana je karakterizacija 1-p.u. grafov brez trikotnikov, karakterizacija 1-p.u. povezavnih grafov in dokazano je, da je vsak graf z enim samim induciranim ciklom reda vsaj 4 tudi 1-p.u. (glej [1]). Prav tako je bilo dokazano, da sta razreda tetivnih grafov in grafov krožnih lokov podrazreda razreda 1-p.u. grafov. V disertaciji T. Hartinger [5] so opisane številne operacije nad grafi, ki ohranjajo razred 1-p.u. grafov. Prav tako je podana karakterizacija 1-p.u. grafov glede na pokritje povezav z klikami, prikazana je neskončna družina minimalnih prepovedanih induciranih minorjev za razred 1-p.u. grafov in karakterizacija 1-p.u. grafov v razredih kografov in kodvodelnih grafov. Definirana je tudi neskončna družina kodvodelnih grafov in dokazano, da so njihovi komplementi 1-p.u.

Hartinger in Milanič sta v članku [7] popolnoma karakterizirala, kdaj je netrivialen produkt dveh grafov G in H 1-p.u. za kartezični, leksikografski, direktni in krepki produkt. Članek nam bo služil kot glavna literatura.

V nalogi si bomo ogledali nekaj osnovnih lastnosti 1-p.u. grafov ter njihove dokaze. Obravnavali bomo štiri standardne produkte: kartezični produkt, leksikografski produkt, direktni produkt in krepki produkt, ter za vsakega od njih opisali karakterizacijo 1-p.u. grafov, ki jih lahko zapišemo kot netrivialen produkt dveh grafov.

2 Osnovni pojmi

Za lažje razumevanje željenih problemov bomo v tem delu predstavili pomembnejše definicije in nekaj osnovnih pojmov o grafih ter osnovne rezultate o 1-p.u. grafih.

2.1 Osnove o grafih

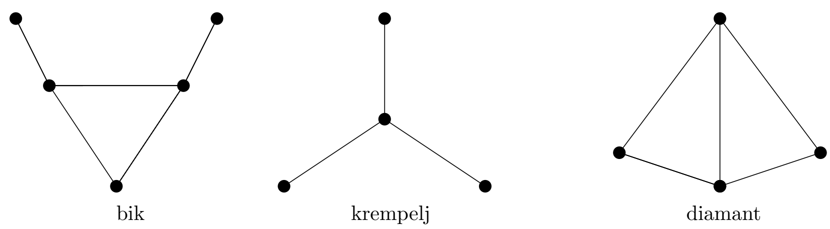
Vsi grafi, ki jih bomo obravnavali, bodo enostavni in končni. Nekateri bodo usmerjeni, tem bomo rekli *digrafi*. Uporabili bomo standardno terminologijo ter tako množico točk grafa G označevali z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Podobno za digrafe, kjer pa bomo množico usmerjenih povezav digrafa D označili z $A(D)$. Povezavo v grafu, ki povezuje točki u in v, bomo označevali uv.

Množica vseh točk, ki so sosednje z v, je *soseščina* točke v v grafu G, in jo bomo označevali z $N_G(v)$. Z $d_G(v)$ označimo *stopnjo točke* v, ki je definirana kot velikost njene soseščine. Točki stopnje 1 rečemo *list*. *Zaprta soseščina* točke v v grafu G je množica $N_G(v) \cup \{v\}$ in jo označimo z $N_G[v]$. *Usmeritev* grafa $G = (V, E)$ je poljuben digraf $D = (V, A)$, ki ga dobimo, če vsaki povezavi v G določimo smer. Natančneje, za vsako povezavo $\{u, v\}$ vsebuje množica A natanko enega izmed urejenih parov (u, v) in (v, u) in nobenih drugih urejenih parov. *Turnir* je usmeritev polnega grafa. *Vhodna soseščina* točke v v digrafu $D = (V, A)$ je množica vseh takih točk w, za katere velja $(w, v) \in A$. Označimo jo z $N_D^-(v)$. Podobno definiramo $N_D^+(v)$, *izhodno soseščino* točke v digrafu D, kot množico vseh točk w, za katere je $(v, w) \in A$. Velikosti množic vhodne in izhodne soseščine sta *vhodna* in *izhodna stopnja* točke v, označeni kot $d_G^-(v)$ in $d_G^+(v)$. *Razdalja* med dvema točkama u in v v povezanem grafu G je dolžina (to je število povezav) najkrajše u, v-poti, označena kot $d(u, v)$.

Klika v grafu G je množica paroma sosednjih točk, *neodvisna množica* pa množica paroma nesosednjih točk. *Klično pokritje* grafa G je taka množica klik, da je vsaka točka grafa G vsebovana v neki kliki. *Komplement* grafa G označimo z $\overline{G}$ in je graf z množico točk $V(G)$, v katerem sta različni točki sosednji natanko tedaj, kadar nista sosednji v G. Graf G je *dvodelen*, če je $V(G)$ unija dveh disjunktnih (lahko praznih) neodvisnih množic in *kodvodelen*, če je komplement dvodelnega grafa. Dejstvo, da sta grafa G in H izomorfna, bomo označevali z $G \cong H$. Graf G je *povezan*, če za vsak par točk $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja u, v-pot. *Komponente* grafa G so njegovi maksimalni povezani podgrafi. *Induciran podgraf* grafa G je podgraf, ki ga dobimo z odstranitvijo neke podmnožice točk. Pišemo $G[T]$ za $G - (V(G) \setminus T)$, to je za podgraf grafa G, induciran z množico točk T. Naj bosta G in H poljubna grafa. Pravimo, da je G H-*prost*, če ne vsebuje induciranega podgrafa, izomorfnega grafu H.

Unija poljubnih dveh grafov G in H je graf $G \cup H$ z množico točk $V(G) \cup V(H)$ in množico povezav $E(G) \cup E(H)$. Graf, ki ga dobimo kot unijo dveh točkovno disjunktnih grafov G in H, je *disjunktna unija* danih grafov, označimo ga z $G + H$. Pisali bomo $2G$ za $G + G$. *Spoj* dveh grafov G in H, označimo z $G * H$, je graf, ki ga dobimo tako, da disjunktni uniji $G + H$ dodamo vse povezave med vsako točko iz G z vsako točko iz H. Naj bosta G in H točkovno disjunktna grafa in v točka grafa G. *Substitucija točke v z grafom H v G* je operacija, ki zamenja točko v z grafom H, in doda vse povezave med točkami iz grafa H ter točkami iz $N_G(v)$. Za različni točki u in v v grafu G rečemo, da sta *prava dvojčka*, če velja $N_G[u] = N_G[v]$. Operacijo *dodajanja pravega dvojčka* grafu G definiramo kot dodajanje nove točke w tako, da dodamo vse povezave med w in $N_G[v]$, kjer je v neka fiksna točka $v \in V(G)$. Točki v v grafu G rečemo, da je *simpliciana*, če njena soseščina tvori kliko, in *univerzalna*, če je sosednja z vsemi ostalimi točkami grafa, to je $N_G[v] = V(G)$.

Kot običajno K_n, C_n, P_n označuje poln graf, cikel in pot na n točkah. Opišimo še nekaj grafov, ki jih bomo kasneje uporabili. *Krempelj* je poln dvodelen graf $K_{1,3}$, tj. zvezda z tremi listi. *Bik* je graf na 5 točkah s 5 povezavami, sestavljen iz trikotnika in dveh disjunktnih, nanj pripetih povezav. *Diamant* je graf $P_3 * K_1$, tj. graf dobljen iz poti na treh točkah z dodajanjem univerzalne točke. Prikazani so na sliki 1.



Slika 1: Slika prikazuje grafe bika, kremplja in diamanta.

Grafu H pravimo *induciran minor* grafa G, če lahko H dobimo iz G z zaporedjem brisanja točk in krčenja povezav. Pri tem je *krčenje povezave uv* operacija, ki izbriše povezavo med u in v in točki u in v zamenja z novo točko w, ki je sosednja z natanko točkami iz $N_G(u) \cup N_G(v)$.

Grafi, v katerih je vsaka usmeritev 1-popolna, so očitno 1-p.u. Vendar pa so še precej bolj restruktivne strukture in bodo za nas v nadaljevanju naloge nezanimivi. Opisali jih bomo v naslednji trditvi.

Trditev 2.1. *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

i) Vsaka usmeritev grafa G je 1-popolna.

ii) G je P_3-prost.

iii) Vsaka komponenta grafa G je poln graf.

Dokaz. Najprej z protislovjem pokažimo implikacijo $i) \Rightarrow ii)$. Naj bo G graf, katerega vsaka usmeritev je 1-popolna. Naj G vsebuje pot P_3, recimo na točkah (a, b, c). Usmerimo $b \to a$, $b \to c$, in ostale povezave poljubno. Opazimo, da izhodna soseščina točke b ne tvori klike. Usmeritev torej ni 1-popolna. To pa je v protislovju s predpostavko pogoja $i)$. Sledi, da je graf G P_3-prost.

Pokažimo implikacijo $ii) \Rightarrow iii)$. Vzemimo poljubni nesosednji točki x in y v poljubni komponenti grafa G. Potem obstaja najkrajša pot od x do y. Ker smo vzeli nesosednji točki, med njima na poti obstaja najmanj ena točka. Posledično G vsebuje induciran podgraf izomorfen P_3, to pa je v protislovju s predpostavko, da je G P_3-prost. Torej obstaja povezava med vsakim parom točk v isti komponenti, kar pomeni, da je vsaka komponenta poln graf.

Nazadnje dokažimo še implikacijo $iii) \Rightarrow i)$. Fiksirajmo poljubno usmeritev grafa G, katerega vsaka komponenta je poln graf. Ker so vse točke v isti komponenti paroma sosednje, izhodna soseščina poljubne točke $v \in V(G)$ tvori turnir. Usmeritev je torej 1-popolna. S tem smo pokazali implikacijo iz $iii)$ v $i)$ in tako zaključili dokaz. □

2.2 Osnovni rezultati o 1-popolno usmerljivih grafih

S spodnjo trditvijo bomo opisali 1-p.u. grafe še z uporabo lastnosti povezanih z obstojem določenih kličnih pokritj.

Trditev 2.2 (Hartinger in Milanič [6]). *Za vsak graf G z množico točk $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

(1.) G je 1-popolno usmerljiv.

(2.) G ima tako klično pokritje $\{C_1, \ldots, C_n\}$, da veljata naslednja pogoja:

2.a) $v_i \in C_i$ za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2.b) za vsako povezavo $v_iv_j \in E(G)$ imamo $v_i \in C_j$ ali $v_j \in C_i$, vendar ne oboje.

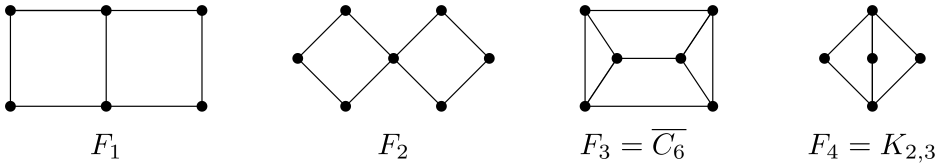
(3.) G ima tako klično pokritje $\{C_1, \ldots, C_n\}$, da veljata naslednja pogoja:

3.a) $v_i \in C_i$ *za vsak* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3.b) za vsako povezavo $v_i v_j \in E(G)$ *imamo* $v_i \in C_j$ *ali* $v_j \in C_i$.

Kot zgled uporabe trditve 2.2 si bomo pogledali dokaz spodnje leme iz [6].

Lema 2.3. *Noben graf iz množice* $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ *ni 1-p.u. (glej sliko 2).*



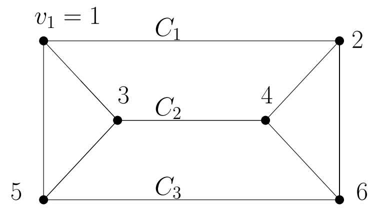
Slika 2: Štirje grafi, ki niso 1-p.u.

Dokaz. Lemo bomo dokazali z uporabe trditve 2.1. Poglejmo si najprej graf F_1. Sestavlja ga 6 točk in ima klično pokritje, ki ga sestavlja 7 klik. V vsaki kliki je natanko ena povezava. Opazimo, da je število točk manjše kot število klik, potrebnih za pokritje povezav. Pogoj 2.a) tako ni izpolnjen, torej graf F_1 ni 1-p.u.

Podobno velja za F_2, ki ima 7 točk in 8 klik, in za F_4, ki ima 5 točk in 6 klik.

Število točk v grafu F_3 je večje kot število klik, potrebnih za pokritje povezav. Da graf F_3 ni 1-p.u., bomo dokazali s protislovjem. Recimo torej, da je graf $F_3 = \overline{C_6}$ 1-p.u. Tedaj obstajajo take klike $C_1, , \ldots C_6$, da velja $v_1 \in C_1, \ldots, v_6 \in C_6$. Točke v grafu označimo s številkami (glej sliko 3). Brez škode za splošnost naj bo $C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{3, 4\}$, $C_3 = \{5, 6\}$ in $v_1 = 1$. Ker je $v_2 \in C_2$, pomeni, da je $v_2 = 3$ ali $v_2 = 4$. Če velja $v_2 = 3$, sledi, da je $v_1 \in C_2$ ali $v_2 \in C_1$, kar pa je protislovje. Torej je $v_2 = 4$. Sedaj podobno $v_3 \in C_3$ pomeni, da je $v_3 = 5$ ali $v_3 = 6$. Če je $v_3 = 5$, pogoj 3.b) ni izpolnjen za povezavo $v_1 v_3$. Torej $v_3 = 6$, kar pa prav tako ne zadošča pogoju 3.b) za povezavo $v_1 v_3$. Prišli smo do protislovja, kar pomeni, da graf ni 1-p.u. □

•



Slika 3: Označen graf F_3

Naslednja lema in njen dokaz sta povzeta iz članka [6].

Lema 2.4. *Razred 1-p.u. grafov je zaprt za naslednje operacije:*

(a) Disjunktno unijo.

(b) Dodajanje pravega dvojčka.

(c) Dodajanje univerzalne točke.

(d) Dodajanje simplicialne točke.

(e) Brisanje točke.

(f) Krčenje povezav.

Dokaz. Naj bo $D(G)$ poljubna, vendar fiksna 1-popolna usmeritev 1-p.u. grafa G.

(a) Naj bosta G_1 in G_2 dva poljubna 1-p.u. grafa, ter $D(G_1)$ in $D(G_2)$ njuni 1-popolni usmeritvi. Potem je graf $G = G_1 + G_2$ disjunktna unija dveh 1-p.u. grafov in disjunktna unija digrafov $D(G_1)$ in $D(G_2)$ njegova 1-popolna usmeritev.

(b) Naj bo G 1-p.u. graf in w njegova točka. Naj bo G' graf, dobljen iz G z dodajanjem pravega dvojčka, točke v, točki w. 1-popolno usmeritev D' grafa G' dobimo iz $D(G)$ tako, da ne spreminjamo usmeritev povezav iz G, novo dodane pa usmerimo kot $v \to u$, če je $u \in N^+_{D(G)}(w)$ in $u \to v$, če je $u \in N^-_{D(G)}(w)$, povezavo wv pa usmerimo od w proti v. Izhodna soseščina točke v je natanko enaka izhodni soseščini točke w, ki je klika. Torej je usmeritev D' 1-popolna in graf G' 1-p.u.

(c) Naj bo G 1-p.u. graf in $D(G)$ njegova 1-popolna usmeritev. Ko grafu G dodamo univerzalno točko v, dobimo graf G'. Njegovo usmeritev D' dobimo iz $D(G)$ tako, da ne spreminjamo usmeritev povezav iz G, na novo nastale povezave oblike $uv \in G'$ pa usmerimo od u do v. Taka usmeritev je 1-popolna, torej je G' 1-p.u.

(d) Naj bo graf G' dobljen iz 1-p.u. grafa G z dodajanjem simplicialne točke v. Usmeritev D' grafa G' dobimo iz $D(G)$ tako, da ne spreminjamo usmeritev povezav iz G, vse povezave oblike vu pa usmerimo $v \to u$. Množica $N^+_{D(G)}(v)$ je torej klika in G' 1-p.u. graf.

(e) Da je razred 1-p.u. grafov zaprt za operacijo brisanja točke, sledi iz dejstva, da je razred polnih grafov zaprt za operacijo brisanja točke.

(f) Naj bo G 1-p.u. graf in $e = uv$ njegova povezava, ki jo brez škode za splošnost usmerimo kot $u \to v$. Naj bo $G' = G/e$ graf, ki ga dobimo z krčenjem povezave e, in w točka s katero zamenjamo točki u in v.
Definirajmo

$$\begin{aligned}
X &= N_G(u) \setminus N_G(v)\\
Y &= \{x \in N_G(u) \cap N_G(v); (x, v) \in A(D)\}\\
U &= \{x \in N_G(u) \cap N_G(v); (v, x) \in A(D)\}\\
W &= \{x \in N_G(u) \setminus N_G(v); (x, v) \in A(D)\}\\
Z &= \{x \in N_G(u) \setminus N_G(v); (v, x) \in A(D)\}\\
R &= V(G) \setminus (X \cup Y \cup U \cup W \cup Z \cup \{u, v\})
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Definirajmo usmeritev D' grafa G' na naslednji način.

- Vse povezave $e \in E(G')$, ki za krajišče nimajo točke w, usmerimo tako, kot so usmerjene v D.
- Za vse $x \in X$ usmerimo povezavo xw kot $x \to w$.
- Za vse $x \in Y$ usmerimo povezavo xw kot $x \to w$.
- Za vse $x \in U$ usmerimo povezavo xw kot $w \to x$.
- Za vse $x \in W$ usmerimo povezavo xw kot $x \to w$.
- Za vse $x \in Z$ usmerimo povezavo xw kot $w \to x$.

Pokažimo sedaj, da je D' 1-popolna usmeritev grafa G'. To naredimo tako, da za vsak definiran pogoj pokažemo, da za vsako točko $x \in V(G')$ njena izhodna soseščina, tj. $N^+_{D'}(x)$, tvori kliko v grafu G'. Ker je $X \cup Y \cup U \cup W \cup Z \cup \{w\} \cup R$ particija množice točk grafa G', moramo obravnavati sedem primerov, glede na to kateremu delu particije pripada točka x.

1. $x \in X$. V tem primeru je $N^+_{D'}(x) = (N^+_D(x) \setminus \{u\}) \cup \{w\}$. Ker je $(u, v) \in A(D)$ in je D 1-popolna usmeritev grafa G, je $u \in N^+_D(x)$. Ker vemo, da je $N^+_D(x)$ klika, ki vsebuje u, ne vsebuje točk iz $R \cup Z$, torej je $N^+_{D'}(x) = (N^+_D(x) \setminus \{u\}) \cup \{w\}$ klika v grafu G'.

2. $x \in W$. V tem primeru je $v \in N_D^+(x)$. S podobnimi argumenti kot v zgornjem primeru lahko pokažemo, da je $N_{D'}^+(x) = (N_D^+(x) \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ klika v grafu G'.

3. $x \in Z$. V tem primeru sta izhodni soseščini točke x v grafu G in G' enaki, tj. $N_{D'}^+(x) = N_D^+(x)$. Vemo, da je $N_D^+(x)$ klika v G, torej je tudi $N_{D'}^+(x)$ klika v G'.

4. $x \in Y$. V tem primeru imamo dve možnosti, $u \in N_D^+(x)$ ali $u \notin N_D^+(x)$. Poglejmo si najprej primer, ko velja $u \in N_D^+(x)$. Potem je $N_{D'}^+(x) = (N_D^+(x) \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$. Vemo, da je $N_D^+(x)$ klika v grafu G, ki vsebuje točki u in v. Vsaka točka, ki je grafu G' sosednja z w, je v grafu G sosednja ali z v ali z u. V drugem primeru je $N_{D'}^+(x) = (N_D^+(x) \setminus \{v\}) \cup \{w\}$. S podobnimi argumenti kot v predhodnem primeru opazimo, da je tudi ta množica klika v grafu G'.

5. $x \in U$. V tem primeru je $N_{D'}^+(x) = N_D^+(x) \setminus \{u\}$ klika v G, ki ne vsebuje u in v, torej je tudi klika v grafu G'.

6. $x \in R$. Povezave, ki imajo točke vsebovane v R, ne vsebujejo točk u in v, torej bodo povezave, ki vsebujejo x kot krajišče, ohranile enako usmeritev kot v D. Potem velja $N_{D'}^+(x) = N_D^+(x)$ klika v G'.

7. $x = w$. V tem prmeru $N_{D'}^+(x) = N_D^+(v)$, torej je $N_{D'}^+(x)$ klika v grafu G'.

Pokazali smo, da kateremu koli delu disjunktne unije pripada točka x, bo njena izhodna soseščina vedno tvorila kliko, torej je G' 1-p.u. S tem smo zaključili dokaz. □

Dejstvo, da je razred 1-p.u. grafov zaprt za operaciji brisanja točk in krčenja povezav, implicira naslednjo trditev.

Trditev 2.5. *Če je G 1-p.u. in H induciran minor grafa G, potem je tudi H 1-p.u.*

Iz zgornje trditve direktno izpeljemo naslednjo posledico, ki nam bo v pomoč pri kar nekaj dokazih.

Posledica 2.6. *Naj bo G tak graf, da je vsaj eden izmed F_1, F_2, F_3, F_4 induciran minor grafa G. Potem G ni 1-p.u.*

Induciran minor dobimo z zaporedjem brisanja točk in krčenja povezav in po trditvi 2.5 je razred 1-p.u. grafov zaprt za inducirane minorje. Od tod sledi, da obstaja taka množica $\mathcal{F}$ prepovednih induciranih minorjev, s pomočjo katere lahko karakteriziramo 1-p.u. grafe kot natanko tiste grafe G, ki ne vsebujejo nobenega izmed grafov iz množice $\mathcal{F}$ kot induciran minor. Celotne družine prepovednih induciranih minorjev za razred 1-p.u. grafov sicer ne poznamo, sta pa jo delno opisala Hartinger in Milanič v [6].

S spodnjo trditvijo bomo opisali, kdaj je spoj dveh grafov 1-p.u. Opazili bomo, da pomembno vlogo v karakterizaciji igrajo kodvodelni grafi.

Izrek 2.7. *Za vsaka grafa G_1 in G_2 je njun spoj $G_1 * G_2$ 1-p.u. natanko tedaj, ko velja eden od podanih pogojev:*

i) G_1 je poln graf in G_2 je 1-p.u. ali obratno.

ii) G_1in G_2 sta kodvodelna 1-p.u. grafa.

Iz zgornjega izreka sledi naslednja posledica.

Posledica 2.8. *Razred kodvodelnih 1-p.u. grafov je zaprt za spoj.*

Dokaz. Naj bosta G in H poljubna kodvodelna 1-p.u. grafa. Torej sta njuna komplementa $\overline{G}$ in $\overline{H}$ dvodelna grafa. Ker so dvodelni grafi zaprti za operacijo disjunktne unije in je komplement spoja grafa ravno disjunktna unija komplementov, tj. $\overline{\overline{G} + \overline{H}} = \overline{\overline{G}} * \overline{\overline{H}} = G * H$, sledi, da je razred kodvodelnih grafov zaprt za spoj. Po izreku 2.7 je spoj dveh 1-p.u. grafov 1-p.u. □

Za razumevanje spodnjih lem definirajmo še nekaj pojmov. Usmeritev grafa G je *vhodni turnir*, če vhodna soseščina poljubne točke inducira turnir. *Graf krožnih lokov* je presečni graf množice krožnih lokov. Natančneje, vsaka točka predstavlja en krožni lok iz množice, povezava pa je med vsakim parom točk, ki ustrezata lokoma z nepraznim presekom. Graf G je *tetiven graf*, če ima vsak cikel, dolžine vsaj 4, tetivo. *Tetiva* rečemo povezavi e, ki povezuje dve točki cikla C, vendar $e \notin E(C)$.

Naslednje tri leme z dokazi si lahko bralec prebere v članku [1].

Lema 2.9. *Vsak tetiven graf in vsak graf krožnih lokov ima usmeritev, ki je vhodni turnir.*

Lema 2.10. *Vsak graf z natanko enim induciranim ciklom dolžine več kot 3 ima usmeritev, ki je vhodni turnir.*

Lema 2.11. *Povezan graf brez trikotnikov ima usmeritev, ki je vhodni turnir, natanko tedaj ko je enocikličen.*

Opomba 2.12. V zgornjih lemah so obravnavani grafi, ki imajo usmeritev, ki je vhodni turnir. Vendar pa preprost argument z obračanjem usmeritve vseh povezav pokaže, da so grafi, ki imajo usmeritev, ki je vhodni turnir, natanko 1-popolno usmerljivi grafi.

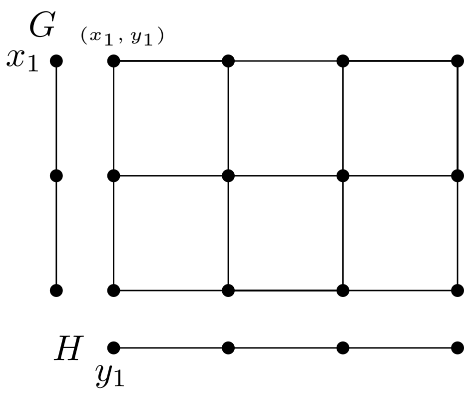
3 1-popolno usmerljivi kartezični produkti grafov

V tem poglavju bomo najprej opisali nekaj lastnosti kartezičnega produkta grafov, nato pa bomo opisali karakterizacijo 1-p.u. grafov, ki jih lahko zapišemo kot kartezični produkt dveh grafov.

Kartezični produkt grafov G in H je graf $G \square H$ z množico točk $V(G) \times V(H)$; različni točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) sta sosednji natanko tedaj, ko velja:

- $x_1 = x_2$ in y_1 je sosed y_2 v grafu H ali
- x_1 je sosed x_2 v grafu G in $y_1 = y_2$

Grafoma G in H rečemo *faktorja* grafa $G \square H$.



Slika 4: Kartezični produkt grafov G in H.

Primer kartezičnega produkta grafov je prikazan na sliki 4. Graf je produkt dveh faktorjev, faktorja $G = P_3$ z množico točk $V(G) = \{x_1, x_2, x_3\}$ in faktorja $H = P_4$ z množico točk $V(H) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Produkt $G \square H$ pa ima za množico točk urejene pare in sicer $V(G\Box H) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\}$.

Lema 3.1. *Kartezični produkt dveh grafov je komutativen, v smislu da velja $G\Box H \cong H\Box G$.*

Dokaz. V kartezičnem produktu $G\Box H$ sta točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) sosednji natanko tedaj ko velja: ($x_1 = x_2$ v grafu G in y_1 je sosed z y_2 v grafu H) ali (x_1 je sosed z x_2 v grafu G in $y_1 = y_2$ v grafu H). V produktu $H\Box G$ pa sta točki (y_1, x_1) in (y_2, x_2) sosednji natanko tedaj, kadar velja: ($y_1 = y_2$ v grafu H in x_1 je sosed z x_2 v grafu G) ali (y_1 je sosed z y_2 v grafu G in $x_1 = x_2$ v grafu G). Opazimo, da je preslikava $f : V(G\Box H) \to V(H\Box G)$, ki slika $(x, y) \mapsto (y, x)$ bijekcija, ki ohranja tako pare sosednjih, kot pare nesosednjih točk torej sta grafa izomorfna. □

Zgornja lema nam pove, da sta grafa $G\Box H$ in $H\Box G$, če zanemarimo poimenovanje točk, enaka. Vendar pa z različnim vrstnim redom operacije dobimo v produktu različna poimenovanja točk.

Poglejmo si še karakterizacijo povezanosti, ki nam bo prav prišla v spodnjem dokazu. Graf G ni povezan, natanko tedaj ko obstaja taka particija množice točk $V(G)$ na dve množici A in B, da nobena povezava iz $E(G)$ ne povezuje točke množice A s točko iz množice B. Graf je povezan, če taka particija ne obstaja.

Lema 3.2. *Produkt $G\Box H$ je povezan natanko tedaj, ko sta oba faktorja povezana.*

Dokaz. Naj bo G nepovezan graf. Torej obstaja taka particija množice točk $V(G)$ na dve množici A in B, da med poljubnima točkama $u \in A$ in $v \in B$ ne obstaja povezava. Torej za vsako točko $y \in V(H)$ točki (u, y) in (v, y) v produktu nista sosednji. In ker to velja za vse $y \in H$, dobimo, da je množica točk produkta $G\Box H$ razdeljena na dva dela $A \times V(H)$ in $B \times V(H)$, med katerima ni povezav. Torej je graf $G\Box H$ nepovezan. Če je H nepovezan, je dokaz podoben.

Za dokaz implikacije v drugo smer predpostavimo, da sta grafa G in H oba povezana in preverimo definicijo povezanosti za produkt $G\Box H$. Naj bosta (x_1, y_1) in (x_2, y_2) poljubni točki v grafu $G\Box H$. Ker je graf G povezan, v njem obstaja x_1, x_2-pot. Sledi, da v produktu obstaja pot od točke (x_1, y_1) do točke (x_2, y_1). Podobno, ker je graf H povezan, v njem obstaja y_1, y_2-pot in v produktu obstaja pot od točke (x_2, y_1) do točke (x_2, y_2). Posledično v produktu obstaja tudi pod od točke (x_1, y_1) do točke (x_2, y_2). Ker to velja za poljubni točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) produkta, sledi, da je produkt $G\Box H$ povezan. □

Natančneje, če so $G_1, \ldots, G_k$ komponente grafa G, in $H_1, \ldots, H_\ell$ komponente grafa H, potem so komponente grafa $G\Box H$ natanko $G_i\Box H_j$ za $i \in \{1, \ldots, k\}$ in $j \in$

$\{1, \ldots, \ell\}$. Pri študiju 1-p.u grafov se zaradi leme 3.2 omejimo le na povezane grafe, zato lahko brez škode za splošnost karakteriziramo netrivialne kartezične produkte 1-p.u grafov le med povezanimi grafi (ekvivalentno, samo med produkti, ki imajo povezane faktorje).

Za več informacij o kartezičnem grafovskem produktu bralcu predlagamo knjigo z naslovom *"Handbook of Product Graphs"* avtorjev Hammacka, Imricha in Klavžarja [4].

Karakterizirajmo sedaj 1-p.u. netrivialne kartezične produkte grafov. Najprej pa definirajmo, kdaj je produkt nerivialen.

Produkt dveh grafov je *netrivialen*, če ima vsak od faktorjev vsaj dve točki.

Izrek 3.3. *Netrivialen kartezični produkt $G\Box H$ dveh povezanih grafov je 1-p.u. natanko tedaj, ko velja $G \cong H \cong K_2$.*

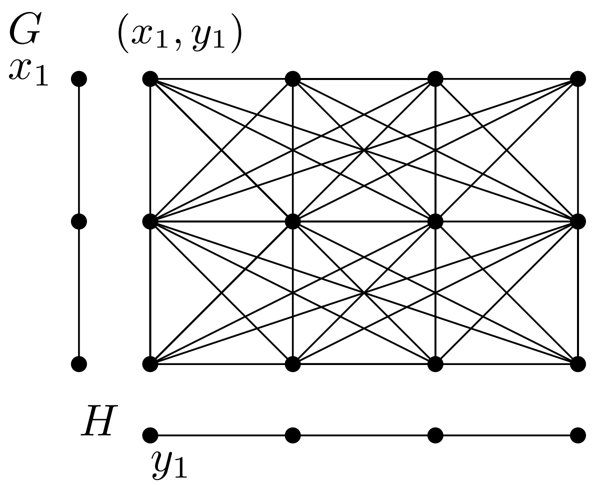
Dokaz. Dokaz je povzet po [7]. Naj bosta grafa G in H izomorfna grafu K_2. Potem je kartezični produkt $G\Box H$ izomorfen C_4. Ker ima C_4 1-popolno usmeritev (ciklična usmeritev), je 1-popolno usmerljiv tudi $G\Box H$.
Za dokaz implikacije v drugo smer predpostavimo, da je graf $G\Box H$ 1-p.u., in naj eden od grafov G ali H, recimo G, ne bo izomorfen K_2. Ker sta tako G kot H inducirana podgrafa grafa $G\Box H$, sta oba 1-p.u. (trditev 2.5). Ker sta oba grafa G in H povezana grafa na vsaj dveh točkah, imata vsak po vsaj eno povezavo. Še več, G vsebuje pot P_3 kot (ne nujno induciran) podgraf. Če G vsebuje induciran P_3, potem $G\Box H$ vsebuje kot induciran podgraf F_1 in po posledici 2.6 ni 1-p.u. Če pa G vsebuje induciran K_3, potem $G\Box H$ vsebuje inducirano kopijo F_3 in po posledici 2.6 ni 1-p.u. V obeh primerih pridemo do protislovja. $\Box$

4 1-popolno usmerljivi leksikografski produkti grafov

V tem poglavju bomo karakterizirali netrivialne leksikografske produkte, ki so 1-p.u. Začnimo najprej z definicijo in nekaj osnovnimi lastnostmi leksikografskega produkta.

Leksikografski produkt grafov G in H je graf, ki ga označimo z $G[H]$ in ima za množico točk $V(G) \times V(H)$; dve različni točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) sta sosednji natanko tedaj, ko velja eden od naslednjih pogojev:

- $x_1 = x_2$ in y_1 je sosed y_2 v grafu H,
- x_1 je sosed x_2 v grafu G.

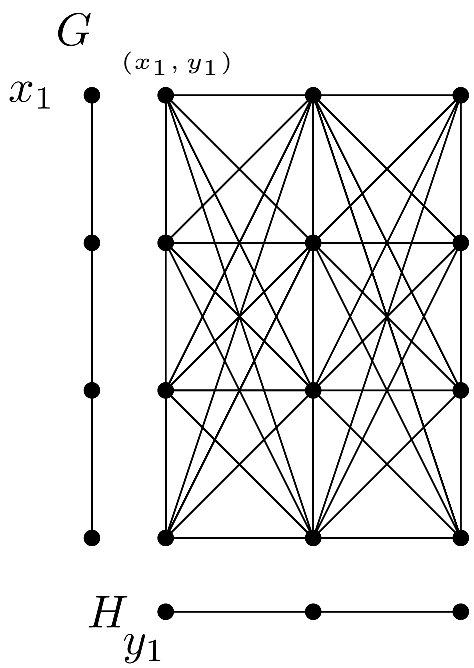


Slika 5: Leksikografski produkt grafov G in H.

Primer leksikografskega produkta je prikazan na sliki 5. Graf $G[H]$ je leksikografski produkt grafa G z grafom H, kjer je graf G pot na treh in H pot na štirih točkah.

Leksikografski produkt ni komutativen, kar pomeni, da v splošnem $G[H] \ncong H[G]$ (glej primer 4.1)

Primer 4.1. Naj bo $G = P_3$ in $H = P_4$ kot na zgornji sliki (slika 5). Poglejmo kako izgleda graf dobljen z produktom G leksikografsko H. Vidimo (slika 6), da z zamenjavo vrstnega reda operacije dobimo graf $H[G]$, ki ni izomorfen $G[H]$



Slika 6: Leksikografski produkt grafov H in G.

Dokaz naslednje leme bralec lahko najde v knjigi [4].

Lema 4.2. *Leksikografski produkt $G[H]$ dveh netrivialnih grafov je povezan natanko tedaj, kadar je G povezan.*

Natančneje, če ima graf G komponente $G_1, \ldots, G_n$, potem ima leksikografski produkt $G[H]$ komponente $G_1[H], \ldots, G_n[H]$. Zato se pri proučevanju leksikografskih produktov, ki so 1-p.u., brez škode za splošnost lahko omejimo le na primere produktov $G[H]$, kjer je G povezan.

Za več informacij o leksikografskem grafovskem produktu bralcu predlagamo knjigo [4].

Karakterizirajmo sedaj 1-p.u. netrivialne leksikografske produkte grafov.

Izrek 4.3. *Netrivialen leksikografski produkt $G[H]$ dveh grafov G in H, kjer je G povezan, je 1-p.u. natanko tedaj, ko drži eden od spodnjih pogojev:*

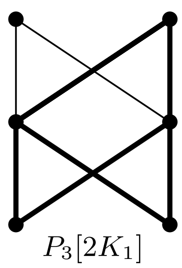
i) G je 1-p.u. in H je poln graf.

ii) G je poln in H je kodvodelen 1-p.u. graf.

Dokaz. Dokaz je povzet po [7]. Predpostavimo najprej, da je $G[H]$ 1-p.u. Ker sta G in H inducirana podgrafa grafa $G[H]$, vemo, da sta oba 1-p.u. Predpostavimo, da noben od pogojev i) in ii) ne drži in pokažimo, da pridemo do protislovja. Ker je G netrivialen in povezan, vemo, da ima vsaj eno povezavo. In ker smo predpostavili, da pogoj i) ne drži, H ni poln graf. Sklepamo, da je $K_2[H]$ induciran podgraf $G[H]$, izomorfen spoju dveh kopij H. Ker vemo, da je $G[H]$ 1-p.u. in je $H * H$ izomorfen nekem njegovemu induciranemu podgrafu, sledi da je tudi $H*H$ 1-p.u. Po izreku 2.7 je H kodvodelen. Ker smo predpostavili, da pogoj ii) ne drži, G ni poln graf. Natančneje, obstaja inducirana pot P_3 v G. Ker vemo, da H vsebuje inducirano kopijo $2K_1$ in, da je $P_3[2K_1] \cong K_{2,4}$ (glej sliko 7) po posledici 2.6 graf $G[H]$ ne more biti 1-p.u., kar je protislovje.

Za dokaz v drugo smer bomo pokazali, da je v obeh primerih i) in ii) graf $G[H]$ 1-p.u. Predpostavimo najprej, da je H poln. Potem je $G[H]$ izomorfen grafu, ki ga dobimo z zaporedno substitucijo točk grafa G z grafom H. Ker je substitucija točke v s polnim grafom ekvivalentna dodajanju pravih dvojčkov točki v, in ker je po lemi 2.4 razred 1-p.u. grafov zaprt za operacijo dodajanja pravih dvojčkov in je H 1.p.u., sledi, da je $G[H]$ 1.p.u.

Sedaj predpostavimo, da je G poln in naj bo H poljuben 1-p.u. kodvodelen graf. Z indukcijo po n bomo pokazali, da je $K_n[H]$ 1-p.u. kodvodelen graf. Za $n = 1$ je $K_1[H] \cong H$, torej je $K_1[H]$ 1-p.u. in kodvodelen. Naj bo $n > 1$ in predpostavimo, da je $K_{n-1}[H]$ 1-p.u. in kodvodelen. Označimo ga z G'. Ker je $K_n[H] \cong G' * H$, kjer je G' 1-p.u. in H 1-p.u. in kodvodelen, in vemo, da je razred 1-p.u. grafov zaprt za spoj, sledi, po izreku 2.7, da je $K_n[H]$ kodvodelen in 1-p.u. □



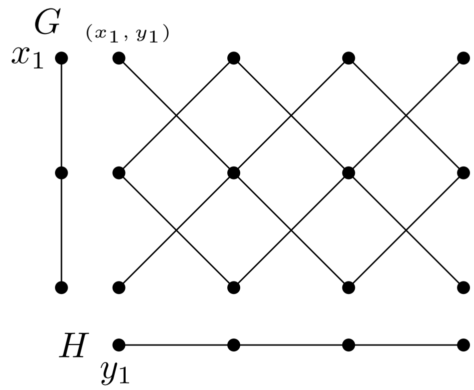
Slika 7: Graf $P_3[2K_1]$ in v njem inducirana kopija $K_{2,3}$.

5 1-popolno usmerljivi direktni produkti grafov

5.1 Osnovne lastnosti direktnega produkta grafov

Naj bosta G in H grafa. *Direktni produkt* grafov G in H je graf $G \times H$ z množico točk $V(G) \times V(H)$, v katerem sta dve točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) sosednji natanko tedaj, ko:

- sta točki x_1 in x_2 sosednji v grafu G in
- y_1 in y_2 sosednji v grafu H.



Slika 8: Direktni produkt grafov G in H.

Primer direktnega produkta je prikazan na sliki 8. Graf je direktni produkt grafov G in H, kjer je G pot na treh in H je pot na štirih točkah. Opazimo lahko tudi, da je $G \times H$ dvodelen in nepovezan.

Direktni produkt dveh grafov je komutativen v smislu, da velja $G \times H \cong H \times G$. Če je produkt $G \times H$ povezan, potem sta G in H povezana grafa in vsaj eden izmed njiju ni dvodelen. Obrat v splošnem ne velja. Natančneje, če so $G_1, \dots, G_k$ komponente grafa G, in $H_1, \dots, H_\ell$ komponente grafa H, potem je $G \times H$ disjunktna unija produktov komponent $G_i \times H_j$ za $i \in \{1, \dots, k\}$ in $j \in \{1, \dots, \ell\}$ [3]. Zato se bomo pri karakterizaciji 1-popolno usmerljivih direktnih grafovskih produktih brez škode za splošnost omejili le na primere netrivialnih produktov, v katerih sta oba faktorja pveznana.

Za več informacij o direktnem grafovskem produktu bralcu predlagamo knjigo [4].

Graf G je *brez trikotnikov*, če je C_3-prost. Graf je *psevdogozd*, če vsaka njegova komponenta vsebuje največ en cikel in *psevdodrevo*, če je povezan psevdogozd. Grafu G rečemo, da je *enocikličen,* če vsebuje vsebuje natanko en cikel.

Izrek 5.1 (Weichselov izrek, glej [4]). *Naj bosta G in H povezana netrivialna grafa. Če eden izmed grafov G ali H vsebuje lih cikel, potem je direktni produkt $G \times H$ povezan. Če sta tako G kot H dvodelna, potem ima direktni produkt $G \times H$ natanko dve komponenti.*

5.2 Karakterizacija 1-popolno usmerljivih direktnih produktov grafov

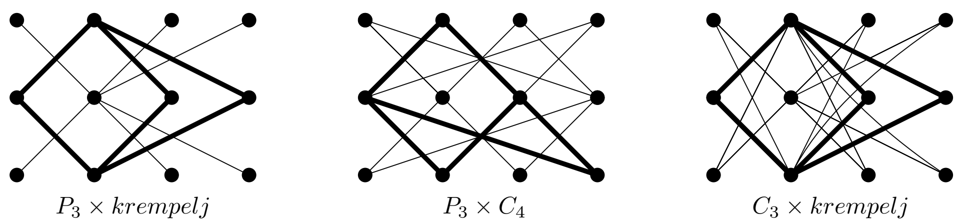
Začeli bomo z pogojem, ki je potreben, da je direkten produkt dveh grafov 1-p.u.

Lema 5.2. *Naj bo direktni produkt dveh povezanih grafov G in H 1-p.u. Potem velja:*

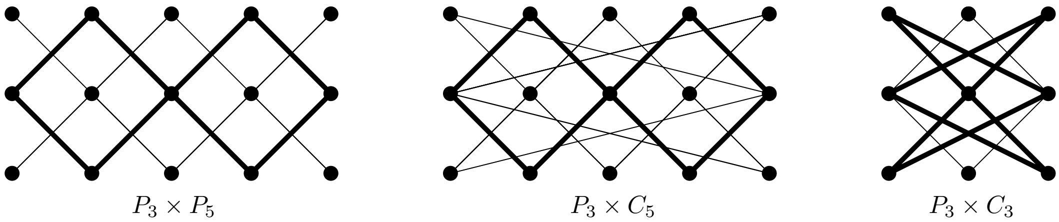
(i) Če eden od grafov G ali H vsebuje induciran P_3 ali C_3, potem je drugi $\{krempelj, C_3, C_4, C_5, P_5\}$-prost.

(ii) Vsaj eden od grafov G ali H je brez trikotnikov.

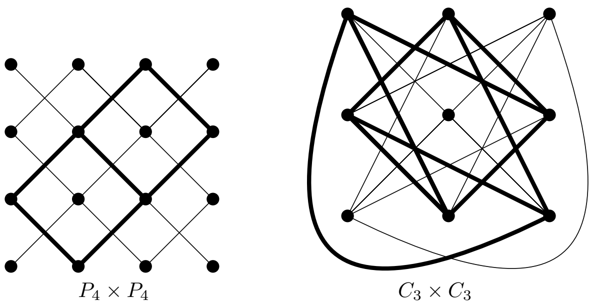
(iii) Vsaj eden od grafov G ali H je P_4-prost.



Slika 9: $K_{2,3}$ kot induciran podgraf grafov $P_3 \times krempelj, P_3 \times C_4, C_3 \times krempelj$.



Slika 10: F_2 kot induciran podgraf grafov $P_3 \times P_5, P_3 \times C_5, P_3 \times C_3$.



Slika 11: F_1 kot induciran podgraf grafa $P_4 \times P_4$ in F_3 kot induciran podgraf grafa $C_3 \times C_3$.

Dokaz. Na sliki 9 lahko vidimo, da grafi $P_3 \times krempelj, P_3 \times C_4, C_3 \times krempelj$ vsebujejo $K_{2,3}$ kot induciran podgraf in zato po lemi 2.2 niso 1-p.u. Podobno lahko vidimo (slika 10), da grafi $P_3 \times P_5, P_3 \times C_5, P_3 \times C_3$ vsebujejo F_2 kot induciran podgraf, iz slike 11 pa lahko vidimo da je F_1 induciran podgraf grafa $P_4 \times P_4$ in F_3 induciran podgraf grafa $C_3 \times C_3$. Vsak od grafov $C_3 \times C_4, C_3 \times C_5, C_3 \times P_5$ vsebuje kot induciran podgraf graf $C_3 \times P_3 \cong P_3 \times C_3$ in torej vsebuje induciran F_2. Po lemi 2.2 tako nobeden od zgornjih grafov ni 1-p.u. □

Trditev 5.3. *Netrivialen direktni produkt dveh povezanih grafov G in H je 1-p.u. natanko tedaj, ko drži ena od spodnjih trditev:*

(i) En faktor je izomorfen K_2, drugi faktor je psevdodrevo.

(ii) En faktor je izomorfen P_3, drugi faktor je izomorfen P_3 ali P_4.

Dokaz. Dokaz je povzet po [7]. Najprej bomo pokazali, da sta (i) in (ii) zadostna pogoja, da je produkt $G \times H$ 1-p.u. Iz lem 2.9, 2.10 in 2.11 sledi, da je vsak tetiven graf z enolično določenim ciklom dolžine vsaj 4 1-p.u. Od tod sledi, da je vsak psevdogozd 1-p.u. Predpostavimo najprej, da je $G \cong K_2$ in H psevdodrevo. Če je H dvodelen, potem je $K_2 \times H$ izomorfen psevdogozdu $2H$, ki pa je 1-p.u. Če H ni dvodelen, potem je enocikličen, kar pomeni, da je $K_2 \times H$ zopet enocikličen in zato 1-p.u. Naj bo $P_3 \times P_4$ izomorfen $2F$. Graf F je enocikličen in zato 1-p.u. Sledi, da je tudi $P_3 \times P_3$ 1-p.u.

Da pokažemo potrebnost, predpostavimo, da je graf $G \times H$ 1-p.u. Obravnavali bomo dva primera, enega, ko je eden izmed faktorjev izomorfen K_2, in drugi primer, ko ni. Naj bo $G \cong K_2$. Potem je $K_2 \times H$ graf brez trikotnikov. Iz leme 2.11 sledi, da je $K_2 \times H$ psevdogozd. Če je H dvodelen, potem je $K_2 \times H$ izomorfen grafu $2H$. Torej je graf H povezan 1-p.u. dvodelen graf in mora biti po lemi 2.11 psevdodrevo. Če pa graf H ni dvodelen, potem je $K_2 \times H$ povezan in zato izreku 5.1 psevdodrevo. Opazimo, da mora biti v tem primeru H enocikličen in posledično psevdodrevo. Če bi imel H cikel $(v_1, \ldots, v_k)$ lihe dolžine, potem bi imel graf $K_2 \times H$ cikel dolžine $2k$, sestavljen kot $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_1, v_3), \ldots, (u_1, v_k), (u_2, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_3), \ldots, (u_2, v_k)$, kjer sta u_1 in u_1 točki faktorja K_2. Torej, če bi imel H več kot en cikel, potem bi tudi $K_2 \times H$ imel več kot en cikel, kar pa vemo, da se ne more zgoditi.
Poglejmo sedaj primer, v katerem imata oba faktorja vsaj tri točke. Po lemi 5.2 je vsaj eden od faktorjev brez trikotnikov. Brez škode za splošnost naj bo to G. Ker ima G vsaj tri točke, vsebuje inducirano pot P_3. Po lemi 5.2 vemo, da je H $\{$krempelj, $C_3, C_4, C_5, P_5\}$-prost. Lastnost da je graf $\{$krempelj, $C_3\}$-prost, pomeni, da je njegova največja stopnja 2, torej da je graf H pot ali cikel. In ker $\{C_4, C_5, P_5\}$- prost in vemo da imata faktorja vsaj tri točke, $H \ncong P_2$, $H \ncong P_1$, mora biti graf H pot s tremi ali štirimi točkami. Če je $H \cong P_4$, potem je po lemi 5.2 graf G P_4-prost, in ker vemo, da vsebuje P_3, je torej $G \cong P_3$. Če pa je $H \cong P_3$, z uporabo istega argumenta dobimo, da je $G \cong P_3$ ali $G \cong P_4$. Dokaz izreka je s tem zaključen. □

6 1-popolno usmerljivi krepki produkti grafov

V tem poglavju bomo karakterizirali 1-p.u. grafe, ki so netrivialni produkti glede na krepki produkt grafov. Kot glavna literatura nam bo služil članek Hartingerjeve in Milaniča [7], po katerem so povzeti tudi dokazi. Poglejmo si najprej nekaj lastnosti krepkih produktov grafov.

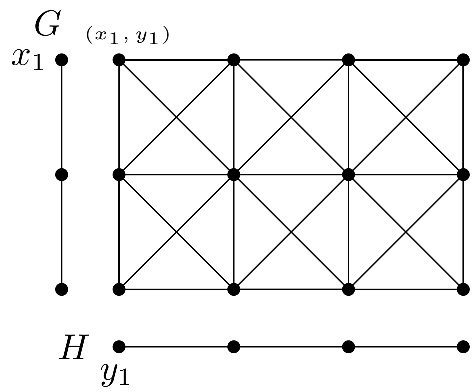
6.1 Osnovne lastnosti krepkega produkta grafov

Naj bosta G in H grafa. *Krepki produkt* grafov G in H je graf $G \boxtimes H$ z množico točk $V(G) \times V(H)$, v katerem sta dve točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) sosednji natanko tedaj, ko je izpolnjen eden od naslednjih pogojev:

(i) $x_1 = x_2$ in y_1 je sosed y_2 v grafu H ali

(ii) $y_1 = y_2$ in x_1 je sosed x_2 v grafu G ali

(iii) x_1 je sosed x_2 v grafu G in y_1 je sosed y_2 v grafu H.



Slika 12: Krepki produkt grafov G in H.

Primer krepkega produkta je prikazan na sliki 12. Graf je krepki produkt grafa G, ki je pot na treh točkah, in grafa H, ki je pot na štirih točkah.

Opazimo, da je dejstvo, da eden izmed pogojev (i), (ii), (iii) drži, ekvivalentno pogoju $x_2 \in N_G[x_1]$ in $y_2 \in N_H[y_1]$, kar pomeni $(x_2, y_2) \in N_G[x_1] \times N_H[y_1]$. Posledično za vsaki dve točki $x \in V(G)$ in $y \in V(H)$ velja $N_{G\boxtimes H}[(x, y)] = N_G[x] \times N_H[y]$.

Lema 6.1. *Krepki produkt grafov G in H je komutativen v smislu, da velja $G \boxtimes H \cong H \boxtimes G$.*

Lema 6.2. *Krepki produkt $G \boxtimes H$ grafov G in H je povezan natanko tedaj, kadar sta oba faktorja povezana.*

Natančneje, če so $G_1, \ldots, G_k$ komponente grafa G, in $H_1, \ldots H_\ell$ komponente grafa H, potem so komponente grafa $G \boxtimes H$ natanko $G_i \boxtimes H_j$ za $i \in \{1, \ldots, k\}$ in $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ [3]. Zato se bomo pri karakterizaciji 1-popolno usmerljivih krepkih grafovskih produktov brez škode za splošnost omejili le na primere netrivialnih produktov $G\boxtimes H$, v katerih sta oba faktorja pvezanana.

Za več informacij o krepkem grafovskem produktu bralcu predlagamo knjigo [4].

Lema 6.3. *Naj bosta G in H grafa, u simplicialna točka v G in v simplicialna točka v H. Potem je tudi točka (u, v) simplicialna v krepkem produktu $G \boxtimes H$.*

Dokaz. Dovolj je pokazati, da je zaprta soseščina $N_{G\boxtimes H}[(u, v)]$ klika v $G\boxtimes H$. Vemo, da velja $N_{G\boxtimes H}[(u, v)] = N_G[u] \times N_H[v]$. Množica $N_G[u]$ je klika v G (ker je u simplicialna točka). Prav tako je množica $N_H[v]$ klika v H. Ker je krepki produkt dveh polnih grafov poln, je torej tudi $N_{G\boxtimes H}[(u, v)]$ klika, kar pomeni, da je točka (u, v) simplicialna v grafu $G \boxtimes H$. □

Graf je *brez pravih dvojčkov*, če ne vsebuje para pravih dvojčkov. Spodnja lema pokaže, da zadostuje karakterizacija 1-p.u. krepkih produktov grafov, v katerem sta oba faktorja brez pravih dvojčkov.

Lema 6.4. *Naj bosta G in H grafa ter G' graf, dobljen iz grafa G z dodajanjem pravega dvojčka. Potem je krepki produkt $G \boxtimes H$ 1-p.u. natanko tedaj, kadar je tudi $G' \boxtimes H$ 1-p.u.*

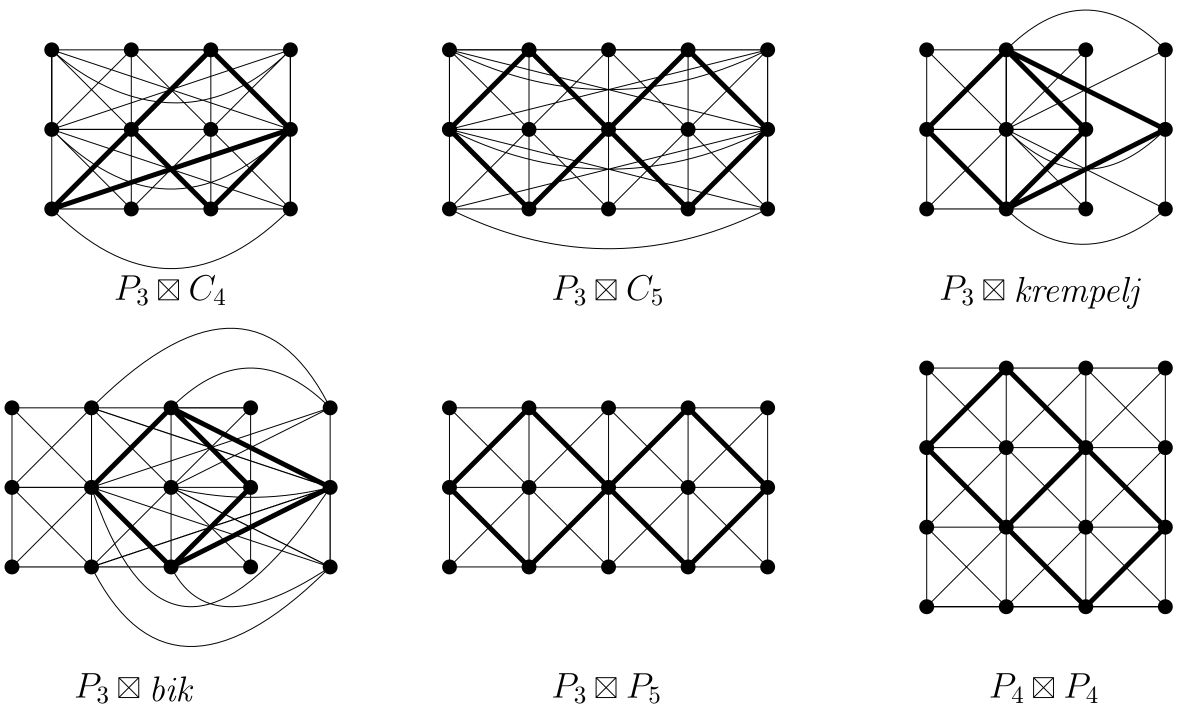
Dokaz. Ker je $G \boxtimes H$ induciran podgraf grafa $G' \boxtimes H$, po trditvi 2.5 velja, da če je graf $G' \boxtimes H$ 1-p.u., potem je tudi $G \boxtimes H$ 1-p.u. Predpostavimo, da je produkt $G \boxtimes H$ 1-p.u. in da je G' dobljen iz grafa G z dodajanjem pravega dvojčka x' točki x v grafu G. Vemo, da za vsak $v \in V(H)$ velja zveza $N_{G'\boxtimes H}[(x, v)] = N_{G'}[x] \times N_H[v]$ in $N_{G'\boxtimes H}[(x', v)] = N_{G'}[x'] \times N_H[v]$. Ker pa je $N_{G'}[x] = N_{G'}[x']$, je vsaka točka oblike (x', v) za $v \in V(H)$ pravi dvojček točke (x, v) v krepkem produktu $G' \boxtimes H$. Od tod sledi, da lahko $G' \boxtimes H$ dobimo iz $G \boxtimes H$ z zaporednim dodajanjem pravih dvojčkov, razred 1.p.u. grafov pa je po lemi 2.4 zaprt za dodajanje pravega dvojčka. □

Potreben pogoj, da je krepki produkt grafov 1-p.u., opišemo z naslednjo lemo.

Lema 6.5. *Naj bo krepki produkt grafov G in H 1-p.u. Potem:*

(1.) Če eden od grafov G ali H vsebuje inducirano kopijo grafa P_3, potem je drugi $\{P_5, C_4, C_5,$ krempelj, bik $\}$-prost.

(2.) Vsaj eden od grafov G ali H je P_4-prost.



Slika 13: Prepovedani inducirani minorji v grafih: $P_3 \boxtimes C_4, P_3 \boxtimes C_5, P_3 \boxtimes krempelj, P_3 \boxtimes bik, P_3 \boxtimes P_5, P_4 \boxtimes P_4$ (od leve proti desni in od zgoraj navzdol).

Dokaz. Iz slike 13 je lepo vidno, da grafi $P_3 \boxtimes C_4, P_3 \boxtimes krempelj, P_3 \boxtimes bik$ vsebujejo F_4 kot induciran podgraf. Grafa $P_3 \boxtimes P_5$ in $P_3 \boxtimes C_5$ kot induciran podgraf vsebujeta F_2 in $P_4 \boxtimes P_4$ kot induciran podgraf vsebuje F_1. Torej po posledici 2.6 nobeden od naštetih grafov ni 1-p.u. □

Zgornja lema motivira razvoj strukturne karakterizacije P_3-prostih in P_4-prostih grafov in $\{P_5, C_4, C_5,$ krempelj, bik $\}$-prostih grafov. Po trditvi 2.1 je graf P_3-prost natanko tedaj, kadar je disjunktna unija polnih grafov, tj. vsaka komponenta grafa G je poln graf. Graf G je P_4-prost, če je vsak induciran podgraf grafa G z vsaj dvema točkama ali nepovezan, ali pa komplement nepovezanega grafa. To so natanko grafi, ki jih dobimo iz kopij grafa K_1 z iterativno uporabo operacij disjunktne unije in spoja (glej npr. [2]).

6.2 Struktura $\{P_5, C_4, C_5,$ krempelj, bik$\}$-prostih grafov

Naša karakterizacija $\{P_5, C_4, C_5,$ krempelj, bik $\}$-prostih grafov bo temeljila na ti. koverižnih grafih. Poglejmo si najprej nekaj osnovnih pojmov. Graf G je *koverižen*, če lahko množico točk razdelimo na taki dve kliki, recimo X in Y, da lahko točke iz X tako uredimo kot $X = \{x_1, \dots x_{|X|}\}$, da za vse $1 \leqslant i < j \leqslant |X|$, velja $N_G[x_i] \subseteq N_G[x_j]$ oziroma ekvivalentno $N_G(x_i) \cap Y \subseteq N_G(x_j) \cap Y$. Takemu paru (X, Y) bomo rekli koverižna particija grafa G.

Lema 6.6 (Hartinger in Milanič [7])**.** *Množica koverižnih grafov je zaprta za operaciji dodajanja pravih dvojčkov in univerzalne točke.*

Trditev 6.7. *Povezan graf G je $\{P_5, C_4, C_5,$ krempelj, bik $\}$-prost natanko tedaj, ko je koverižen.*

Dokaz. Pokazali bomo, da je pogoj potreben in zadosten. Najprej pokažimo zadostnost. Grafi P_5, C_5, krempelj, bik niso kodvodelni grafi, iz česar sledi, da tudi niso koverižni. C_4 ima le eno particijo množice točk v dve kliki, ki pa nima željene lastnosti.

Pokažimo sedaj, da je pogoj tudi potreben . Naj bo graf G povezan, $\{P_5, C_4, C_5,$ krempelj, bik $\}$-prost graf. Pokazali bomo, da je G $3K_1$-prost, iz česar bo sledilo, da je G koverižen. To bomo pokazali s protislovjem. Predpostavimo, da ima G induciran $3K_1$, z množico točk $\{x, y, z\}$. Ker je G povezan in P_5 prost, sta vsaki dve točki izmed $\{x, y, z\}$ na razdalji 2 ali 3.

Predpostavimo najprej $d(x, y) = d(x, z) = 2$. Naj bo y' skupni sosed točke x in y ter z' skupni sosed točk x in z. Ker G ne vsebuje kremplja kot induciranega podgrafa, $y'z \notin E(G)$ ter $z'y \notin E(G)$. Od tod sledi, da $y' \neq z'$. Če točki y' in z' nista sosednji, množica $\{y, y', z, z', x\}$ inducira P_5. Če pa sta točki y' in z' povezani potem množica $\{y, y', z, z', x\}$ inducira kopijo *bika*. Torej sta vsaj dve točki izmed x, y, z na razdalji 3. Predpostavimo $d(x, y) = d(x, z) = 3$. Vemo, da množica točk na razdalji 2 od točke x tvori kliko, sicer bi namreč lahko uporabili isti argument za trojico $\{x, y', z'\}$ kjer sta y', z' nesosednja z $d(x, y') = d(x, z') = 2$. Fiksirajmo dve taki poti P in Q, da je $P = (x = p_0, p_1, p_2, p_3 = y)$ najkrajša x, y-pot in $q = (x = q_0, q_1, q_2, q_3 = z)$ najkrajša x, z-pot. Poti P in Q naj se ujemata v čim več začetnih točkah, to je vrednost $k = k(P, Q) = max\{j : p_i = q_i \text{ za vse } 0 \leq i \leq j\}$ naj bo največja možna. Očitno je $k \in \{0, 1, 2\}$. Če je $k = 2$, potem graf G vsebuje krempelj, induciran na $\{p_1, p_2, y, z\}$. Če je $k = 1$, potem sta p_2 in q_2 sosednji, iz česar sledi, da če je p_2 sosed z z, potem graf G vsebuje krempelj, sicer pa vsebuje *bika*, induciranega z množico točk $V(Q) \cup \{p_2\}$. Torej je edina možnost, da je $k = 0$. Iz pogoja o minimalnosti (P, Q) sledi $\{p_1q_2, p_2q_1, p_2z, yq_2\} \cap E(G) = \emptyset$, vendar v tem primeru G vsebuje *krempelj*, induciran na $\{p_1, p_2, y, q_2\}$. Torej smo prišli do protislovja. □

6.3 Rafti in povezani koverižni grafi brez pravih dvojčkov

V tem poglavju bomo opisali določeno neskončno družino koverižnih grafov, ki jo bomo v naslednjem poglavju uporabili, da bomo z njo opisali neskončno družino 1-p.u. grafov. Najprej pa definirajmo rafte reda n. Naj bo n nenegativno celo število. *Raft reda* n je graf R_n, ki ga sestavljata dve disjunktni kliki, vsaka na $n+1$ točkah, recimo $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ in $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, skupaj s povezavami med X in Y, za katere velja, da je za vsak $0 \leq i, j \leq n$, točka x_i sosednja s točko y_j natanko tedaj, kadar velja $i+j \geq n+1$. Točki x_0 in y_0 sta simplicialni v raftu. Klikama X in Y bomo rekli *dela* rafta.

Kot direktna posledica definicije sledi naslednja trditev.

Posledica 6.8. *Vsak raft R_n je koverižen graf.*

S spodnjo lemo bomo pokazali, da so rafti pomembni pri klasifikaciji povezanih koverižnih grafov bez pravih dvojčkov.

Lema 6.9. *Naj bo G povezan graf brez pravih dvojčkov. Potem je G koverižen natanko tedaj, kadar velja $G \in \{K_1\} \cup \{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$. Še več, če je graf G P_4-prost, potem je G koverižen natanko tedaj, kadar $G \cong K_1$ ali $G \cong P_3$.*

Dokaz. Pokazali bomo, da je pogoj potreben in zadosten. Zadostnost sledi direktno, saj je vsak graf iz množice $\{K_1\} \cup \{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$ koverižen.
Pokažimo sedaj še potrebnost. Naj bo G povezan koverižen graf brez pravih dvojčkov, s koverižno particijo (X, Y). Ker je G graf brez pravih dvojčkov, za soseščine točk v $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{|X|}\}$ velja: $N_G(x_1) \cap Y \subset N_G(x_2) \cap Y \subset \ldots N_G(x_{|X|}) \cap Y$. Ker v množici Y nimamo nobenega para pravih dvojčkov, velja $|N_G(x_{i+1}) \cap Y| = |N_G(x_i) \cap Y| + 1$ za vse $i \in \{1, \ldots, |X| - 1\}$, kar implicira, da so tudi točke v y urejene tako, da je $N_G(y_i) \cap X \subset N_G(y_{i+1}) \cap X$ in $|N_G(y_{i+1}) \cap X| = |N_G(y_i) \cap X| + 1$ za vse $i \in \{1, \ldots, |Y| - 1\}$, kjer $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{|Y|}\}$. Če velja $X = \emptyset$ ali $Y = \emptyset$, potem sta tako X kot Y kliki in je G brez pravih dvojčkov. Torej $G \cong K_1$. Naj bosta sedaj X in Y neprazni množici. Analizirajmo sedaj štiri primere.

1. Če je $N_G(x_1) \cap Y = N_G(y_1) \cap X = \emptyset$, potem, ker je G povezan, velja $|X| = |Y| \geq 2$, in G je izomorfen $R_{|X|-1}$.

2. Če je $N_G(x_1) \cap Y = \emptyset$ in $N_G(y_1) \cap X \neq \emptyset$, potem je $|X| \geq 2$ in če iz grafa G izbrišemo univerzalno točko $x_{|X|}$, dobimo graf, izomorfen $R_{|X|-2}$, torej je $G \cong R_{|X|-2} * K_1$.

3. Če je $N_G(x_1) \cap Y \neq \emptyset$ in $N_G(y_1) \cap X = \emptyset$, je razmislek podoben kot v prejšnjem primeru in dobimo $G \cong R_{|X|-2} * K_1$.

4. Nazadnje, če $N_G(x_1) \cap Y \neq \emptyset$ in $N_G(y_1) \cap X \neq \emptyset$, potem sta obe točki $x_{|X|}$ in $y_{|Y|}$ univerzalni v grafu G. To pa je v protislovju z dejstvom, da je graf ne vsebuje pravih dvojčkov.

Predpostavimo sedaj še, da je G P_4-prost, vendar ni izomorfen ne K_1 in ne P_3. Ker vemo, da velja $R_1 \cong P_4$, vsak raft reda vsaj 1 vsebuje induciran podgraf P_4. Od tod sledi, da je G izomorfen grafu oblike $R_n * K_1$ za nek $n \geq 0$. Ker vemo, da je graf $R_0 * K_1 \cong P_3$, mora biti $n \geq 1$. Vendar v tem primeru graf G vsbuje $R_1 \cong P_4$ kot induciran podgraf. Prišli smo do protislovja in tako zaključili dokaz. □

6.4 Neskončna družina 1-popolno usmerljivih grafov, ki so netrivialni krepki produkti

Kot direktno posledico leme 6.3 opazimo naslednje.

Opazka 6.10. Naj bo G graf s simplicialno točko v in naj bo $P_3 = (u_1, u_2, u_3)$ pot na treh točkah z listoma u_1 in u_3. Potem sta tudi točki (u_1, v) in (u_3, v) simplicialni v grafu $P_3 \boxtimes G$.

Izrek 6.11. *Za vsak $n \geqslant 1$ je krepki produkt $P_3 \boxtimes R_n$ 1-p.u.*

Dokaz. Opazimo, da ima R_n dve simplicialni točki. Iz zgornje opazke sledi, da ima $P_3 \boxtimes R_n$ 4 simplicialne točke. Naj bo G graf $P_3 \boxtimes R_n$. Ker je razred 1-p.u. grafov zaprt za operacijo dodajanja simplicialne točke, je dovolj pokazati, da je G 1-p.u. Izrek bomo dokazali tako, da bomo podali določeno usmeritev grafa G in pokazali, da je 1-popolna.

Naj bo $V(P_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$, kjer sta u_1, u_3 lista. Naj bo $V(R_n) = X \cup Y$ raft teda n in $X = \{x_0, \ldots x_n\}$, $Y = \{y_0, \ldots y_n\}$ njegova dela. Točki iz grafa G bomo rekli *leva*, če bo njena druga koordinata v X, in *desna*, če bo v Y.

Razdelimo sedaj množico točk na 8 klik, in sicer dve, ki vsebujeta le po eno točko $\{a\}$, $\{b\}$, kjer je $a = (u_2, x_0)$ in $b = (u_2, y_0)$, ter 6 klik velikosti n, in sicer $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Definirane so kot: za vse $i \in \{1, 2, 3\}$ je $B_i = \{u_i\} \times (X \setminus \{x_0\})$ in $A_i = \{u_{4-i}\} \times (Y \setminus \{y_0\})$.

Za opis povezav grafa G uporabimo naslednjo notacijo. Povezave označene krepko na sliki bodo pomenile, da so med množicama prisotne vse možne povezave. To so povezave med: $aA_1, aA_2, aA_3, A_1A_2, A_2A_3$, bB_1, bB_2, bB_3, B_1B_2 in B_2B_3. Če na sliki povezava ni označena krepko, pomeni, da je med množicama prisotnih le nekaj povezav. Te bomo opisali kot naslednje. V vsaki izmed 6 klik uvedemo naslednjo linearno razvrstitev točk. Ker je R_n raft, za vsaka $1 \leq i < j \leq n$ velja $N_{R_n}[x_i] \subset N_{R_n}[x_j]$ in $N_{R_n}[y_i] \subset N_{R_n}[y_j]$. Točke v klikah uredimo na naslednji način. V vsaki kliki oblike A_i so točke linearno urejene kot $(u_i, x_1), \ldots, (u_i, x_n)$ in v vsaki kliki oblike B_i kot $(u_{4-i}, y_1,) \ldots, (u_{4-i}, y_n)$. Za lažjo notacijo bomo govorili o "točki i v kliki C", pri čemer bomo imeli v mislih i-to točko v linearni razvrstitvi točk v C, kjer je $C \in \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}$ in $i \in \{1, \ldots n\}$.

Opišimo sedaj povezave grafa G. Rekli bomo da sta kliki A_i in A_j (ali B_i in B_j) sosednji, če velja $|i - j| \leq 1$. Soseščina točke a je $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ in soseščina točke b, je $B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Za vsako točko i v levi kliki, recimo A_j, njeno soseščino v grafu G sestavljajo točka a in vse točke, ki prpadajo neki levi kliki, sosednji z A_j ter točke $\{n - i + 1, \ldots n\}$ iz vsake desne klike, sosednje z B_{4-j}. Podobno, za vsako točko i v desni kliki, recimo B_j, njeno soseščino v grafu G sestavljajo točka b in vse točke, ki pripadajo neki desni kliki sosednji z B_j, ter točke $\{n - i + 1, \ldots n\}$ iz vsake leve klike, sosednje z A_{4-j}.

Usmeritev grafa G, recimo ji D, definiramo na naslednji način:

- Povezave med točko a in točko $i \in A_j$ so usmerjene od i proti a za $j = 1$ in od a proti i za $j \in \{2, 3\}$. Simetrično, povezave med točko b in točki $i \in B_j$ so usmerjene od i proti b za $j = 1$ in od b proti i za $j \in \{2, 3\}$.

- Povezave znotraj vsake klike so usmerjene od točke i proti j $(i \neq j)$ natanko tedaj, ko velja $i < j$.

- Vse povezave med točkami iz A_1 in A_2 so usmerjene od A_1 proti A_2. Simetrično, vse povezave med točkami iz B_1 in B_2 so usmerjene od B_1 proti B_2.

- Povezave med točkami iz A_2 in A_3 so usmerjene na sledeč način: Za $i \in A_2$ in $j \in A_3$ od i do j, če $i < j$, in od j do i, če $i > j$. Simetrično so povezave med točkami iz B_2 in B_3 usmerjene na sledeč način: Za $i \in B_2$ in $j \in B_3$ od i do j, če $i < j$, in od j do i, če $i > j$.

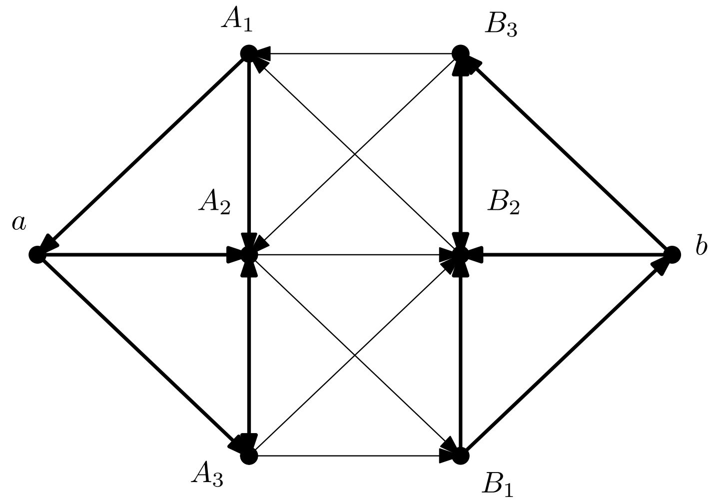
- Vse povezave med točkami iz A_1 in B_3 so usmerjene od B_3 proti A_1. Simetrično so vse povezave med točkami iz A_3 in B_1 usmerjene od A_3 proti B_1.

- Vse povezave med točkami iz A_1 in B_2 so usmerjene od B_2 proti A_1. Simetrično so vse povezave med točkami iz A_1 in B_2 usmerjene od A_2 proti B_1.

- Vse povezave med točkami iz A_2 in B_3 so usmerjene od B_3 proti A_2. Simetrično so vse povezave med točkami iz A_3 in B_2 usmerjene od A_3 proti B_2.

- Vse povezave med točkami iz A_2 in B_2 so usmerjene od A_2 proti B_2.

Usmeritev povezav grafa G je prikazana na sliki 14. Usmerjena povezava med dvema klikama pomeni, da imajo vse prisotne povezave enako, nakazano usmeritev. Povezavi, ki sta usmerjeni v obe smeri, pa pomenita, da so med klikama prisotne povezave, ki so lahko usmerjene tako v eno kot v drugo smer.



Slika 14: Grafični prikaz grafa G.

Da zaključimo dokaz, moramo le še pokazati, da je D 1-popolna usmeritev grafa G, tj. za vsako točko $v \in V(G)$ velja, da njena izhodna soseščina v D tvori kliko v G. Glede na to kateremu delu particije pripada v, upoštevamo več primerov:

1.) $v \in \{a, b\}$. Izhodna soseščina točke je a, $N_D^+(a) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, in tvori kliko. Simetrično, $N_D^+(b) = B_2 \cup B_3$ tvori kliko v G.

2.) $v \in A_1 \cup B_1$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo $v \in A_1$, naj bo $v = i$. Potem $N_D^+(i) = \{a\} \cup \{j \in A_1, j > i\} \cup A_2$, kar tvori kliko v G.

3.) $v \in A_2$, naj bo $v = i$. Potem je $N_D^+(a) = A \cup B$, kjer je $A = \{j \in A_2 \cup A_3, j > i\}$ in $B = \{k \in B_1 \cup B_2, k > n - i\}$. Vemo, da sta A in B kliki v grafu G. Še več, če $j \in A$ in $k \in B$, potem velja $j + k > i + (n - i) = n$, kar pomeni, da sta j in k sosednji v G. Torej je $N_D^+(i)$ klika v G.

4.) $v \in A_3 \cup B_3$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo $v \in A_3$. Naj velja $v = i$. $N_D^+(i) = A \cup B$, kjer velja, $A = \{j \in A_2, j \geq i\} \cup \{j \in A_3, j > i\}$ in $B = \{k \in B_1 \cup B_2, k > n - i\}$. Podobno kot v prejšnjem primeru velja, da sta A in B kliki v grafu G. Še več, če $j \in A$ in $k \in B$, potem velja $j + k \geq i + (n - i) = n + 1$, kar pomeni, da sta j in k sosednji v G. Torej je $N_D^+(i)$ klika v G.

5.) $v \in B_2$ in naj velja $v = i$. Potem $N_D^+(i) = A \cup B$, kjer velja $A = \{j \in A_1, j > n - i\}$ in $B = \{k \in B_2 \cup B_3, k > i\}$. Podobno kot v prejšnjih dveh primerih velja, da sta A in B kliki v grafu G. Še več, če $j \in A$ in $k \in B$, potem velja $j + k > (n - i) + i = n$, kar pomeni, da sta j in k sosednji v G. Torej je $N_D^+(i)$ klika v G.

Dokazali smo torej, da je graf G 1-p.u. □

Za vse $n \geq 0$ je graf $R_n * K_1$ je izomorfen induciranemu podgrafu R_{n+2} . Izrek 6.11 z dejstvom, da je družina 1-p.u. grafov zaprta za operacijo induciranih podgrafov, implicira naslednjo posledico.

Posledica 6.12 (Hartinger in Milanič [7]). *Za vsak $n \geq 0$, je krepki produkt $P_3 \boxtimes (R_n * K_1)$ 1-p.u.*

6.5 Karakterizacija 1-popolno usmerljivih krepkih produktov grafov

Najprej bomo opisali netrivialne 1-p.u. krepke produkte povezanih grafov, ki so brez pravih dvojčkov.

Lema 6.13. *Netrivialni krepki produkt, $G \boxtimes H$, dveh povezanih grafov brez pravih dvojčkov G in H je 1-p.u. natanko tedaj, kadar je eden od grafov izomorfen P_3 in drugi pripada $\{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $G \cong P_3$ in $H \in \{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$. Krepki produkt $G \boxtimes H$ je po izreku 6.11 in posledici 6.12 1-p.u.

Pokažimo sedaj še implikacijo v obratno smer. Ker sta faktorja G in H brez pravih dvojčkov lahko predpostavimo, da je produkt $G \boxtimes H$ 1-p.u. graf, brez pravih dvojčkov. Če je eden od faktorjev P_3-prost, bi to zaradi povezanosti pomenilo, da je graf poln in posledično vsebuje par pravih dvojčkov, kar pa je v protislovju z predpostavko. Torej oba faktorja G in H vsebujeta P_3 kot induciran podgraf. Po točki (1.)leme 6.5 velja, da sta oba G in H $\{P_5, C_4, C_5$, krempelj, bik $\}$-prosta. Še več, po izreku 6.7 sta oba faktorja koverižna, in po lemi 6.9 oba pripadata množici $\{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$. Po točki (2.) leme 6.5 je vsaj eden od G ali H P_4-prost, in po lemi 6.9 izomorfen P_3. S tem smo pokazali, da je eden izmed faktorjev izomorfen P_3, drugi pa pripada množici $\{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$, in s tem zaključili dokaz. □

Preden opišemo 1-p.u. krepke produkte dveh grafov, definirajmo še pojem 2-polnega grafa in nekaj lastnosti, ki jih bomo potrebovali pri opisu.

Graf je *2-poln*, če je sestavljen iz uniije dveh, ne nujno disjunktnih polnih grafov, ki imata vsaj eno skupno točko. *Redukcija pravih dvojčkov* grafa G je poljuben največji induciran podgraf grafa G, ki ne vsebuje pravih dvojčkov.

Lema 6.14 (Hartinger in Milanič [7])**.** *Graf G je 2-poln natanko tedaj, kadar ga lahko dobimo iz grafa K_1 ali P_3 z zaporedjem dodajanja pravega dvojčka.*

Izrek 6.15. *Netrivialen krepki produkt, $G \boxtimes H$, dveh povezanih grafov G in H je 1-p.u. natanko tedaj kadar velja eden od spodnjih pogojev.*

1. *Eden izmed faktorjev G ali H je 1-p.u., drugi pa je poln graf.*
2. *Eden izmed faktorev G ali H je koveržen in drugi je 2-poln.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $G \boxtimes H$ 1-p.u. graf ter G in H njegova netrivialna povezana faktorja. Potem sta G in H oba 1-p.u. Predpostavimo, da noben izmed faktorjev ni poln, saj bi bil sicer izponjen pogoj 1. Naj bo G' graf dobljen z redukcijo pravih dvojčkov grafa G in H' graf dobljen z redukcijo pravih dvojčkov grafa H. Ker sta G' in H' grafa brez pravih dvojčkov in je $G' \boxtimes H'$ induciran podgraf grafa $G \boxtimes H$, je graf $G' \boxtimes H'$ 1-p.u. Po lemi 6.13 je eden izmed G ali H izomorfen P_3, drugi pa pripada množici $\{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$. Brez škode za splošnost naj bo $H' \cong P_3$ in $G' \in \{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$. Po lemi 6.9 je graf G' koveržen. Ker G dobimo iz G' z zaporedjem dodajanja pravih dvojčkov in ker je G' koveržen, je po lemi 6.6 koveržen tudi graf G. Ker je H' graf dobljen z redukcijo pravih dvojčkov grafa H, mora biti izomorfen P_3, in po lemi 6.14 sledi, da je H 2-poln. Torej pogoj 2 drži.

Pokažimo sedaj še, da sta pogoja 1 in 2 tudi zadostna. Naj bo G 1-p.u. in H poln graf. Vemo, da lahko produkt $G \boxtimes H$ dobimo z zaporedjem dodajanja pravih dvojčkov točkam grafa G. Ker je operacija dodajanja pravih dvojčkov zaprta za 1-p.u. grafe (lema 2.4), je $G \boxtimes H$ 1-p.u.

Za dokaz 2. pogoja naj bo G koveržen in H 2-poln graf. Naj bo G' graf dobljen z redukcijo pravih dvojčkov grafa G, in H' graf dobljen z redukcijo pravih dvojčkov grafa H. Po lemi 6.4 je dovolj pokazati, da je $G' \boxtimes H$ 1-p.u. Po lemi 6.9 vemo, da je G' izomorfen grafu iz množice $\{K_1\} \cup \{R_n, n \geq 1\} \cup \{R_n * K_1, n \geq 0\}$. Ker je H' graf dobljen z redukcijo pravih dvojčkov iz 2-polnega grafa, mora biti po lemi 6.14 H' izomorfen K_1 ali pa P_3. Po izreku 6.11 in dejstvu, da je razred 1-p.u. grafov zaprt za operacijo induciranih podgrafov vemo, da je $G' \boxtimes H'$ 1-p.u. S tem smo pokazali, da je tudi drugi pogoj zadosten, in s tem zaključili dokaz. □

7 Zaključek

V zaključni nalogi smo se seznanili z 1-p.u. produktnimi grafi. Najprej smo si ogledali nekaj splošnih rezultatov 1-p.u. grafov. Spoznali smo operacije, ki ohranjajo razred 1-popolno usmerljivih grafov, nekaj prepovedanih induciranih minorjev in karakterizacijo 1-p.u grafov v terminologiji kličnega pokritja. Za vsakega izmed glavnih štirih produktov, kartezični, leksikografski, direktni in krepki produkt, smo si pogledali nekaj osnovnih lastnosti (radovedni bralec si lahko več prebere v knjigi [4]), nato pa si za vsakega od njih ogledali karakterizacijo 1-p.u. grafov, ki jih lahko zapišemo kot netrivialni produkt dveh grafov.

Spoznali smo, kdaj sta kartezični in leksikografski produkt dveh netrivialnih grafov G in H 1.p.u. Preden smo karakterizirali direktni produkt, smo si ogledali še potreben pogoj, da je direkten produkt dveh grafov 1-p.u.

Prav tako smo si pred karakterizacijo 1-p.u. krepkih produktov pogledali potreben pogoj, da je produkt 1-p.u. Ker karakterizacija temelji na koverižnih grafih, se z njimi seznanimo in opišemo določeno neskončno družino, rafte, ki se izkažejo kot pomembni pri klasifikaciji povezanih koverižnih grafov, brez pravih dvojčkov. Preden karakteriziramo povezani 1-p.u. krepke produkte grafov, opišemo še neskončno družino tovrstnih grafov in netrivialne 1-p.u. krepke produkte povezanih grafov, ki so brez pravih dvojčkov.

V nalogi smo se torej seznanili z delnim rezultatom še vedno odprtega vprašanja strukturne karakterizacije 1-p.u. grafov. Radovedni bralec si lahko več na temo 1-p.u. grafov prebere v članku [6] in doktorski desertaciji Tatiane R. Hartinger [5].

8 Literatura

[1] J. Bang-Jensen, J. Huang in E. Prisner, In-Tournament Digraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 59 (1993) 267–287. *(Citirano na straneh 1 in 10.)*

[2] D.G. Corneil, H. Lerchs in L. Stewart Burlingham, Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981) 163–174. *(Citirano na strani 23.)*

[3] G. Hahn in G. Sabidussi, *Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications.* Springer, 1997. *(Citirano na straneh 17 in 22.)*

[4] R. Hammack,W. Imrich in S. Klavžar, *Handbook of Product Graphs.* CRC Press, 2011. *(Citirano na straneh 13, 15, 18, 22 in 31.)*

[5] T.R. Hartinger, *Nove karakterizacije v strukturni teoriji grafov: 1-popolno usmerljivi grafi, produktni grafi in cena povezanosti*, Doktorska disertacija, Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, 2017. *(Citirano na straneh 1 in 31.)*

[6] T.R. Hartinger in M. Milanič, Partial Characterizations of 1-perfectly Orientable Graphs. *Journal of Graph Theory* 85 (2017) 378-394. *(Citirano na straneh 5, 6, 7, 10 in 31.)*

[7] T.R. Hartinger in M. Milanič, 1-perfectly orientable graphs and graph products. *Discrete Mathematics* 340 (2017) 1727–1737. *(Citirano na straneh 1, 13, 16, 19, 21, 24, 29 in 30.)*

[8] F. Kammer in T. Tholey, Approximation algorithms for intersection graphs. *Algorithmica 68* (2014) 312–336. *(Citirano na strani 1.)*

[9] D.J. Skrien, A relationship between triangulated graphs, comparability graphs, proper interval graphs, proper circular-arc graphs, and nested interval graphs. *Journal of Graph Theory 6* (1982) 309–316. *(Citirano na strani 1.)*