UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Razdaljno - regularni grafi

(Distance - Regular graphs)

Ime in priimek: Jelena Savić
Študijski program: Matematika
Mentor: prof. dr. Štefko Miklavič

Koper, september 2019

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Jelena SAVIĆ

Naslov zaključne naloge: Razdaljno - regularni grafi

Kraj: Koper

Leto: 2019

Število listov: 29 Število slik: 13

Število referenc: 3

Mentor: prof. dr. Štefko Miklavič

Ključne besede: ekvitabilne particije, lastne vrednosti, lastni vektorji, krepko regularni grafi, razdaljno - regularni grafi

Math. Subj. Class. (2010): 05E30

Izvleček:
Zaključna naloga je osredotočena predvsem na grafe; to so urejeni pari množic sestavljeni iz množice vozlišč $V(\Gamma)$ in množice povezav grafa Γ, katero označujemo z $E(\Gamma)$. V samem začetku naloge so predstavljene nekatere osnovne definicije, lastnosti in posebne oblike grafov. Nato sledi pregled osnovnih pojmov iz teorije grup, ki nam skupaj s teorijo grafov omogoči razumevanje particij množice $V(\Gamma)$. Njeni elementi so t.i. celice; to so med seboj disjunktne podmnožice množice $V(\Gamma)$, katerih unija tvori celotno $V(\Gamma)$. Sledi opredelitev ekvitabilnih particij. Particija je ekvitabilna, če za poljubni dve celici velja, da ima vsako vozlišče vsebovano v prvi celici konstantno število sosedov v drugi. Tovrstne particije so tudi predstavljene in obrazložene na različnih primerih, katere skupaj s karakteristično matriko in karakterističnim polinomom povežemo v poglavju o lastnih vrednostih in vektorjih. Nato se še spoznamo s krepko regularnimi grafi. Regularni grafi v katerih za poljubni različni vozlišči v grafu velja, da je število vozlišč, ki so sosednji obema vozliščema, odvisno zgolj od tega ali sta izbrani vozlišči povezani ali ne. Vsa napisana poglavja nas končno pripeljejo do definicije razdalje – regularnih grafov in opisa dveh družin le-teh.

Key words documentation

Name and SURNAME: Jelena SAVIĆ

Title of final project paper: Distance - Regular graphs

Place: Koper

Year: 2019

Number of pages: 29 Number of figures: 13

Number of references: 3

Mentor: Prof. Štefko Miklavič, PhD

Keywords: equitable partition, eigenvalues, eigenvectors, strong regular graphs, distance - regular graphs

Math. Subj. Class. (2010): 05E30

Abstract: The final project is focused especially on graphs; these are ordered pairs of sets consisting of a set of vertices $V(\Gamma)$ and a set of edges of graph Γ that is denoted as $E(\Gamma)$. In the beginning of the project some basic definitions, properties and special forms of graphs are presented, followed by an overview of basic terms from graph theory, that together with group theory allows us to understand the partitions of the set $V(\Gamma)$. The elements of the partition are called cells. These are disjoint subsets of set $V(\Gamma)$ whose union is set $V(\Gamma)$. Next there is a definition of equitable partitions. We call a partition equitable, if for any two cells applies that, every vertex contained in the first cell has the same constant number of neighbours in the other one. This kind of partition are presented and explained on different examples, which we connect together with characteristic matrix and characteristic polynomial in the chapter about eigenvalues and eigenvectors. After that we meet with strongly regular graphs. Those graphs are graphs which are regular, not complete or empty, and for any pair of distinct vertices applies that the number of vertices, which are adjacent to both of them, depends only on whether the selected vertices are adjacent or not. All that chapters take us finally to the definition of distance – regular graphs and description of two families of them.

Zahvala

Najprej bi se iskreno zahvalila mentorju, prof. dr. Štefku Miklaviču za ves trud, potrpežljivost, pomoč in čas, ki mi ga je namenil.
Posebno zahvalo bi namenila tudi svojim dragim staršem, za vso ljubezen in potrpljenje, ki sta mi jo nudila ter vedno stala ob strani v vseh lepih in slabih trenutkih.
Zahvalila bi se tudi sošolcu Kennyu in sošolkam za vso pomoč in podporo.
In najlepša hvala tudi tebi Dario, ker si verjel vame v vseh mojih vzponih in padcih, ter me optimistično spodbujal.

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Seznam kratic

tj.	torej
npr.	na primer
t.j.	to je
oz.	oziroma
t.i.	tako imenovani
an.	angleško

1 Uvod

V sami zaključni nalogi se osredotočimo predvsem na vse ključne segmente, ki bralca vodijo do definicije razdaljno - regularnih grafov.
Torej, vzemimo povezan graf G, poljubni vozlišči grafa u in v, ter izberimo poljubni celi števili i in j. Nato oblikujmo dve množici vozlišč, kateri označimo z A in B. Množico A sestavljajo vozlišča, ki so od vozlišča u oddaljene za razdaljo i, v množici B pa naj bodo vsebovana vozlišča, ki so od vozlišča v oddaljena natanko za razdaljo j. G je razdaljno - regularen, če velja, da je število vozlišč v preseku množic A in B odvisno samo od razdalje med vozliščema u in v, ne pa od izbire vozlišč u in v.
Pot do zgoraj navedene definicije bralcu na samem začetku ponudi obnovitev vseh osnovnih definicij s področja teorije grafov in teorije grup, nato pa se bralec spozna s posebno vrsto particije, ki jo imenujemo ekvitabilna particija. Le-te so kasneje s pomočjo karakterističnih polinomov in matrik povezane z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji.
Četrto poglavje je namenjeno predstavitvi krepko regularnih grafov, oziroma $(n, k; a, c)$-krepko regularnih grafov. Prav tako so parametri n, k, a in c v nadaljevanju obrazloženi in le-ti nas tudi popeljejo do povezave tovrstnih grafov z njihovimi komplementi, ob tem pa pride tudi do ločevanja krepko regularnih grafov na primitivne in neprimitivne.
V samem zaključku zaključne naloge se nahaja poglavje v katerem končno pridemo do zgoraj navedene definicije razdaljno - regularnih grafov. V tem poglavju tudi predstavim dve družini tovrstnih grafov, to so Johnsonovi in Hammingovi grafi.
Osnove teorije grafov in teorije grup so črpane predvsem iz študijskih zapiskov in pa knjig [1] in [2]. Nadaljnje gradivo pa je črpano predvsem iz knjige [3], katero prav tako priporočam za obširnejšo študijo in obravnavo razdaljno - regularnih grafov.

2 Osnovni pojmi

Da bi bilo proučevanje razdaljno - regularnih grafov lažje, so v ta namen v tem poglavju zajete vse potrebne osnovne definicije iz področja teorije grafov.

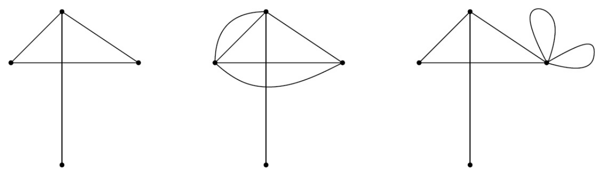
2.1 Teorija grafov

Definicije in rezultati so povzeti predvsem iz [1] in [2].

Graf $G = (V(G), E(G))$ je urejen par množic, katerega sestavljata:

- končna neprazna množica $V(G)$. Elemente množice $V(G)$ imenujemo **točke** ali **vozlišča grafa**, katere označujemo z malimi tiskanimi črkami npr. $a, b, c, \ldots$.
- Množica neurejenih parov vozlišč $E(G)$, katere elemente imenujemo **povezave grafa** in jih označujemo z $e = \{a, b\}$, kjer sta a in b vozlišči grafa.

Množico točk oz. vozlišč grafa včasih označujemo tudi z V in množico povezav z E. Naj bosta v in u vozlišči grafa G. Za povezavi $\{v, u\}$ ali $\{u, v\}$ pravimo, da **povezujeta** vozlišči v in u, in v tem primeru vozlišči v in u imenujemo **krajišči** povezave $\{v, u\}$ oz. $\{u, v\}$. Prav tako pa tudi za vozlišči v in u pravimo, da sta **sosednji** vozlišči, kar označujemo z $u \sim v$. Ker glede na našo definicijo obravnavamo tako imenovane neusmerjene grafe, velja $\{u, v\} = \{v, u\}$.
Dve povezavi ali več povezav, ki povezujejo isti par vozlišč, imenujemo **večkratne povezave**. Povezava, ki povezuje neko vozlišče samo s seboj, je **povratna povezava** ali **zanka**. V splošnem graf brez zank in večkratnih povezav imenujeno tudi **enostavni graf**. V primeru, kjer dopuščamo tovrstne povezave pa govorimo o **multigrafih**. Primer teh je viden na Sliki 1, kjer skrajno levi graf predstavlja enostavni graf, ostala dva pa sta multigrafa.



Slika 1: Primer enostavnega grafa in multigrafa

Katera vozlišča so v grafu sosednja in katera ne, lahko ponazorimo tudi z matriko, katero imenujemo **matrika sosednosti**. Le-ta je sestavljena iz pozitivnih celih števil, ki predstavljajo število povezav med dvema poljubnima vozliščema. V splošnem je definicija sledeča.
Naj bo G enostaven graf z n vozlišči, označenimi z $1, 2, 3, \ldots, n$. Matrika sosednosti $M(G)$ je matrika razsežnosti $n \times n$, katere element v j-tem stolpcu i-te vrstice pove število povezav, ki povezujejo vozlišči i in j.
Prav tako je pri obravnavi in preučevanju grafov pomembna tudi stopnja vozlišča.
Naj bo G enostaven graf in $v \in V(G)$. **Stopnja** oz. **valenca** vozlišča v je število povezav, ki vsebujejo v. Stopnjo vozlišča v običajno označimo z $deg(v)$. Vozlišču stopnje 0 pravimo **izolirano vozlišče**. V primeru, da so vsa vozlišča v grafu stopnje k, potem tak graf imenujemo **k-regularen graf** ali **regularen graf stopnje k**.

Sprehod dolžine k v grafu G je zaporedje k povezav grafa G oblike

$$\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, x\}, \ldots, \{y, z\}.$$

Tak sprehod označimo z $uvwx \ldots yz$ in ga poimenujemo sprehod med vozliščema u in z.
V primeru, da so vse povezave sprehoda različne, potem tak sprehod imenujemo **enostavni sprehod** ali **sled**. Če so v enostavnem sprehodu tudi vsa vozlišča različna, potem sprehod poimenujemo **pot**.

Posebna vrsta sprehoda je tudi t.i. **sklenjen sprehod** ali **obhod**, pri katerem se sprehod začne in konča v istem vozlišču. Le-tega zapišemo kot zaporedje povezav oblike:

$$\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, x\}, \ldots, \{y, z\}, \{z, u\}.$$

V primeru, da so v obhodu vse povezave in hkrati tudi vsa vozlišča različna, razen začetnega in končnega, potem le-temu pravimo **cikel**.

Iskanje poti v grafu ločuje grafe na tiste, ki so 'v enem kosu' in tiste, ki niso. Torej graf G je **povezan**, če obstaja pot med poljubnim parom vozlišč, sicer je **nepovezan**. Slednji graf razpade na več različnih povezanih podgrafov oz. (povezane) **komponente** grafa. Spomnimo se splošne definicije podgrafa, ki pravi:

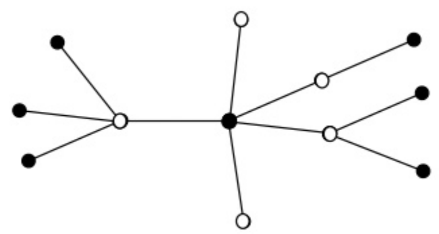
Definicija 2.1. Naj bosta $G = (E(G), V(G))$ in $H = (E(H), V(H))$ grafa. Če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in je vsaka povezava vsebovana v $E(H)$ prav tako vsebovana v $E(G)$, potem pravimo, da je graf H **podgraf** grafa G, kar pa označujemo z $H \subseteq G$.

Med drugim nam iskanje poti v grafu omogoča tudi to, da grafu lahko določimo njegov diameter oz. premer, le-to pa lahko naredimo, če razumemo definicijo razdalje med dvema vozliščema grafa.
Če v grafu G obstaja pot med u in v, potem definiramo **razdaljo** med u in v (oznaka: $d_{G(u,v)}$ ali krajše $d(u, v)$) kot število povezav v najkrajši poti med tema dvema vozliščema. Če v G ne obstaja taka pot, potem je $d(u, v) = \infty$.
Diameter grafa G, katerega označujemo tudi z $diam(G)$, definiramo kot

$$diam(G) = max_{u,v \in V(G)}\{d(u, v)\} = max\{d(u, v); u, v \in V(G)\}.$$

Polni graf je graf, v katerem je vsak par različnih vozlišč povezan z natanko eno povezavo. Poln graf na n vozliščih označimo z K_n. **Prazen graf** pa je graf brez povezav.

Naslednja lastnost grafa je dvodelnost.
Kot **dvodelni graf** pojmujemo graf G, katerega množico vozlišč $V(G)$ lahko razbijemo na dve disjunktni podmnožici A in B, tako da vsaka povezava grafa G povezuje po eno vozlišče iz podmnožice A z enim vozliščem iz podmnožice B.
Ali je graf dvodelen ali ne, najlažje ugotovimo z barvanjem vozlišč tako, da vozlišča množice A ločujemo od vozlišč množice B. Kot primer: vozlišča vsebovana v A pobarvamo s črno, druga pa z belo barvo (glej Sliko 2). V primeru, da je graf dvodelen, potem vsaka povezava povezuje po eno črno in eno belo vozlišče.



Slika 2: Primer dvodelnega grafa

Komplement enostavnega grafa G označujemo z $\overline{G}$. Le-tega sestavlja množica vozlišč, za katero velja $V(\overline{G}) = V(G)$. Različni vozlišči grafa $\overline{G}$ sta povezani natanko tedaj, ko le-ti nista povezani v grafu G.

Naslednji primer grafa, katerega lahko dobimo iz prvotnega grafa, je povezavni graf.

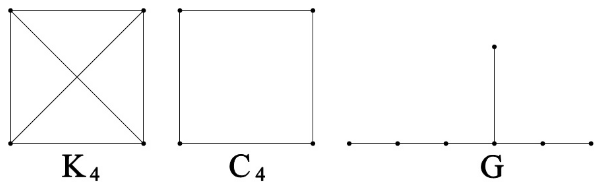
Povezavni graf (an. line graph) neusmerjenega grafa G, ki ga označujemo tudi z $L(G)$, je graf katerega vozlišča so povezave grafa G tj. $V(L(G)) = E(G)$. Velja, da $\{e, f\} \in E(L(G))$ natanko tedaj, ko imata različni povezavi e in f skupno vozlišče v grafu G.

Digraf ali **usmerjen graf** D sestavljata množica elementov, poimenovanih **vozlišča**, in seznam urejenih parov teh elementov, ki jih imenujemo **(usmerjene) povezave**. Če sta u in v vozlišči digrafa D, potem pravimo, da je povezava (u, v) usmerjena od u k v ali povezava (u, v) gre iz u v v. Taki usmerjeni povezavi med drugim pravimo tudi **lok** in v tem primeru se vozlišče u imenuje **glava** in vozlišče v **rep** loka (u, v). Grafa G in H sta **izomorfna**, če obstaja bijektivna preslikava ϕ med množicama $V(G)$ in $V(H)$, tako da velja $u \sim v \Leftrightarrow \phi(u) \sim \phi(v)$ za poljubni vozlišči $u, v \in V(G)$. Če sta grafa izomorfna, potem to označimo z $G \cong H$ in preslikavi ϕ pravimo tudi **izomorfizem** grafov. V primeru, da je graf H enak grafu G, je ϕ bijektivno preslikava grafa v samega sebe, pri čemer se ohranijo vse strukturne značilnosti (t.j. število povezav, število vozlišč in njihove stopnje, ...). V tem primeru tovrstnemu izomorfizmu pravimo **avtomorfizem** grafa. Če vse skupaj poenostavimo, ugotovimo, da je na nek način avtomorfizem simetrija grafa. Matematično povedano:

Definicija 2.2. Avtomorfizem grafa $G = (V, E)$ je permutacija σ množice V pri čemer velja, da je $\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\sigma(u), \sigma(v)\} \in E(G)$.

Torej pri avtomorfizmu gre za ohranitev sosednosti vozlišč in iz teorije o permutacijskih grupah vemo, da velja, da množica vseh avtomorfizmov grafa G skupaj z operacijo kompozituma preslikav tvori grupo, kateri pravimo tudi **grupa avtomorfizmov** grafa G in jo označujemo z $Aut(G)$. Torej je grupa $Aut(G)$ permutacijska grupa, ki deluje na množici vozlišč grafa G. V primeru, da za $\sigma \in Aut(G)$ in $\{u, v\} \in E(G)$ definiramo $\sigma(\{u, v\}) = \{\sigma(u), \sigma(v)\}$, kjer $\{u, v\} \in E(G)$, potem $Aut(G)$ deluje tudi na množici povezav grafa. Če je $|V| = n$, je $Aut(G)$ podgrupa simetrične grupe S_n.

Slika 3 prikazuje tri različne grafe: K_4 (t.j. polni graf na štirih vozliščih), C_4 (t.j. cikel na štirih vozliščih) in poljuben enostavni graf G. Za graf K_4 opazimo, da je vsaka permutacija njegovih vozlišč avtomorfizem, zato velja $Aut(K_4) \cong S_4$. Za graf C_4 je $Aut(C_4) \cong D_4$ (t.j. diederska grupa reda 8), saj so geometrijsko gledano avtomorfizmi ravno različne rotacije in zrcaljenja. Vemo, da mora avtomorfizem grafa ohranjati sosednost vozlišč v grafu in posledično tudi stopnje vozlišč. Iz tega sledi, da ima graf G samo en avtomorfizem tj. identični avtomorfizem id in zatorej $Aut(G) \cong \{id\}$.



Slika 3: Primer grafov z različnimi grupami avtomorfizmov.

Zaradi lastnosti avtomorfizmov (tj. preslikavanje sosednjih vozlišč v sosednja in nesosednjih v nesosednja) je očitno, da velja tudi, da za dani graf G velja $Aut(G) = Aut(\overline{G})$.

2.2 Teorija grup

Za razumevanje nadaljnje vsebine je med drugim potrebno tudi nekaj znanja teorije grup, pri čemer se bomo osredotočili predvsem na delovanja le-teh. Definicije so povzete predvsem iz študijske literature predmeta permutacijske grupe.

Definicija 2.3. **Grupa** $(\Gamma, *)$ je množica Γ skupaj z operacijo $*$ na Γ, ki zadošča naslednjim aksiomom:

- zaprtost: za vse $a, b \in \Gamma$ velja $a * b \in \Gamma$;
- asociativnost: za vse $a, b, c \in \Gamma$ velja $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- nevtralni element: obstaja tak element $e \in \Gamma$, da za vsak element $a \in \Gamma$ velja $e * a = a * e = a$;
- inverzni element: za vsak element $a \in \Gamma$ obstaja $a' \in \Gamma$, za keterega velja: $a * a' = a' * a = e$.

Če za binarno operacijo $*$ velja še, da je komutativna, tj. za poljubna $a, b \in \Gamma$ velja $a * b = b * a$, pravimo, da je grupa **abelska** oziroma **komutativna**.

Preden si ogledamo primer grupe, se spomnimo naslednje definicije.

Definicija 2.4. **Permutacija** končne množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ je bijektivna preslikava, ki slika nazaj v množico $\{1, 2, \ldots, n\}$

Množico vseh permutacij na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$ označujemo kot S_n. Množica S_n skupaj z operacijo kompozituma $\circ$ tvori grupo.

Definicija 2.5. Če množica $\Delta \subseteq \Gamma$ tvori grupo skupaj z operacijo $*$, potem pravimo, da je Δ **podgrupa** grupe Γ. Oznaka: $\Delta \leq \Gamma$.

Definicija 2.6. Delovanje grupe Γ na neprazni množici X je preslikava $X \times \Gamma \mapsto X$ oz. $(x, g) \mapsto x^g$ (označimo tudi kot $g(x)$), ki zadošča naslednjima pogojema:

- $x^e = x$ za $\forall x \in X$,
- $x^{gh} = (x^g)^h$ za $\forall x \in X$ in $\forall g, h \in \Gamma$.

Ne pozabimo omeniti, da ločujemo med desnim in levim delovanjem grup, a v našem kontekstu to ni ključnega pomena. Zgoraj je navedena definicija desnega delovanja. Ključni pri delovanju sta definiciji orbite in stabilizatorja.

Naj grupa Γ deluje na množici X. Na množici X vpeljimo ekvivalenčno relacijo $\sim_\Gamma$ za katero velja :

$$x \sim_\Gamma y \Leftrightarrow \exists g \in \Gamma, \text{ tako da velja } x^g = y, \text{ kjer } x, y \in X.$$

Ekvivalenčnim razredom glede na to relacijo pravimo **orbite** delovanja grupe Γ na množici X. Orbita elementa $x \in X$ je množica $Orb_\Gamma(x) = \{x^g \in X; g \in \Gamma\}$. V primeru, da ima delovanje eno samo orbito, takemu delovanju pravimo **tranzitivno delovanje** oz. delovanje je tranzitivno, če $\forall x, y \in X$ $\exists g \in \Gamma$, tako da velja $x^g = y$.
Naj grupa Γ deluje na množici X in naj bo $x \in X$. Množici vseh elementov $g \in \Gamma$, ki ohranjajo element x oz. $\Gamma_x = \{g \in \Gamma | x^g = x\}$ pravimo **stabilizator** elementa x. Pri tem je lahko pokazati, da je Γ_x podgrupa grupe Γ.
Poleg tranzitivnega delovanja poznamo tudi pol-regularno in regularno delovanje grupe Γ na množici X.
Delovanju pravimo, da je **pol-regularno**, če je $|\Gamma_x| = 1$ za $\forall x \in X$.
V primeru, da je delovanje tranzitivno in hkrati pol-regularno, pa takemu delovanju pravimo **regularno delovanje**.

Pomembna lema je lema o orbiti in stabilizatorju, katera povezuje velikost orbite in red stabilizatorja. Dokaz bomo v tem primeru opustili.

Lema 2.7. *Naj končna grupa Γ deluje na neprazni končni množici X in naj bo $x \in X$ poljuben. Tedaj velja enakost:*

$$|\Gamma| = |\Gamma_x| \cdot |Orb_\Gamma(x)|.$$

Poglejmo si uporabo te leme na primeru.
Naj permutacijska grupa S_4 na naraven način deluje na množici $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
Poglejmo si orbito elementa $1 \in X$. Torej pogledamo, v katera števila se element 1 preslika s permutacijsko grupo S_4. Ker vemo, da S_4 vsebuje permutacije, ki naš element preslikajo v poljuben element iz množice X, je $Orb_{S_4}(1) = \{1, 2, 3, 4\}$. Torej je dano delovanje tranzitivno.
Poglejmo si še kateri elementi permutacijske grupe S_4 fiksirajo element 1. Ugotovimo,

da $\Gamma_1 = \{id, (23), (24), (34), (234), (243)\}$.
Torej, če povzamemo: $|Orb_{S_4}(1)| = 4$ in $|\Gamma_1| = 6$ in ob uporabi zgoraj navedene leme o orbiti in stabilizatorju velja $|S_4| = 6 \cdot 4 = 24$, kar seveda že vemo.

2.3 Vektorski prostori in matrike

Spomnimo se še nekaj definicij s področja vektorskih prostorov, katerih razumevanje nam bo v nadaljevanju prišlo prav. Vse definicije so povzete iz študijske literature predmeta Linearna algebra.

Definicija 2.8. Naj bo $V \neq \emptyset$ neprazna množica z notranjo dvomestno operacijo

$$+ : V \times V \to V.$$

Naj bo $\mathbb{F}$ polje in operacija:

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V.$$

Algebrska struktura $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ je **vektorski prostor**, če velja:

(V1) $(V, +)$ je abelska grupa,

(V2) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ in vse $\mathbf{v} \in V$,

(V3) $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$ za vse $\alpha \in \mathbb{F}$ in vse $\mathbf{U}, \mathbf{v} \in V$,

(V4) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v}$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ in vse $\mathbf{v} \in V$ in

(V5) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ za vse $\mathbf{v} \in V$.

V tem primeru pravimo vsakemu elementu množice V **vektor** in vsakemu elementu polja $\mathbb{F}$ **skalar**.

Nekaj primerov vektorskih prostorov:

- $V = \mathbb{R}^n$ je vektorski prostor za operaciji seštevanja vektorjev in množenja s skalarjem po komponentah.
- $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ je vektorski prostor za operaciji seštevanja matrik in množenja matrike s skalarjem.

Definicija 2.9. Naj bo $(V, \mathbb{F})$ vektorski prostor. Vektor v je **linearna kombinacija vektorjev** $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in V$ (kjer $n \in \mathbb{N}$), če obstajajo skalarji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ za katere velja:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k.$$

Definicija 2.10. Naj bo $(V, \mathbb{F})$ vektorski prostor in naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $n \geq 2$. Za vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ pravimo, da so **linearno odvisni**, če lahko katerega od njih izrazimo kot linearno kombinacijo preostalih. Vektorji so neodvisni, če niso odvisni.

Definicija 2.11. **Baza** B je podmnožica vektorskega prostora V, ki je sestavljena iz vektorjev, ki imajo dve bistveni lastnosti:

- bazni vektorji so med seboj linearno neodvisni,
- vsak drug vektor iz vektorskega prostora V se da zapisati kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

Definicija 2.12. Če je A matrika dimenzije $n \times n$ in v vektor dimenzije $n \times 1$, potem lahko definiramo produkt Av, ki je zopet vektor dimenzije $n \times 1$.

Definicija 2.13. Naj bo A matrika dimenzije $n \times n$. Število α imenujemo **lastna vrednost** matrike A, če obstaja tak neničelen vektor v, ki je dimenzije $n \times 1$, da je:

$$Av = \alpha v.$$

Vektor $\mathbf{v}$ imenujemo **lastni vektor** za matriko A pri lastni vrednosti α.

Po definiciji je torej α lastna vrednost matrike A, če obstaja tak neničelen vektor v, da velja $(A - \alpha I)v = 0$.

Opomba: Matrika I je enotska oz. identična matrika, ki je enake dimenzije kot matrika A in so njeni diagonalni elementi enaki 1, vsi ostali pa 0.

Definicija 2.14. Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$, s stolpičnimi vektorji $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Množica vseh možnih lineranih kombinacij vektorjev $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se imenuje **stolpični prostor matrike** A.

Definicija 2.15. Matrika $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ (kjer je $\mathbb{F}$ polje in $n \in \mathbb{N}$) je **obrnljiva**, če obstaja taka matrika $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, da velja:

$$AB = I = BA,$$

kjer je $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

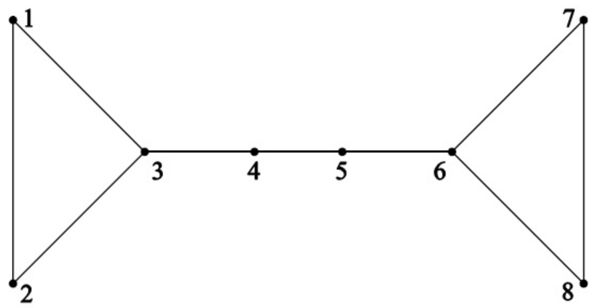
Opomba: Oznaka $det(A)$ bo v nadaljevanju označevala determinanto matrike A.

Definicija 2.16. Naj bo A matrika dimenzije $n \times n$. **Karakteristični polinom** matrike A v spremnljivki t je polinom $\Phi(A, t)$ definiran kot $\Phi(A, t) = det(tI - A)$.
Naj bo λ ničla karakterističnega polinoma $\Phi(A, t)$. Torej je $det(\lambda I - A) = 0$ in zato matrika $\lambda I - A$ ni obrnljiva. Enačba $(\lambda I - A)v = 0$ ima zato netrivialno rešitev $v \neq 0$. Torej je $\lambda v - Av = 0$, oz. $Av = \lambda v$. Sledi, da je λ lastna vrednost matrike A s pripadajočim lastnim vektorjem v.

3 Kvocientni grafi

3.1 Ekvitabilne particije

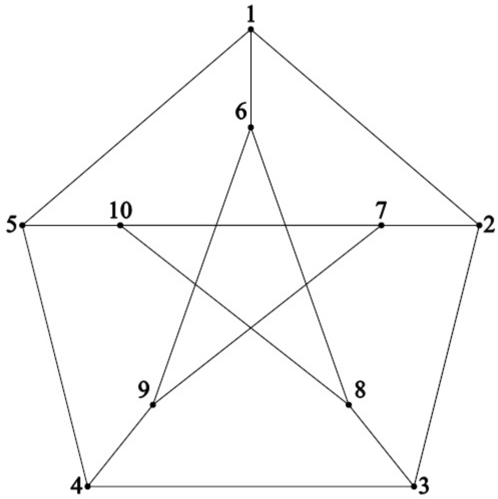
V nadaljevanju bodo predstavljene ekvitabilne particije množice vozlišč grafa $V(G)$, katerih teorija je zlasti uporabna pri preučevanju oz. obravnavanju razdaljno - regularnih grafov. Tovrstne particije nam omogočajo pridobitev informacij o lastnih vrednostih in lastnih vektorjih grafa G (več o tem v nadaljevanju).
Vse definicije in rezultati bodo povzete po [3].
Particija množice $V(G)$ je množica, katere elementi (imenujemo jih tudi celice) so med seboj disjunktne neprazne podmnožice množice $V(G)$ in katerih unija je celotna množica $V(G)$. Če kot primer vzamemo particijo π, potem le-to zapišemo kot $\pi = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$, kjer je $k \in \mathbb{N}$, in so $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ celice particije π.
Glede na celice in število le-teh ločujemo dve posebni vrsti particij. To sta **diskretna** in **trivialna** particija. Diskretna particija je tista, katere vse celice vsebujejo po en element. Medtem ko kot trivialno particijo pojmujemo particijo, ki je sestavljena iz ene same celice.
V primeru, ko imamo dve poljubni različni particiji π in τ in je π taka particija, kjer je vsaka celica iz τ vsebovana v neki celici particije π, potem taki relaciji med njima pravimo izpopolnitev particije oz. v našem primeru pravimo, da je τ izpopolnitev particije π.
Torej kdaj potem pravimo particiji, da je le-ta ekvitabilna? Vzemimo particijo $\pi = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$, kjer je $k \in \mathbb{N}$, množice $V(G)$. Particija π je **ekvitabilna**, če za vse $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ velja, da ima vsako vozlišče, ki je vsebovano v celici c_i, konstantno število sosedov v celici c_j.
Poglejmo si kot primer McKay-ev graf na Sliki 4, katerega bomo skupaj z ekvitabilno particijo uporabljali tudi v nadaljevanju tega poglavja.



Slika 4: McKay-ev graf.

Naj bo $\pi = \{c_1, c_2\}$, kjer je $c_1 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ in $c_2 = \{3, 6\}$, particija danega grafa na Sliki 4. Poljubno vozlišče iz c_1 ima natanko enega soseda znotraj c_1, ter natanko enega soseda v c_2. Podobno ima vsako vozlišče iz c_2 natanko 3 sosede v c_1, ter nobenega soseda znotraj c_2. Torej je particija π ekvitabilna.
Ekvitabilne particije se naravno pojavijo kot orbite grupe avtomorfizmov.
Naj bo G graf in Γ grupa avtomorfizmov grafa G. Potem $V(G)$ sestavlja particija, katere celice so enake orbitam grupe Γ. Ta particija je ekvatibilna. Namreč, če vzamemo u in v, ki sta vsebovani v isti celici tovrstne particije, potem obstaja avtomorfizem v Γ, ki slika u v v. Ker pa iz lastnosti avtomorfizmov vemo, da mora vsak avtomorfizem slikati vsako celico samo vase, imata u in v enako število sosednjih vozlišč v vsaki celici te particije.
Eden izmed primerov grafov s particijo, ki ustreza zgornjemu pogoju, je Petersenov graf. Za določitev particije vzamemo vozlišče $v \in V(G)$. Z njegovo pomočjo definiramo tri celice c_1, c_2, c_3 takole:

- c_1 je celica, ki vsebuje samo vozlišče v,
- c_2 je celica, ki vsebuje vsa sosednja vozlišča od vozlišča v ,
- c_3 je celica, ki vsebuje vozlišča grafa, ki so na razdalji 2 od vozlišča v.



Slika 5: Petersenov graf.

Torej, če je $v = 1$, potem je:
$c_1 = \{1\}$, $c_2 = \{2, 5, 6\}$ in $c_3 = \{3, 4, 7, 8, 9, 10\}$.
Opazimo, da so celice enake orbitam stabilizatorja vozlišča $v = 1$. Zatorej je taka particija ekvitabilna.
Prav tako kot McKay-ev graf bomo tudi Petersonov graf skupaj z zgoraj opisano ekvitabilno particijo uporabljali in spremljali skozi celotno poglavje.
Pri primeru McKay-evega grafa na Sliki 4 se izkaže, da navedene celice niso enake orbitam nobene grupe avtomorfizmov, ampak je particija vseeno ekvitabilna.
Ekvitabilno particijo grafa G lahko definiramo tudi malo drugače. Naj bo $\pi = \{c_1, \ldots, c_k\}$ particija množice $V(G)$. Potem je π ekvitabilna, če veljata naslednja pogoja:

1) podgraf grafa G, induciran na c_i, je regularen za $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

2) Dvodelen graf, katerega dobimo iz povezav med poljubnima dvema celicama c_i in c_j $(i \neq j)$, je pol-regularen (tj. vsa vozlišča pobarvana z isto barvo so enake stopnje).

Ni težko videti, da je diskretna particija vedno ekvitabilna, trivialna particija pa je ekvitabilna natanko takrat, ko je graf regularen.
Naj bo $\pi = \{c_1, \ldots, c_k\}$ ekvitabilna particija in naj c_{ij} označuje število povezav, ki povezujejo fiksirano vozlišče celice c_i z vozlišči celice c_j. Definirajmo sedaj še **kvocientni graf** G/π. G/π je usmerjen graf, katerega vozlišča so celice particije π. Iz vozlišča c_i v vozlišče c_j gre v grafu G/π c_{ij} lokov. Prav tako opazimo, da je usmerjen graf G/π multigraf, saj lahko vsebuje zanke in večkratne povezave, zato bomo risanje le-teh opustili in jih bomo zgolj opisali.

Matrika sosednosti grafa $A(G/\pi)$ je matrika dimenzije $k \times k$, kjer je ij-to mesto v matriki enako c_{ij}. Naj bo $\Phi(G/\pi, x)$ karakterističnim polinomom matrike $A(G/\pi)$.
Preden pogledamo matriko $A(G/\pi)$ za primer McKay-evega grafa in z opisano ekvitabilno particijo, najprej opišimo graf G/π. Torej glede na G in particijo π, je graf G/π sestavljen iz dveh vozlišč (označimo kot C_1 in C_2) in petih lokov, od katerih je eden zanka, ki ima začetno in končno vozlišče v C_1. Nato so še trije loki, ki so usmerjeni iz C_2 v C_1 in en lok, ki je usmerjen iz C_1 v C_2.
Torej v našem primeru McKay-evega grafa matrika sosednosti grafa G/π izgleda tako:

$$A(G/\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

s karakterističnim polinomom $x^2 - x - 3$, kjer je x spremenljivka.
Sedaj pa si poglejmo primer, ko je G Petersonov graf (glej Slika 5) in je π ekvitabilna particija taka, kot je bila prej opisana. Enako kot pri McKay-evem grafu tudi sedaj najprej opišimo graf G/π. Le-tega sestavljajo 3 vozlišča (označimo kot: C_1, C_2 in C_3) in 9 lokov, od tega 2 zanki, katerih začetno in končno vozlišče je C_3. Od preostalih lokov imajo trije začetno vozlišče v C_1 in končno v C_2, en lok v obratni smeri t.j. iz C_2 v C_1, dva loka usmerjena iz C_2 v C_3 in en obratno usmerjen t.j. iz C_3 v C_2.
Potemtakem v tem primeru dobimo matriko sosednosti za graf G/π:

$$A(G/\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

V nadaljevanju se ekvitabilne particije izkažejo kot uporabne, saj je karakteristični polinom matrike $A(G/\pi)$ vedno faktor karakterističnega polinoma matrike $A(G)$. In med drugim lahko lastne vektorje matrike $A(G/\pi)$ preoblikujemo v lastne vektorje matrike $A(G)$. V nekaterih primerih pa je celo možno opisati karakteristični polinom matrike $A(G)$ kar iz polinoma matrike $A(G/\pi)$.

3.2 Lastne vrednosti in lastni vektorji

Karakteristična matrika particije $\pi = \{c_1, \dots, c_k\}$, katero označimo tudi s $P(\pi)$, na množici z n elementi, je $n \times k$ matrika, katere stolpci so sestavljeni iz karakterističnih vektorjev celic particije π. Oziroma z drugimi besedami: na (i, j)- tem mestu matrike P je 0 ali 1, kar je odvisno od tega, če je i-to vozlišče grafa G vsebovano v celici c_j ali ne.
Torej, če se spomnimo primerov McKay-evega in Petersonovega grafa, bi karakteristični matriki grafov s pripadajočimi particijami izgledali tako.

- $P(\pi)$, kjer je G McKay-ev graf in ekvitabilna particija $\pi = (\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \{3, 6\})$.

$$P(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $P(\pi)$, ki pripada Petersonovem grafu in ekvitabilni particiji $\pi = (\{1\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8, 9, 10\})$.

$$P(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sledi lema, ki s pomočjo karakteristične matrike P povezuje lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A(G)$ z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji matrike $A(G/\pi)$.

Lema 3.1. *Naj bo π particija množice $V(G)$ s karakteristično matriko P.*

1.) Če je particija π ekvitabilna, potem velja $A(G)P = PA(G/\pi)$.

2.) Če obstaja matrika B za katero velja: $A(G)P = PB$, potem je particija π ekvitabilna.

Dokaz. Naj bo π particija množice $V(G)$ in naj bo $A := A(G)$ matrika sosednosti grafa G.
Potem je element na (i, j)-tem mestu matrike AP enak številu vozlišč v c_j, ki so sosednja vozlišču i v grafu G. Particija π je ekvitabilna particija natanko takrat, ko je to število odvisno od celice v kateri je vsebovano vozlišče i in ne od samega vozlišča i.
Dokažimo najprej točko 1.).
Torej, če je π ekvitabilna, potem so stolpci matrike AP konstantni v celicah particije π in od tod sledi, da so le-ti linearna kombinacija karakterističnih vektorjev particije π. Ampak to hkrati pomeni, da so le-ti linearna kombinacija stolpcev matrike P in zato $\exists B$ tako, da $AP = PB$. Pri tem ni težko preveriti, da je v tem primeru $B = A(G/\pi)$.
Sedaj pa dokažimo še točko 2.).
Če $AP = PB$, potem so stolpci matrike AP linearne kombinacije stolpcev v P in so prav tako konstantni v celicah permutacije π. Imamo:

$$(AP)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} (A)_{ir} P_{rj} = \sum_{r \sim i} P_{rj},$$

pri čemer je zadnja vsota enaka številu sosednjih vozlišč vozlišča i, ki so vsebovane v j-ti celici particije π. Zato iz $AP = PB$ sledi, da je to število odvisno samo od celice particije π v kateri je vozlišče i vsebovano in zato sledi, da je π ekvitabilna particija. □

Torej, če povzamemo: particija π s karakteristično matriko P je ekvitabilna natanko takrat, ko obstaja matrika B tako, da $AP = PB$. To pa dalje velja natanko tedaj, ko je stolpični prostor matrike P A-invarianten. Zato torej lahko zaključimo, da lahko prejšnjo lemo parafriziramo kot:
π je ekvitabilna $\Leftrightarrow$ stolpični prostor karakteristične matrike P je A-invarianten.
To se bo izkazalo kot zelo uporabno pri obravnavi razdaljno - regularnih grafov (sledi v nadaljevanju).

Lema 3.2. *Naj bo π ekvitabilna particija grafa G, ki jo sestavlja k celic. Označimo $P = P(\pi)$, $A = A(G)$ in $B = A(G/\pi)$. Naj bo x vektor dimenzije $k \times 1$, vektor y pa dimenzije $n \times 1$, kjer je $n = |V(G)|$ in pa Θ realno število.*
Potem imamo:

(a) če je $Bx = \Theta x$, potem $APx = \Theta Px$;

(b) če je $Ay = \Theta y$, potem je $y^T PB = \Theta y^T P$;

(c) karakteristični polinom matrike B deli karakteristični polinom matrike A.

Dokaz. Če je $Bx = \Theta x$, potem je $\Theta Px = PBx = APx$. Prav tako, če je $Ay = \Theta y$, potem $\Theta y^T P = y^T AP = y^T PB$. Torej moramo dokazati samo še trditev (c).
Ker so stolpci matrike P linearno neodvisni, obstaja baza $p_1, \ldots, p_n$ za $\mathbb{R}^n$ tako, da so $p_1, \ldots, p_k$ stolpci matrike P. Glede na to bazo, je matrika A oblike:

$$\begin{pmatrix} B & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Iz tega sledi, da je karakteristični polinom matrike A deljiv s karakterističnim polinomom matrike B. □

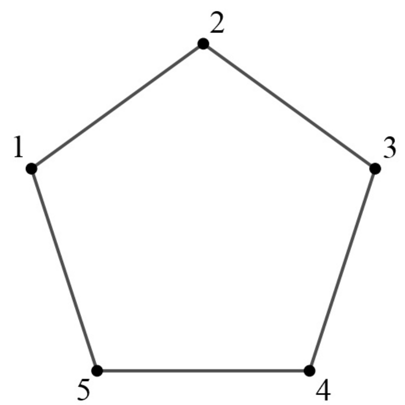
Točka (a) Leme 3.2. nam torej pove, da če je x lasten vektor matrike B s pripadajočo lastno vrednostjo Θ, potem je Px lastni vektor matrike A z isto lastno vrednostjo.
Po drugi strani: če je y lastni vektor matrike A z lastno vrednostjo Θ, potem sledi, da je $y^T P$ levi lastni vektor matrike B, če je le-ta neničelen.
V primeru, da pogledamo na vektorje kot na funkcije iz množice $V(G)$ v $\mathbb{C}$, potem vektor y dodeli vrednost vsakemu vozlišču grafa G. Velja, da je $y^T P = 0$ natanko tedaj, ko je vsota dodeljenih vrednosti vozlišč v vsaki celici c_i particije π enaka 0.

V primeru, da je G povezan graf, potem ima lastni vektor x, ki pripada spektralnemu polmeru ρ matrike $A(G)$ (t.j. največja absolutna vrednost med vsemi lastnimi vrednostmi), vse koordinate pozitivne. Zato v tem primeru $x^T P$ nikakor ne more biti enako 0. Torej je ρ tudi lastna vrednost matrike B. Ker so lastne vrednosti matrike B podmnožica lastnih vrednosti matrike A sledi, da je ρ tudi sprektralni polmer matrike B.

Posledica 3.3. *Naj bo π ekvitabilna particija povezanega grafa G. Potem imata $A(G)$ in $A(G/\pi)$ enak spektralni polmer oz. imata enako po absolutni vrednosti največjo lastno vrednost.*

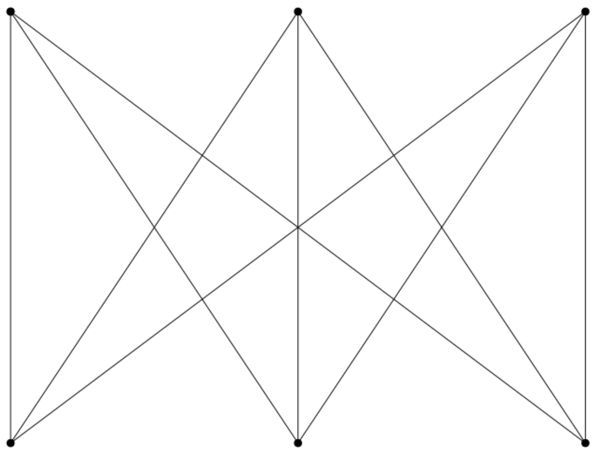
4 Krepko regularni grafi

V tem poglavju je na kratko predstavljen uvod v teorijo krepko regularnih grafov (povzeto po [3]). Na le-te lahko pogledamo tudi kot na razdaljno - regularne grafe s premerom 2.
Graf G je **krepko regularen**, če je regularen, ni poln ali prazen in za poljubni dve različni vozlišči $u, v \in V(G)$ velja, da je število vozlišč, ki so sosednja tako u kot vozlišču v, odvisno samo od tega ali sta u in v sosednji ali ne.
Če je G krepko regularen graf z n vozlišči, valenco k, vsak par sosednjih vozlišč ima a skupnih sosednjih vozlišč in prav tako vsaki dve različni nesosednji vozlišči imata c skupnih sosednjih vozlišč, potem pravimo, da je graf G $(n, k; a, c)$**- krepko regularen**.
Kot primer takih grafov, si poglejmo $(5, 2; 0, 1)$- krepko regularen graf, kjer opazimo, da je le-ta enak grafu, ki predstavlja cikel petih vozlišč.

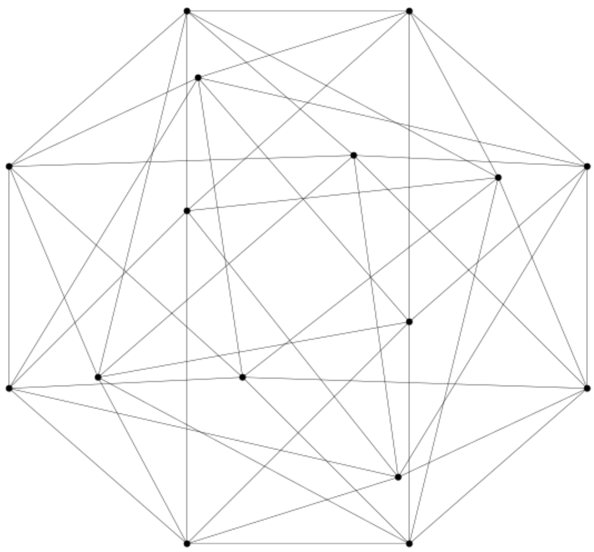


Slika 6: 5 - cikel oz. $(5, 2; 0, 1)$ - krepko regularen graf.

Poglejmo si še primer Petersonovega grafa, za katerega opazimo, da je krepko regularen. Le-tega sestavlja 10 vozlišč in je valence 3. Če izberemo poljubni dve sosednji vozlišči ugotovimo, da le-ti nimata skupnih sosednjih vozlišč.
Sedaj pa si poglejmo še dve nesosednji vozlišči, kjer hitro opazimo, da le-ti imata 1 skupno vozlišče. Torej je Petersonov graf $(10, 3; 0, 1)$- krepko regularen graf.
Med drugim so primeri krepko regularnih grafov polni dvodelni grafi $K_{n,n}$ in njihovi povezavni grafi.



Slika 7: Popolni dvodelni graf $K_{3,3}$ oz. $(6,3;0,2)$- krepko regularen graf.



Slika 8: Povezavni graf grafa $K_{4,4}$ oz. $(16,6;2,2)$ - krepko regularen graf.

V splošnem si oglejmo še dva primera krepko regularnih grafov in pa njihove parametre.
Kot prvi primer si oglejmo povezavni graf polnega grafa K_n.
Iz definicije povezavnega grafa vemo, da je to graf za katerega velja $V(L(K_n)) = E(K_n)$, torej je število vozlišč grafa $L(K_n)$ enako $\binom{n}{2}$.
Naj bosta $x, y \in L(K_n)$ poljubni različni vozlišči in naj bosta $e, f \in K_n$ poljubni različni povezavi. Naj vozlišče x v grafu $L(K_n)$ predstavlja povezavo e grafa K_n in naj vozlišče y v grafu $L(K_n)$ predstavlja povezavo f grafa K_n.

Vozlišči x in y sta torej v grafu $L(K_n)$ sosednji natanko tedaj, ko imata povezavi e in f natanko eno skupno krajišče v grafu K_n.
Naj bo x poljubno vozlišče, ki v grafu $L(K_n)$ predstavlja povezavo $\{v, u\}$ grafa K_n. Stopnja vozlišča $x \in L(K_n)$ je število povezav v grafu K_n, ki so različne od $\{u, v\}$ in imajo krajišče v vozlišču v ali u, kjer $v, u \in V(K_n)$. Število tovrstnih povezav je enako $2(n-2) = 2n-4$.
Sedaj pa ločimo primera, ko sta si poljubni vozlišči grafa $L(K_n)$ sosednji in, ko sta nesosednji.

- Predpostavimo, da sta $x, y \in L(K_n)$ poljubni različni sosednji vozlišči, glede na povezavi $\{u, v\}$ in $\{u, w\}$ grafa K_n. Število skupnih sosednjih vozlišč vozlišč x in y je enako številu povezav grafa K_n (različne od $\{u, v\}$ in $\{u, w\}$), ki imajo skupno krajišče hkrati s povezavo $\{u, v\}$ in hkrati s povezavo $\{u, w\}$. Takih povezav je natanko $n-2$, to so povezava $\{v, w\}$ in preostalih $n-3$ povezav, ki imajo krajišče u.

- Sedaj pa predpostavimo, da poljubni različni vozlišči $x, y \in L(K_n)$ nista sosednji, glede na povezavi $\{u, v\}$ in $\{w, t\}$ grafa K_n. Potem je število vozlišč, ki so sosednja tako vozlišču x kot tudi vozlišču y v grafu $L(K_n)$, enako številu povezav grafa K_n, ki imajo eno krajišče povezave enako enemu izmed krajišč povezave $\{u, v\}$ in drugo krajišče povezave enako enemu izmed krajišč povezave $\{w, t\}$. Opazimo, da obstajajo 4 take povezave, to so: $\{u, t\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ in $\{v, t\}$. Torej imata vozlišči x in y v grafu $L(K_n)$ štiri skupna sosednja vozlišča.

Torej $L(K_n)$ je krepko regularen graf s parametri $(\binom{n}{2}, 2n-4, n-2, 4)$ za $n > 2$.

Sedaj pa si poglej še krepko regularen graf $L(K_{n,n})$ in pa njegove parametre.
Kot vemo iz definicije polnega dvodelnega grafa $K_{n,n}$ lahko vozlišča razdelimo v dve disjunktni podmnožici tako, da vsaka povezava grafa $K_{n,n}$ povezuje po eno vozlišče iz ene podmnožice z enim vozliščem iz druge podmnožice. Vsaka od podmnožic vsebuje n vozlišč. Povezavni graf grafa $K_{n,n}$ je sestavljen iz n^2 vozlišč in vsa vozlišča so stopnje $2n-2$. Ponovno ločimo dva primera, glede na sosednost dveh poljubnih različnih vozlišč.

- Če sta poljubni različni vozlišči sosednji, potem imata $n-2$ skupnih sosednjih vozlišč.

- V primeru, da sta poljubni različni vozlišči nesosednji, pa imata potem 2 skupni vozlišči.

Torej graf $L(K_{n,n})$ je krepko regularen graf s parametri $(n^2, 2n-2, n-2, 2)$.

Če je G $(n,k;a,c)$- krepko regularen graf, potem je njegov komplement $\overline{G}$ tudi krepko regularen graf. Če označimo parametre komplementa z $n, \overline{k}, \overline{a}$ in $\overline{c}$ potem sledi:

$$\overline{a} = n - 2k - 2 + c,$$

$$\overline{k} = n - k - 1$$

in

$$\overline{c} = n - 2k + a.$$

Krepko regularne grafe ločujemo na dve skupini: primitivni in neprimitivni krepko regularni grafi.
Za krepko regularen graf G pravimo, da je **primitiven**, če sta oba grafa, tako prvoten graf G kot njegov komplement $\overline{G}$, povezana. Če graf ni primitiven, potem mu pravimo, da je **neprimitiven**. Običajno gledamo na neprimitivne grafe kot trivialne in tako bo tudi v nadaljnji obravnavi.

Spomnimo se še definicije razdaljne particije:

Definicija 4.1. Naj bo G graf premera oz. diametra d. Za poljubno vozlišče $v \in V(G)$ in poljubno število i, za katero velja $0 \le i \le d$, definirajmo:

$$S_i(v) = \{u \in V(G); d(u,v) = i\}.$$

Taki množici vozlišč pravimo $i-$**ta soseska vozlišča** v v grafu G. V primeru, da je G povezan graf, tvori družina množic $S_0(v), S_1(v), \ldots, S_d(v)$ particijo množice vozlišč $V(G)$, katero imenujemo tudi **razdaljna particija** grafa G glede na vozlišče v.
Opomba: $S_0(v) = \{v\}$ za vsak $v \in V(G)$.

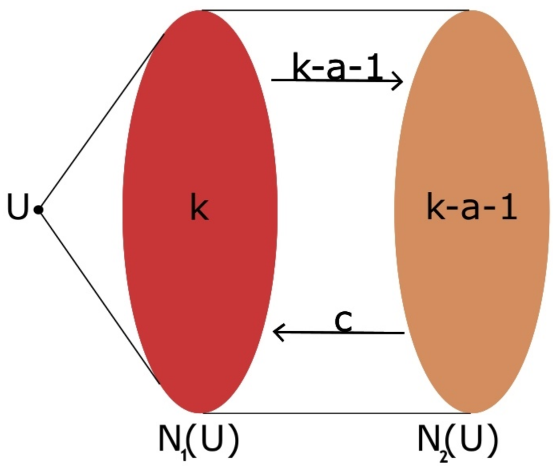
V primeru, ko je graf $G(n,k;a,c)$-krepko regularen, potem velja formula (glej Slika 9):

$$k(k-a-1) = c(n-k-1). \qquad (\star)$$

Lema 4.2. *$(n,k;a,c)$- krepko regularen graf je neprimitiven $\Leftrightarrow$ $c = k$ ali $c = 0$.*

Dokaz. Privzemimo najprej, da je G neprimitiven. Torej je bodisi G bodisi $\overline{G}$ nepovezan.
Če je G nepovezan, potem obstajata vozlišči grafa G, ki nimata skupnih sosedov. Torej je $c = 0$.
Naj bo sedaj $\overline{G}$ nepovezan. V grafu $\overline{G}$ v tem primeru obstajata vozlišči, ki nimata skupnih sosedov. Torej je $\overline{c} = 0$, oziroma $n = 2k - a$. Iz formule $(\star)$ zato sledi, da je

$$k(k-a-1) = c(k-a-1).$$



Slika 9: Skica dokaza

Če je $k - a - 1 = 0$, potem je $a = k - 1$ in G je poln graf, protislovje.
Torej je $k - a - 1 \neq 0$, in zato $k = c$.

Privzemimo sedaj, da je $c = 0$. Potem je očitno G nepovezan in zato neprimitiven. Naj bo končno še $c = k$. Podobno kot zgoraj ugotovimo, da velja

$$k(k - a - 1) = k(n - k - 1),$$

oziroma

$$k - a - 1 = n - k - 1.$$

Od tod dobimo $n = 2k - a$, oziroma $\overline{c} = 0$. Sledi, da je $\overline{G}$ nepovezan. □

Torej v jeziku ekvitabilnih particij smo v dokazu pokazali, da je razdaljna particija ekvitabilna glede na vsako vozlišče krepko regularnega grafa.

Lema 4.3. *Naj bo G krepko regularen graf z $(p+1)$ vozlišči, kjer je p praštevilo. Potem je G neprimitiven graf.*

Dokaz. Iz formule $(\star)$ vemo, da velja:

$$k(k - 1 - a) = (p - k)c.$$

Če je $k = p$, potem je G poln graf. Torej je $1 < k < p$. Sledi, da je skupni deljitelj od k in $p - k$ enak 1 in torej k deli c.
Ker je $c \leq k$, sledi, da je $c = k$ ali $c = 0$ in zato je G neprimitiven graf. □

Iz tega dokaza sledi, da je najmanjši netrivialen krepko regularen graf enak ciklu petih vozlišč.
Sedaj pa si poglejmo na krepko regularne grafe iz matrično-teoretične perspektive.

Lema 4.4. *Naj bo G graf z matriko sosednosti A, ki ni poln ali prazen. Potem je G krepko regularen graf natanko tedaj, ko je matrika A^2 linearna kombinacija A, I in J, kjer sta I in J identična matrika ter matrika samih enic, ki sta enake dimenzije kot matrika A.*

Dokaz. ij-to mesto v matriki A^2 je enako številu sprehodov dolžine 2 od vozlišča i do vozlišča j v grafu G. Če je G krepko regularen graf, je potem to število enako k, a ali c, kar pa je odvisno od tega ali sta vozlišči i in j enaki, sosednji ali različni in nesosednji. Zato:

$$A^2 = kI + aA + c(J - I - A)$$

Obrat pa je praktično definicija krepke regularnosti. □

V bistvu je Lema 4.4. zgolj prevod definicije krepko regularnega grafa v matrično teoretičnih terminih, ki pa je zelo uporabna.

Posledica 4.5. *Naj bo G $(n, k; a, c)-$krepko regularen graf.*
Če je $\Delta = (a-c)^2 + 4(k-c)$, potem so lastne vrednosti matrike sosednosti grafa G enake k, $\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2}$ in $\frac{a-c-\sqrt{\Delta}}{2}$.

Dokaz. Naj bo A matrika sosednosti grafa G. Ker je graf G k-regularen iz tega sledi, da je k ena izmed lastnih vrednosti. Pripadajoči lastni vektor je vektor, ki je sestavljen iz samih enic in ga ponavadi označimo z j.
Naj bo z lasten vektor matrike A, ki ni večkratnik vektorja j. Ker je matrika A simetrična, je vektor z pravokoten na vektor j. Naj bo Θ pripadajoča lastna vrednost. Če preuredimo enakost iz Leme 4.4. dobimo:

$$A^2 - (a-c)A - (k-c)I = cJ.$$

Pomnožimo to enačbo z vektorjem z. Na desni strani dobimo 0, saj je vektor z pravokoten na vektor j. Na levi strani pa dobimo:

$$\Theta^2 z - (a-c)\Theta z - (k-c)z.$$

Torej:

$$(\Theta^2 - (a-c)\Theta - (k-c))z = 0.$$

Ker je z neničelen vektor, velja:

$$\Theta^2 - (a-c)\Theta - (k-c) = 0.$$

Torej je

$$\Theta = \frac{a - c \pm \sqrt{D}}{2}.$$

□

Vsi povezani krepko regularni grafi imajo diameter enak 2. Iz naslednje leme ter posledice 4.5 zato sledi, da ima vsak povezan krepko regularen graf natanko tri različne lastne vrednosti.

Lema 4.6. *Če ima graf G diameter enak d, potem ima matrika $A(G)$ vsaj $d+1$ lastnih vrednosti.*

Dokaz. Naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ različne lastne vrednosti matrike $A(G)$. Označimo $A = A(G)$.
Potem je:

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2) \cdots (A - \lambda_n) = 0,$$

tako da je A^n linearna kombinacija matrik $I, A, \ldots, A^{n-1}$.
Oznaka: ij-ti element matrike A^n zapišimo kot $(A^n)_{ij}$.
Upoštevajmo, da je element $(A^n)_{ij}$ neničelen natanko tedaj, ko med poljubnima različnima vozliščema $i, j \in G$ obstaja pot dolžine n.
Predpostavimo, da v našem primeru obstaja pot med poljubnima različnima vozliščima $x, y \in G$ katere dolžina je enaka n. Potem je $(A^i)_{xy} = 0$ za $0 \leq i \leq n-1$ in $(A^n)_{xy} > 0$, kar pa je protislovje.
Od tod: $n > d$. □

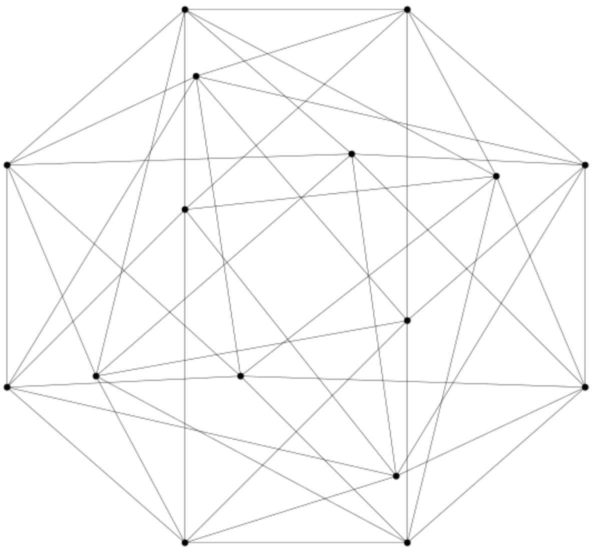
Lema 4.7. *Povezan regularen graf z natanko tremi različnimi lastnimi vrednostmi je krepko regularen graf.*

Dokaz. Naj bo G $k-$regularen graf z n vozlišči. Ker ima natanko tri lastne vrednosti in ni poln ima (po prejšnji lemi 4.6.) polmer enak 2.
Ker je graf regularen vemo, da je k ena izmed lastnih vrednosti, preostali dve pa označimo z Θ in φ. Naj bo

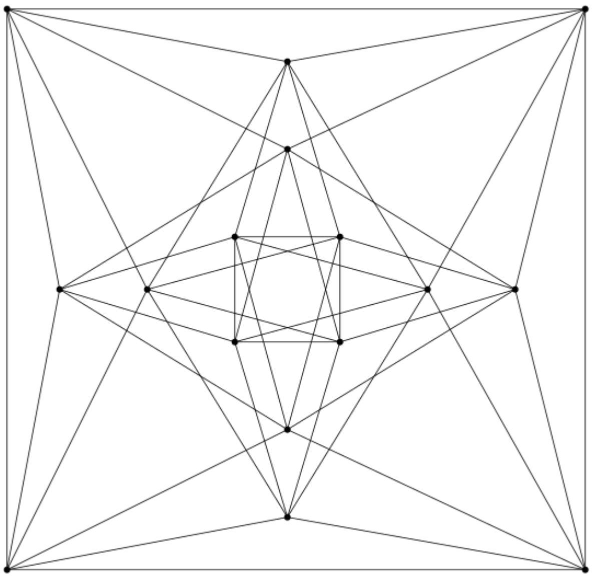
$$p(x) = (x - \Theta)(x - \varphi).$$

Potem je $(A - kI)p(A) = 0$ in zato stolpci matrike $p(A)$ ležijo v ničelnem prostoru matrike $A - kI$. Ker je G povezan graf, je k enostavna lastna vrednost od A, zatorej je ničelen prostor matrike $A - kI$ dimenzije 1. Ker je $Aj = kj$, je ta ničelen prostor generiran z j. Posledično so vsi stoplci matrike $p(A)$ večkratniki vektorja j. Matrika je $p(A)$ simetrična in zato je $p(A) = cJ$.
Torej pokazali smo, da je matrika A^2 linearna kombinacija matrik A, I in J in zato (po Lemi 4.4.) sledi, da je G krepko regularen graf. □

Za konec: krepko regularen graf ni določen s parametri n, k, c in a. Dva (neizomorfna) grafa s parametri $(16, 6; 2, 2)$: povezavni graf od $K_{4,4}$ (glej Slika 10) in Shrikhande-jev graf (glej Slika 11).



Slika 10: Povezavni graf $L(K_{4,4})$.



Slika 11: Shrikhande-jev graf.

5 Razdaljno - regularni grafi

Po vseh predelanih poglavjih in sedaj, ko smo spoznali vse potrebne termine za obravnavo razdaljno - regularnih grafov lahko preidemo tudi k definiciji le-tega.
Vsebina je povzeta po [3].

Kot je bilo že omenjeno, razdaljo med dvema vozliščema v grafu G označujemo z $d(u, v)$, kjer $u, v \in V(G)$. Množico vozlišč, ki so od poljubnega vozlišča u v grafu G oddaljenje za razdaljo r pa bomo označevali kot $S_r(u)$.
Povezan graf G je **razdaljno - regularen** graf, če za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ in kateri koli celi števili i in j velja, da je

$$|S_i(u) \cap S_j(v)|$$

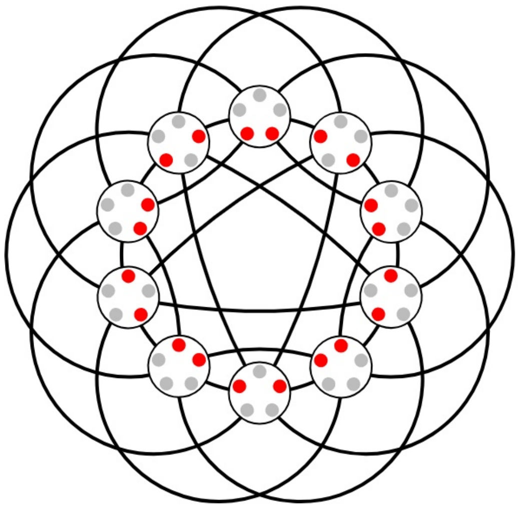
odvisna samo od razdalje med vozlišči u in v tj. $d(u, v)$.
Mi bomo v nadaljevanju uporabljali pogoj, ki je sicer šibkejši pogoj, a zadostuje za lastnost razdaljne - regularnosti, kjer je $j = 1$.
Torej: graf G je razdaljno - regularen, če je za vsaki dve vozlišči u in v in poljubno celo število i, presek $|S_i(u) \cap S_1(v)|$ odvisen samo od $d(u, v)$. Iz le-te sledi, da je G razdaljno - regularen, natanko tedaj ko je razdaljna particija $\pi(u)$ ekvitabilna za vsako vozlišče u, pripadajoči parametri te particije pa niso odvisni od izbire vozlišča u.

5.1 Družine razdaljno - regularnih grafov

Povezan krepko regularen graf je razdaljno - regularen graf premera 2, torej dobimo kar nekaj primerov tovrstnih grafov.
Naslednji pomemben razred razdaljno - regularnih grafov so grafi, ki ustrezajo naslednji trditvi. Takšnim grafom pravimo razdaljno - tranzitivni grafi.
Naj ima graf G naslednjo lastnost.
Za poljubna dva urejena para vozlišč (u, u') in (v, v') grafa G, za katera velja, da je $d(u, u') = d(v, v')$, obstaja tak avtomorfizem grafa G, ki u preslika v v, ter u' preslika v v'. Potem je graf G razdaljno-regularen.
V naslednjih podpoglavjih bosta predstavljeni dve družini razdaljno - regularnih grafov, to so Johnsonovi grafi $J(n, k)$ in Hammingovi grafi $H(n, q)$ (povzeto po [3]).

5.1.1 Johnsonovi grafi

Johnsonov graf $J(n,k)$ je graf katerega vozlišča so k-podmnožice od množice, katere moč je enaka n in velja:
dve k-podmnožici sta povezani natanko takrat, ko se sekata v natanko $(k-1)$ elementih.



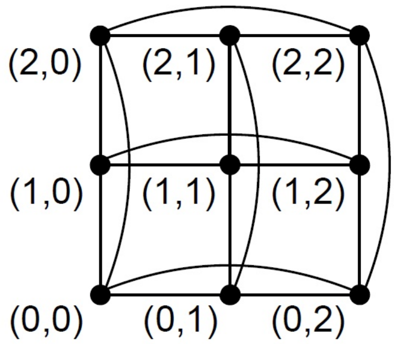
Slika 12: Johnsonov graf $J(5,2)$

Slika 12 predstavlja Johnsonov graf, ki je sestavljen iz desetih vozlišč in velja, da sta dve vozlišči sosednji, če se dve podmnožici množice iz petih elementov sekata v natanko enem elementu.
Ena izmed lastnosti tovrstnih grafov je $J(n,k) \cong J(n,n-k)$ in prav zato ponavadi predpostavimo, da je $k \leq \frac{n}{2}$.
Naslednja zanimivost teh grafov je, da je graf $J(n,2)$ povezavni graf grafa K_n (t.j. poln graf z n vozlišči, kjer sta vsaki dve vozlišči sosednji vozlišči) in je krepko regularen.
Če se dve k- množici sekata v $(k-i)$ elementih, potem lahko pokažemo, da sta le-ti na razdalji dolžine i v grafu $J(n,k)$.

Od tod je lahko pokazati, da je $J(n,k)$ razdaljno - tranzitiven graf.

5.1.2 Hammingovi grafi

Hammingovi grafi $H(n, q)$ imajo za množico vozlišč množico vseh n-teric iz abecede q simbolov. Dve n- terici sta sosednji, natanko tedaj ko se le-ti razlikujeta v natanko eni koordinatni poziciji.
Ta graf je ubistvu kartezični produkt n-tih kopij od K_q. V primeru da je $q = 2$, je graf dvodelen in znan tudi kot n-kocka.



Slika 13: Hammingov graf $H(2, 3)$

6 Zaključek

Ugotovili smo, da je snov poglavij zaključne naloge tesno povezana in odvisna med seboj. V samem začetku so podrobno in na primerih obravnavane ekvitabilne particije. Poglavje le-teh nas nauči tehnike prepoznavanja lastnosti ekvitabilnosti s pomočjo grup avtomorfizmov in orbit le-teh. Particije s to lastnostjo smo tudi razdelili v dve skupini in ločili diskretne particije od trivialnih. Tovrstne particije se kaj hitro izkažejo kot zelo uporabne pri preučevanju in obravnavanju krepko regularnih grafov, saj nam omogočajo pridobitev informacij o lastnih vrednostih in lastnih vektorjih grafa.
V poglavju krepko regularnih grafov se začne kazati povezanost tovrstnih grafov in prej obdelanih particij z razdaljno - regularnimi grafi. Spoznamo tudi različne primere tovrstnih grafov, to so Petersonov graf, popolni dvodelni grafi $K_{n,n}$ in njihovi povezavni grafi in med najmanjše pa spada $(5,2;0,1)-$krepko regularen graf, za katerega se izkaže, da je le-ta enak $5-$ciklu. Ločimo tudi primitivne krepko regularne grafe od neprimitivnih in pogledamo na le-te tudi iz matrično - teoretične perspektive, ki nam omogoči priti do zaključka, da so vsi povezani krepko regularni grafi premera 2 in imajo vsaj tri različne lastne vrednosti. In ravno ta zaključek nam omogoči, da pridemo do povezave le-teh z razdaljno - regularnimi grafi, saj na krepko regularne grafe lahko pogledamo tudi kot na razdaljno - regularne grafe premera 2.
Na samem koncu sledi še splošna definicija razdaljno - regularnih grafov. Tu sta še na kratko opisani dve družini le-teh.
V primeru, da pa bi bralca zanimalo še kaj več o le-teh, priporočam knjigo [3].

7 Literatura

[1] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov.* Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenjia, Ljubljana, 1997. *(Citirano na straneh 1 in 2.)*

[2] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, Third Edition, 2000. *(Citirano na straneh 1 in 2.)*

[3] C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman and Hall, 1993. *(Citirano na straneh 1, 10, 17, 25 in 28.)*