UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Posplošitve problema igralčevega bankrota

(Generalized gambler's ruin problem)

Ime in priimek: Pia Modrijan
Študijski program: Matematika v ekonomiji in financah
Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Koper, avgust 2018

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Pia MODRIJAN

Naslov zaključne naloge: Posplošitve problema igralčevega bankrota

Kraj: Koper

Leto: 2018

Število listov: 32 Število slik: 1 Število referenc: 13

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Ključne besede: problem igralčevega bankrota, večdimenzionalna posplošitev, verjetnosti zmage, slučajni sprehodi, markovske verige

Math. Subj. Class. (2010): 60J10, 60G40, 60J80

Izvleček:
V zaključni nalogi je opredeljen problem igralčevega bankrota. Na začetku naloge je problem rešen s pomočjo prevedbe na problem točk in uporabe diferenčnih enačb. V nadaljevanju je problem preveden na slučajne sprehode in s pomočjo tega je izračunan pričakovan dobiček ter pričakovan čas trajanja igre. Pri obeh je obravnavan tudi limitni primer. V zadnjem poglavju te naloge je opredeljen večdimenzionalni problem igralčevega bankrota, ki je posplošitev do tedaj obravnavanega problema. Izpeljan je glavni izrek, ki nam pove, kolikšna je verjetnost za zmago, glede na začetno stanje igralca.

Key words documentation

Name and SURNAME: Pia MODRIJAN

Title of final project paper: Generalized gambler's ruin problem

Place: Koper

Year: 2018

Number of pages: 32 Number of figures: 1 Number of references: 13

Mentor: Assoc. Prof. Mihael Perman, PhD

Keywords: gambler's ruin problem, multidimensional generalization, probability of winning, random walks, markov chains

Math. Subj. Class. (2010): 60J10, 60G40, 60J80

Abstract: In the final paper the problem of the gambler's bankruptcy has been defined. At the beginning of the paper, the problem is solved with the help of the problem of points and the use of differential equations. Later in the paper the problem is translated to the random walks and with the help of this the expected profit and the expected duration of the game are calculated. In both cases the limit case is also considered. In the last chapter of this paper, the multidimensional problem of the gambler's bankruptcy is defined, which is a generalisation of the hitherto discussed problem. The main theorem is derived, which tells us what the probability of winning is, depending on the the initial status of the player.

Zahvala

V prvi vrsti bi se rada zahvalila svojemu mentorju dr. Mihaelu Permanu za strokovno pomoč, svetovanje ter usmerjanje pri pisanju zaključnega dela.

Prav tako pa bi se rada zahvalila vsem ostalim profesorjem in asistentom na fakulteti, ki so pripomogli k temu, da sem pridobila potrebno znanje za zaključek študija.

Kazalo vsebine

1 Uvod **1**

2 Pascalov problem igralčevega bankrota **2**
- 2.1 Pascalova rešitev problema 2
- 2.2 Huygensova rešitev problema 2
  - 2.2.1 Definicija problema igralčevega bankrota in rešitev 3
- 2.3 Prevedba na problem točk 3
- 2.4 Problem igralčevega bankrota 5
  - 2.4.1 Rešitev z uporabo diferenčnih enačb 6
    - 2.4.1.1 Rešitev diferenčne enačbe drugega reda v splošnem . . 6
    - 2.4.1.2 Rešitev naše diferenčne enačbe 7

3 Slučajni sprehod, pričakovan dobiček in pričakovan čas trajanja igre **8**
- 3.1 Formulacija problema v jeziku slučajnih sprehodov 8
- 3.2 Klasični problem bankrota 9
- 3.3 Pričakovana vrednost dobička oziroma izgube 10
  - 3.3.1 Limitni primer 11
- 3.4 Pričakovan čas trajanja igre 11
  - 3.4.1 Limitni primer 12

4 Posplošitev problema igralčevega bankrota **13**
- 4.1 Večdimenzionalni problem igralčevega bankrota 13
  - 4.1.1 Izpeljava glavnega izreka s pomočjo markovskih verig 14
  - 4.1.2 Sigmundova dualiteta in antidualiteta 16
  - 4.1.3 Dokaz glavnega izreka 20

5 Zaključek **23**

6 Literatura **24**

Kazalo slik

1 Labirint sob: mačka, miš in sir. 19

Seznam kratic

tj.	to je
npr.	na primer
oz.	oziroma
t.d.	tako da

1 Uvod

V svoji zaključni nalogi se bom ukvarjala s problemom igralčevega bankrota in njegovimi posplošitvami.

V poglavju 2 se bom posvetila Pascalovemu problemu igralčevega bankrota. Pokazala bom, kako je Huygens rešil ta problem in kako ga lahko rešimo s pomočjo prevedbe na problem točk. To poglavje je povzeto predvsem po članku [1].

V poglavju 3 bom pokazala, kako lahko ta problem zapišemo z uporabo slučajnih sprehodov, nato pa kako izračunamo pričakovano vrednost dobička oziroma izgube, ki jo bo imel igralec ob koncu igre glede na začetni znesek. Izračunala bom tudi kakšen je pričakovan čas trajanja take igre, prav tako v odvisnosti od začetnega zneska. Tudi to poglavje je povzeto predvsem po članku [1].

V poglavju 4 bom preučila posplošitev problema igralčevega bankrota in sicer se bom osredotočila na večdimenzionalni problem igralčevega bankrota. Rešitev bom izpeljala v jeziku markovskih verig in s pomočjo tega zapisala glavni izrek, ki nam bo povedal, kakšna je verjetnost za zmago, če se naš igralec nahaja v nekem stanju $(i_1, \ldots, i_d)$. Na koncu bom izpeljala še dokaz tega izreka. To poglavje je povzeto predvsem po članku [6].

2 Pascalov problem igralčevega bankrota

Problem igralčevega bankrota je že dolgo poznan problem in sicer ga je leta 1656 zastavil Blaise Pascal (1623-1662). Problem je bil že takrat zelo zanimiv in tudi do danes se to ni spremenilo, saj se ga lahko prevede na razne igralniške igre, npr. "craps"in "blackjack", poleg tega pa se ga uporablja v biologiji, financah ter na raznih drugih področjih.

Osnovni problem, ki ga je zastavil Pascal, se glasi: Igro igrata dva igralca, igralec A in igralec B. Vsak od njiju ima ob začetku 12 kovancev in igrata tako, da mečeta tri kocke. Po vsakem metu pogledata vsoto pik na vseh treh kockah in če je ta enaka 11, potem da igralec B kovanec igralcu A, v kolikor pa je vsota pik enaka 14, da igralec A kovanec igralcu B. Ko en igralec prvi zbere vseh 24 kovancev, je zmagovalec in seveda velja, da je igralec poraženec, ko ostane brez vseh kovancev. Vprašanje je, kakšna je njuna možnost za zmago.

2.1 Pascalova rešitev problema

Pascal je ponudil pravilno rešitev in sicer z izračunom razmerja možnosti za zmago obeh igralcev.

$$p_A : p_B = 150094635296999122 : 129746337890625, \tag{2.1}$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$282429536481 : 244140625, \tag{2.2}$$

pri čemer prvi zapis delimo s 3^{12}. Na žalost ne vemo, katero metodo je Pascal uporabil, da je prišel do tega izračuna.

2.2 Huygensova rešitev problema

Definicija 2.1. Če ti je ponujenih x€ z verjetnostjo p ali y€ verjetnostjo q, pri čemer velja $p + q = 1$, potem je vrednost te ponudbe zate enaka $(px + qy)$. To se imenuje

Huygensova definicija vrednosti igre. [1]

2.2.1 Definicija problema igralčevega bankrota in rešitev

Problem: Tokrat imamo problem, ki je zelo podoben osnovnemu problemu, ki ga je zastavil Pascal. Igralca A in B igrata več zaporednih iger, ki so med seboj neodvisne. Igralec A začne z m kovanci, B pa z n kovanci. V vsaki igri igralec A zmaga z verjetnostjo α in B z verjetnostjo β. Tako kot prej, zmagovalec vsake posamezne igre dobi en kovanec od poraženca te igre. V celotni igri zmaga tisti, ki prvi pridobi vseh $m + n$ kovancev. Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da zmaga igralec A in kolikšna, da zmaga igralec B.

Predpostavljamo, da je $\alpha + \beta = 1$ in za začetek predpostavimo, da $\alpha \neq \beta$, kar nam bo prišlo prav v nadaljevanju.

Preden se posvetimo rešitvi problema igralčevega bankrota, si poglejmo problem točk.

2.3 Prevedba na problem točk

Problem točk je vprašanje, ki je spodbudilo razvoj teorije verjetnosti. Ta problem se je prvič pisno pojavil leta 1494 v knjigi, ki jo je napisal Luca Pacioli (1447-1517). V njegovem primeru igralca A in B igrata največ 11 zaporednih poskusov, za nagrado 10 zlatnikov. Na koncu vsakega poskusa eden izmed njiju prejme točko nasprotnega igralca. Prvi, ki zbere 6 točk, je zmagovalec celotne igre. Do težave pride, ko morata prekiniti igro v trenutku, ko ima A 5 točk in potrebuje le še eno točko za zmago, B pa ima 2 točki in mu torej do zmage manjkajo še 4. Vprašanje je, kako naj pravično razdelimo nagrado.

V splošnem lahko zapišemo naslednji problem: Imamo dva igralca, igralca A in B. Tekmovanje med njima poteka kot zaporedje med seboj neodvisnih poskusov in na koncu vsakega poskusa je eden izmed igralcev nagrajen s točko. Prvi, ki zbere n točk, je zmagovalec. Iz tega je jasno, da igralec A in igralec B odigrata največ $2n - 1$ poskusov, saj celotna igra traja najdlje, če oba zmagata $(n - 1)$-krat in v zadnjem poskusu eden izmed njiju pridobi še eno točko.
Težava se pojavi, ko je treba igro prekiniti, preden eden izmed njiju zbere vseh n točk. Recimo, da ima A že $n - a$ točk in B $n - b$ točk, torej A za zmago v tem trenutku potrebuje še a, B pa še b točk. Vprašanje je, kako naj pravično razdelimo nagrado v takem trenutku?

Problem dolgo ni imel rešitve in šele leta 1654 ga je uspel rešiti Blaise Pascal. Problem je rešil na dva različna načina, še tretji način kako rešiti ta problem, pa je predstavil Pierre de Fermat (1607-1665).
Dve izmed teh metod temeljita na preštevanju števila enako verjetnih izidov. Pascalova metoda pa je posebna v tem, da se ne zanaša na to, da imamo enako verjetne izide in izhaja iz ideje o vrednosti iz definicije 2.1. Iz tega sledi, da mora biti nagrada razdeljena proporcionalno z možnostjo, ki bi jo imel posamezen igralec za zmago, v kolikor bi se igra nadaljevala.

Točna definicija problema točk: Imamo več zaporednih metov poštenega kovanca. Če pade cifra, dobi A točko, če pade grb, dobi B točko. Igralec A zmaga, če pade a cifer, prej kot b grbov. Zanima nas verjetnost, da zmaga igralec A.

Označimo z $\alpha(a, b)$ verjetnost, da zmaga igralec A in z $\beta(a, b)$ verjetnost, da zmaga igralec B, pri čemer a predstavlja število cifer, ki jih igralec A še potrebuje do zmage, b pa število grbov, ki morajo še pasti, da zmaga igralec B.
Recimo, da v prvem metu pade cifra. V tem primeru A potrebuje le še $a - 1$ cifer do zmage, torej je pogojna verjetnost, da zmaga A, če je v prvem metu padla cifra, enaka $\alpha(a - 1, b)$. Obratno, če v prvem metu pade grb, je pogojna verjetnost, da zmaga A enaka $\alpha(a, b - 1)$. Po pravilu za popolno verjetnost je

$$\alpha(a, b) = \frac{1}{2}\alpha(a - 1, b) + \frac{1}{2}\alpha(a, b - 1). \tag{2.3}$$

To enačbo lahko rešimo s pomočjo rekurzije. Vemo, da je za $a = 0$ in $b > 0$, zmagovalec igralec A, ki v tem primeru dobi celotno nagrado. Iz tega sledi:

$$\alpha(0, b) = 1. \tag{2.4}$$

Podobno velja, da je za $a > 0$ in $b = 0$, zmagovalec igralec B in velja:

$$\alpha(a, 0) = 0. \tag{2.5}$$

Enačbo (2.3) s pogojema (2.4) in (2.5) lahko rešimo s pomočjo Pascalovega trikotnika.

Definicija 2.2. Naj bo $c(j, k) = \binom{j}{k}$ in $d(j, k) = \binom{j+k}{k}$.

Iz Pascalove identitete sledi:

$$d(j, k) = \binom{j + k}{k} = \binom{j + k - 1}{k} + \binom{j + k - 1}{k - 1} = d(j - 1, k) + d(j, k - 1). \tag{2.6}$$

Rešitev enačbe (2.3) bo povezana z $c(j + k, k) = d(j, k) = \binom{j+k}{k}$. Zapišemo lahko:

$$\alpha(a,b) = \frac{1}{2^{a+b}} u(a,b). \tag{2.7}$$

Če enačbo (2.7) vstavimo v enačbo (2.3) dobimo:

$$u(a,b) = u(a-1,b) + u(a,b-1), \tag{2.8}$$

in če enačbo (2.7) preuredimo tako, da zapišemo $u(a,b) = 2^{a+b}\alpha(a,b)$, dobimo iz (2.4) in (2.5) pogoja:

$$u(0,b) = 2^b \tag{2.9}$$

in

$$u(a,0) = 0. \tag{2.10}$$

Obstaja veliko načinov, kako lahko rešimo enačbo (2.8) s pogojema (2.9) in (2.10). Ko je Pascal prišel do teh enačb, je že imel rešitev, ki jo je pridobil po drugi metodi in je s to metodo le preveril, da res velja:

$$u(a,b) = 2\sum_{k=0}^{b-1} \binom{a+b-1}{k}, \tag{2.11}$$

iz česar zaradi enačbe (2.7) sledi:

$$\alpha(a,b) = \frac{1}{2^{a+b-1}} \sum_{k=0}^{b-1} \binom{a+b-1}{k}. \tag{2.12}$$

Pascal je potreboval približno dva tedna, da je prišel do tega rezultata in ko ga je pridobil, je ugotovil, da lahko to prevede na več drugih problemov. Najbolj znan med njimi je "Problem igralčevega bankrota"in sedaj si lahko pogledamo rešitev le tega.

2.4 Problem igralčevega bankrota

Predpostavimo, da imamo ponovno dva igralca, igralca A in B, ter da imata skupaj $m+n$ žetonov. Naj ima v danem trenutku igralec A a žetonov, torej jih ima B $n+m-a$. Označimo možnosti igralca A za zmago v tem trenutku z $v(a)$. Podobno kot v problemu točk, v primeru da A zmaga naslednjo igro, so njegove možnosti za zmago $v(a+1)$, če jo izgubi pa $v(a-1)$. Po pravilu za popolno verjetnost lahko ponovno zapišemo:

$$v(a) = \alpha v(a+1) + \beta v(a-1), \tag{2.13}$$

pri čemer veljata pogoja:

$$v(m+n) = 1 \tag{2.14}$$

in

$$v(0) = 0. \tag{2.15}$$

Enačbo (2.13) bomo rešili z uporabo diferenčnih enačb.

2.4.1 Rešitev z uporabo diferenčnih enačb

Naslednje definicije povzamemo po [1] in [3].

Definicija 2.3. Če velja $x_{r+k} = f(x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+k-1})$, kjer je $r \geq 0$, rečemo, da to zaporedje zadošča rekurzijski zvezi.

Definicija 2.4. Če je funkcija f v definiciji 2.3 linearna, potem rečemo, da je to diferenčna enačba reda k in zapišemo $x_{r+k} = a_0 x_r + a_1 x_{r+1} + \cdots + a_{k-1} x_{r+k-1} + g(r)$, kjer je $a_0 \neq 0$ in $g(r)$ je konstanta.

Definicija 2.5. Če je v definiciji 2.4 $g(r) = 0$, potem rečemo, da imamo homogeno diferenčno enačbo in zapišemo $x_{r+k} = a_0 x_r + a_1 x_{r+1} + \cdots + a_{k-1} x_{r+k-1}$, kjer je $a_0 \neq 0$.

2.4.1.1 Rešitev diferenčne enačbe drugega reda v splošnem

Definicija 2.6. Vse možne rešitve diferenčne enačbe tvorijo splošno rešitev diferenčne enačbe, vsaka posamezna rešitev pa je partikularna rešitev te diferenčne enačbe. [3]

Povzemimo dejstva o diferenčnih enačbah po [3].

Naj bo:

$$x_{r+2} = a_0 x_r + a_1 x_{r+1} + g(r); \quad r \geq 0 \tag{2.16}$$

in naj bo:

$$\pi(r+2) = a_0 \pi(r) + a_1 \pi(r+1) + g(r). \tag{2.17}$$

Predpostavimo, da sta λ_1 in λ_2 rešitvi enačbe $x^2 = a_0 + a_1 x$. Potem so vse rešitve (2.16) oblike:

$$x_r = \begin{cases} c_1 \lambda_1^r + c_2 \lambda_2^r + \pi(r); & \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ (c_1 + c_2 r) \lambda_1^r + \pi(r); & \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases} \tag{2.18}$$

kjer sta c_1 in c_2 konstanti, $\pi(r)$ pa je partikularna rešitev. Tako c_1 in c_2 kot tudi λ_1 in λ_2 so lahko kompleksna števila.

2.4.1.2 Rešitev naše diferenčne enačbe

Rešitev enačbe (2.13) ima obliko $v(a) = c_1\lambda_1^a + c_2\lambda_2^a$, kjer sta c_1 in c_2 konstanti in λ_1 in λ_2 rešitvi enačbe $\alpha x^2 - x + \beta = 0$.
Rešitvi enačbe sta $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{\beta}{\alpha} \neq 1$, ker predpostavljamo, da je $\alpha \neq \beta$.
Z uporabo robnih pogojev (2.14) in (2.15) izračunamo konstanti c_1 in c_2 iz česar sledi, da je rešitev enačbe (2.13) enaka:

$$v(a) = \frac{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^a}{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{m+n}}. \tag{2.19}$$

Vemo, da je $\frac{\beta}{\alpha} \neq 1$, saj smo to predpostavili že v poglavju 2.2.1.

V primeru, ko je $\alpha = \beta$, enačbo (2.13) lahko zapišemo kot:

$$v(a) = \frac{1}{2}v(a+1) + \frac{1}{2}v(a-1). \tag{2.20}$$

Rešitev enačbe (2.20) je oblike $v(a) = c_1 + c_2 a$, za katerikoli konstanti c_1 in c_2. Z uporabo robnih pogojev (2.14) in (2.15) izračunamo konstanti c_1 in c_2, iz česar sledi, da je rešitev enačbe (2.20) oz. (2.13) enaka:

$$v(a) = \frac{a}{m+n}. \tag{2.21}$$

3 Slučajni sprehod, pričakovan dobiček in pričakovan čas trajanja igre

3.1 Formulacija problema v jeziku slučajnih sprehodov

Imamo igralca, ki lahko pridobi ali izgubi en žeton, s pripadajočima verjetnostma p in q. Ta igralec naj ima ob začetku igre z žetonov, njegov nasprotnik pa $a - z$. Igra se tako kot v prejšnjih primerih zaključi, ko ima eden izmed igralcev vseh a žetonov, drugi pa nima več nobenega. Zanima nas verjetnost igralčevega bankrota in verjetnostna porazdelitev trajanja igre. To je *klasični problem igralčevega bankrota.*

Definicija 3.1. Slučajni sprehod je zaporedje slučajnih spremenljivk $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, kjer so $x_1, \ldots, x_n$ neodvisne in enako porazdeljene. [8]

Problem igralčevega bankrota je možno formulirati v jeziku slučajnega sprehoda. Predstavljajmo si, da imamo točko oziroma delec na x-osi, ki je ob začetku igre v z. V vsaki enoti časa se premakne desno ali levo po x-osi glede na to, ali gre za zmago ali za poraz. Položaj te točke po n korakih predstavlja igralčevo premoženje po n poskusih. V tem primeru je gibanje točke *slučajni sprehod* z dvema *absorbirajočima stanjema* a in 0.

Definicija 3.2. Imamo enostaven slučajen sprehod S_n na množici $\mathbb{Z}^d$. Vrnitev v izhodišče se pojavi, ko je S_n enak 0, za nek n večji od 0. [4]

Če gledamo slučajni sprehod v limitnem primeru, ko $a \to \infty$, dobimo slučajni sprehod na pol-neskončnem intervalu. Delec, ki začne v $z > 0$, predstavlja slučajni sprehod vse do trenutka, ko prvič doseže izhodišče. Če problem formuliramo na ta način, opazimo, da gre za *problem prvega obiska.*

Možna posplošitev splošnega problema je, da absorbirajoče stanje zamenjamo z *odsevnim stanjem* ali z *elastičnim stanjem. Odsevno stanje* si lahko predstavljamo tako, da imamo slučajen sprehod na končni množici točk in kadarkoli delec pride v točko 1, lahko gre z verjetnostjo p v 2, ali pa z verjetnostjo q ostane v točki 1. Tako absorbirajoče stanje kot tudi odsevno stanje sta posebna primera *elastičnega stanja*, ki predstavlja to, da ko je delec v točki 1, se z verjetnostjo p premakne v točko 2, z verjetnostjo δq ostane v 1 in z verjetnostjo $(1-\delta)q$ se premakne v absorbirajoče stanje 0. Večji kot je δ, večja je verjetnost, da se bo igra nadaljevala.

3.2 Klasični problem bankrota

Ukvarjali se bomo s problemom, ki je definiran na začetku poglavja 3.1. Naj bo q_z verjetnost, da igralec bankrotira in p_z verjetnost, da zmaga, pri danem začetnem stanju z. To lahko prevedemo na zapis iz poglavja 3.1 in dobimo slučajni sprehod, v katerem je p_z oz. q_z verjetnost, da je delec, ki začne v z, "absorbiran"v stanje a oz. 0.
Ker je $p_z + q_z = 1$, se bo igra nekoč gotovo končala.

Kot že v poglavju 2.3, je igralčevo premoženje po eni igri enako $z+1$ ali $z-1$. Torej:

$$q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}, \tag{3.1}$$

kjer je $z \in \{1, 2, \dots, a-1\}$, p je verjetnost, da zmaga v prvi igri in q je verjetnost, da v prvi igri izgubi. Pri tem veljata pogoja:

$$q_0 = 1 \tag{3.2}$$

in

$$q_a = 0. \tag{3.3}$$

Dobimo torej diferenčno enačbo, ki jo lahko rešimo po standardni poti.

Za začetek predpostavimo, da je $p \neq q$.
Če v enačbi (3.1) zamenjamo q_z z λ^z, delimo z najmanjšo potenco λ in rešimo kvadratno enačbo, dobimo rešitvi $q_z = 1$ in $q_z = \frac{q}{p}$.
Iz tega sledi, da so vse rešitve oblike:

$$q_z = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^z. \tag{3.4}$$

Če vstavimo pogoja (3.2) in (3.3) v enačbo (3.4), dobimo enačbi $1 = A + B$ in $0 = A + B(\frac{q}{p})^a$. Iz teh dveh enačb poračunamo konstanti A in B, ter dobimo rešitev diferenčne enačbe (3.1), ki je:

$$q_z = \frac{(\frac{q}{p})^a - (\frac{q}{p})^z}{(\frac{q}{p})^a - 1}. \tag{3.5}$$

Če želimo dokazati, da je enačba (3.4) iskana verjetnost bankrota, moramo pokazati še, da je rešitev enolično določena. To sledi, saj sta glede na podano rešitev (3.1) konstanti A in B izbrani tako, da (3.4) velja za $z = 0$ in $z = 1$. Vemo, da sta dve rešitvi, ki zadoščata $z = 0$ in $z = 1$ identični in da je vsaka rešitev te oblike.

V začetku poglavja 3.2 smo privzeli, da je $p \neq q$, sedaj pa si moramo pogledati še primer, ko sta p in q enaka.
V tem primeru sta naši partikularni rešitvi $q_z = 1$ in $q_z = \frac{q}{p}$ enaki in je torej enačba (3.5) nesmiselna. Pri reševanju diferenčne enačbe (3.1) dobimo rešitev $\lambda_{1,2} = 1$, torej je splošna rešitev enaka $(A + Bz)$ in ko uporabimo pogoja (3.2) in (3.3), dobimo rešitev:

$$q_z = 1 - \frac{z}{a}. \tag{3.6}$$

V kolikor imamo igralca, ki igra proti nasprotniku, ki je neskončno bogat in je vedno pripravljen igrati in če naš igralec začne z z žetoni, potem je verjetnost, da naš igralec izgubi, enaka q_z, da zmaga pa $1 - q_z$. Pri tem se naš igralec odloči, da bo igral dokler ne izgubi vseh žetonov oz. dokler ne pride do premoženja a. Ker po predpostavki iz začetka poglavja 3.2 velja, da je $q_z + (1 - q_z) = q_z + p_z = 1$, se bo igra nekoč gotovo končala.

3.3 Pričakovana vrednost dobička oziroma izgube

Dobiček oz. izguba našega igralca ob koncu igre je slučajna spremenljivka, ki jo bomo označevali z G. Zavzela bo vrednost $a - z$ z verjetnostjo $1 - q_z$ in vrednost $-z$ z verjetnostjo q_z.
Ker bo igralec igral, dokler ne izgubi vsega ali pa dokler ne doseže premoženja a, sta to edini možni vrednosti, ki ju lahko zavzame slučajna spremenljivka G. Z uporabo formule za pričakovano vrednost diskretnih slučajnih spremenljivk dobimo naslednjo enačbo:

$$E(G) = a(1 - q_z) - z. \tag{3.7}$$

Pri tem velja, da je $E(G) = 0$ natanko tedaj, ko je $p = q$. V tem primeru rečemo, da je igra poštena.

Če ima igralec začetno vsoto denarja z, pri čemer je z neko veliko število, potem je velika verjetnost, da bo prej zaslužil majhen znesek $a - z$, kot pa bankrotiral.

Primer 3.3. Recimo najprej, da je $p = q$. V tem primeru torej uporabimo formulo (3.6). Naj bo $z = 3100$ in $a = 3101$. Iz tega sledi, da je $q_z = \frac{1}{3101}$. Torej je verjetnost, da bo igralec prej zaslužil 1 enoto denarja kot bankrotiral $\frac{3100}{3101} \approx 1$.

Primer 3.4. Recimo, da je sedaj $p \neq q$ in sicer $p = 0.4$ in $q = 0.6$, pri čemer ostaneta z in a enaka kot v primeru 3.3. Sedaj uporabimo enačbo 3.4 in dobimo $q_z \approx \frac{1}{3}$, torej je verjetnost, da bo igralec prej zaslužil eno enoto denarja kot pa bankrotiral, približno $\frac{2}{3}$.

3.3.1 Limitni primer

V limitnem primeru imamo $a = \infty$. To v problemu bankrota predstavlja igro proti neskončno bogatemu igralcu. Če pošljemo torej $a \to \infty$, iz enačb (3.5) in (3.6) dobimo:

$$q_z = \begin{cases} 1; & p \leq q, \\ (\frac{q}{p})^z; & p > q. \end{cases} \tag{3.8}$$

V tem primeru torej q_z predstavlja verjetnost, da bo igralec izgubil vse svoje premoženje, ki je na začetku enako z, v igri proti neskončno bogatemu nasprotniku.

3.4 Pričakovan čas trajanja igre

Še vedno se ukvarjamo s problemom igralčevega bankrota, ki je definiran na začetku poglavja 3.1.

Opomba 3.5. Označimo dogodek, da pade $m+n$ grbov zapored z Y. Potem je $E(Y) < \infty$ in čas naše igre je manjši ali kvečjemu enak Y, torej bo pričakovan čas trajanja igre končen.

Po opombi 3.5 lahko predpostavimo, da je pričakovan čas igre končen in ga označimo z D_z. Če po prvem poskusu igralec zmaga, potem je pričakovan čas igre pogojno na zmago v prvem poskusu enak $D_{z+1} + 1$. Dobimo nehomogeno diferenčno enačbo:

$$D_z = pD_{z+1} + qD_{z-1} + 1, \tag{3.9}$$

kjer je $0 < z < a$. Naša pogoja sta:

$$D_0 = 0 \tag{3.10}$$

in

$$D_a = 0, \tag{3.11}$$

saj v primeru, ko nimamo ničesar ali pa že imamo znesek, ki ga želimo imeti na koncu, igre ni, oziroma je njen čas trajanja enak 0.

Predpostavimo najprej, da je $p \neq q$. Dobimo rešitev linearne nehomogene diferenčne enačbe $D_z = \frac{z}{q-p}$. Razlika, ki jo označimo z δ_z, katerikoli dveh rešitev (3.9), ustreza enačbi $\delta_z = p\delta_{z+1} + q\delta_{z-1}$ in vemo, da so vse rešitve te enačbe oblike $A + B(\frac{q}{p})^z$, torej so vse rešitve enačbe (3.9):

$$\frac{z}{q-p} + A + B\left(\frac{q}{p}\right)^z. \tag{3.12}$$

Iz pogojev (3.10) in (3.11) sledi:

$$A + B = 0 \ \ in \ \ A + B\left(\frac{q}{p}\right)^a = -\frac{a}{q-p}, \tag{3.13}$$

iz česar sledi:

$$D_z = \frac{z}{q-p} - \frac{a}{q-p}\frac{1-(\frac{q}{p})^z}{1-(\frac{q}{p})^a}. \tag{3.14}$$

Sedaj pa predpostavimo še, da je $q = p$. V tem primeru je rešitev enačbe (3.9) enaka $-z^2$. Vse rešitve enačbe (3.9) so tedaj oblike $D_z = -z^2 + A + Bz$. Z uporabo pogojev (3.10) in (3.11) pridemo do končne rešitve:

$$D_z = z(a-z). \tag{3.15}$$

Primer 3.6. Sedaj ko imamo enačbi, s katerimi lahko izračunamo pričakovan čas trajanja igre, si lahko za lažjo predstavo pogledamo še številski primer. Recimo, da imamo dva igralca in naj ima vsak 100€. Dolžino igre lahko izračunamo kot
$D_{100} = 100 \times (200 - 100) = 100 \times 100 = 10000$. Torej bo potrebnih 10000 poskusov, da bo eden izmed njiju bankrotiral.

3.4.1 Limitni primer

Podobno kot v poglavju 3.3.1 lahko predpostavljamo, da igralec igra proti neskončno bogatemu nasprotniku, tj. $a \to \infty$. Tedaj je:

$$D_z = \begin{cases} \infty; & q \leq p, \\ \frac{z}{q-p}; & \text{sicer.} \end{cases} \tag{3.16}$$

4 Posplošitev problema igralčevega bankrota

Obstaja veliko posplošitev problema igralčevega bankrota, na primer za enega ali več igralcev, za neskončno vsoto denarja, ter za verjetnost zmage posameznega igralca glede na to, kolikšna je njegova začetna količina denarja. V tem poglavju se bomo osredotočili na večdimenzionalno posplošitev problema igralčevega bankrota. [6]
Gre za igro enega igralca proti d igralcem. Zanimala nas bo verjetnost zmage in poraza v odvisnosti od sedanjega premoženja s posameznim igralcem, pri čemer dovoljujemo tudi izenačenje.

4.1 Večdimenzionalni problem igralčevega bankrota

V enodimenzionalnem problemu igralčevega bankrota imamo dva igralca s skupnim zneskom N. Na začetku ima eden izmed njiju k, drugi pa $N-k$ kovancev. Na vsakem koraku vržeta kovanec, ki ni nujno pošten, in eden izmed njiju pridobi kovanec od soigralca. Igre je konec, ko eden izmed igralcev ostane brez vseh kovancev.

Igro bomo posplošili na naslednji način: Imamo enega igralca, ki igra proti $d \geq 1$ igralcem. Začetna stanja našega igralca so $(i_1, i_2, \dots, i_d)$, pri čemer velja $0 \leq i_j \leq N_j$, kjer $j = 1, 2, \dots d$, torej ima lahko naš igralec proti igralcu j najmanj 0 kovancev in največ N_j kovancev, kar je skupni znesek, ki ga imata s tem igralcem. Seveda mora veljati, da je $N_j \geq 1$. Stanja naših soigralcev so $(N_1 - i_1, N_2 - i_2, \dots, N_d - i_d)$.
Z verjetnostjo $p_j(i_j)$ dobimo en kovanec od igralca j in z verjetnostjo $q_j(i_j)$ izgubimo en kovanec proti igralcu j. Ker dovoljujemo tudi izenačenje, se z verjetnostjo $1 - \sum_{k=1}^{d}(p_k(i_k) + q_k(i_k))$ ne zgodi nič.
Igralca j dokončno premagamo, ko velja $i_j = N_j$. V tem primeru z njim ne igramo več. Celotno igro izgubimo, če izgubimo proti enemu ali več igralcem, torej ko je $i_j = 0$ za nek $j \in \{1, 2, \dots, d\}$. Iz tega sledi, da če imamo že ob začetku igre $i_j = 0$ za nek $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, potem smo igro že izgubili in je verjetnost zmage enaka 0. Zato lahko začetna stanja našega igralca omejimo tako, da velja $1 \leq i_j \leq N_j$, za nek $j = 1, 2, \dots, d$.

4.1.1 Izpeljava glavnega izreka s pomočjo markovskih verig

Definicija 4.1. Rečemo, da je zaporedje $(x_n)_{n\geq 0}$ markovska veriga z začetno porazdelitvijo λ in prehodno matriko P , če za vse $n \geq 0$ in $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$ velja:

1. $P(x_0 = i_0) = \lambda_{i,0}$
2. $P(x_{n+1} = i_{n+1}|x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n) = P(x_{n+1} = i_{n+1}|x_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$,

kjer je I množica stanj markovske verige. [13]

Povzemimo dejstva o markovskih verigah po [13].

Igro bomo zapisali kot markovsko verigo Z' z dvema absorbirajočima stanjema. Množica stanj je $S' = \{(i_1, \ldots, i_d) : 1 \leq i_j \leq N_j, 1 \leq j \leq d\} \cup \{-\infty\}$, kjer $-\infty$ pomeni, da smo izgubili oziroma bankrotirali.
Predpostavimo, da za vse $i_j \in \{1, \ldots, N_j - 1\}$, kjer $j = 1, \ldots, d$, velja $p_j(i_j) > 0$ in $q_j(i_j) > 0$, torej je verjetnost za zmago in poraz vedno pozitivna, če se ne nahajamo v enem izmed absorbirajočih stanj. Poleg tega velja $\sum_{k=1}^{d}(p_k(i_k) + q_k(i_k)) \leq 1$.
Včasih bomo pisali $(i'_1, \ldots, i'_d) = -\infty$, kar predstavlja nabor stanj našega premoženja proti ostalim igralcem, ko izgubimo proti vsaj enemu. Velja torej, da je vsaj ena komponenta izmed $\{i'_1, \ldots, i'_d\}$ enaka 0.

Prehodne verjetnosti naše markovske verige so torej:

$$P'_Z((i_1, \ldots, i_d), (i'_1, \ldots, i'_d)) = \begin{cases} p_j(i_j); & i'_j = i_j + 1, i'_k = i_k, k \neq j, \\ q_j(i_j); & i'_j = i_j - 1, i'_k = i_k, k \neq j, \\ \sum_{j:i_j=1} q_j(1); & (i'_1, \ldots, i'_d) = -\infty, \\ 1 - \sum_{k=1}^{d}(p_k(i_k) + q_k(i_k)); & i'_j = i_j, 1 \leq j \leq d, \\ 1; & (i_1, \ldots, i_d) = (i'_1, \ldots, i'_d) = -\infty. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ta veriga ima torej dve absorbirajoči stanji: $(N_1, \ldots, N_d)$, kjer zmagamo in $-\infty$, kjer izgubimo.

Podali bomo formule za verjetnost zmage, če se nahajamo v nekem stanju $(i_1, \ldots, i_d)$, tj.

$$\rho((i_1, \ldots, i_d)) = P(\tau_{(N_1,\ldots,N_d)} < \tau_{-\infty}|Z'_0 = (i_1, \ldots, i_d)), \tag{4.2}$$

kjer $\tau_e := \inf\{n \geq 0 : Z'_n = e\}$.
Torej τ_e predstavlja čas, ko smo prvič v stanju e. Iz tega sledi, da je verjetnost, da

bomo zmagali enaka verjetnosti, da pridemo prej v absorbirajoče stanje $(N_1, \ldots, N_d)$, kot pa v absorbirajoče stanje $-\infty$. Glavni rezultat je:

Izrek 4.2. *Predpostavimo, da imamo posplošen problem igralčevega bankrota, ki smo ga opisali v poglavju 4.1. Potem je verjetnost za zmago, če se nahajamo v stanju $(i_1, \ldots, i_d)$ enaka:*

$$\rho((i_1, \ldots, i_d)) = \frac{\prod_{j=1}^{d} \left(\sum_{n_j=1}^{i_j} \prod_{r=1}^{n_j-1} \left(\frac{q_j(r)}{p_j(r)} \right) \right)}{\prod_{j=1}^{d} \left(\sum_{n_j=1}^{N_j} \prod_{r=1}^{n_j-1} \left(\frac{q_j(r)}{p_j(r)} \right) \right)}. \tag{4.3}$$

Izrek 4.2 lahko posplošimo na različne primere in ga tako poenostavimo.

I Recimo, da smo premagali že vse nasprotnike, le nasprotnika j še ne. V tem primeru je verjetnost zmage enaka:

$$\rho((N_1, \ldots, N_{j-1}, i_j, N_{j+1}, \ldots N_d))) = \frac{\left(\sum_{n=1}^{i_j} \prod_{r=1}^{n-1} \left(\frac{q_j(r)}{p_j(r)} \right) \right)}{\left(\sum_{n=1}^{N_j} \prod_{r=1}^{n-1} \left(\frac{q_j(r)}{p_j(r)} \right) \right)}. \tag{4.4}$$

II Če pri I dodamo pogoja $p_j(r) = p, q_j(r) = q$, kjer $r = 1, \ldots, N_j$, potem dobimo formulo za izračun verjetnosti zmage v klasičnem problemu igralčevega bankrota, kjer dovoljujemo izenačenja. Naš dodatni pogoj pomeni, da od igralca j vedno z verjetnostjo p dobimo en kovanec in z verjetnostjo q enega izgubimo, ne glede na to, kakšno je naše trenutno stanje proti temu igralcu. Sledi formula:

$$\rho((N_1, \ldots, N_{j-1}, i_j, N_{j+1}, \ldots N_d)) = \frac{\sum_{n=1}^{i_j} \left(\frac{q}{p} \right)^{n-1}}{\sum_{n=1}^{N_j} \left(\frac{q}{p} \right)^{n-1}} = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^{i_j}}{1-(\frac{q}{p})^{N_j}}; & p \neq q, \\ \frac{i_j}{N_j}; & \text{sicer.} \end{cases} \tag{4.5}$$

III Predpostavimo sedaj, da za vse $j = 1, \ldots, d$ velja $p_j(r) = p_j, q_j(r) = q_j$, kjer $r = 1, \ldots, N_j$. Ta pogoj pomeni, da od vsakega igralca s konstanto verjetnostjo p_j pridobimo en kovanec in s konstantno verjetnostjo q_j izgubimo en kovanec, ne glede na to, kakšno je naše začetno stanje proti temu igralcu. Definirajmo:

$$S_j := \begin{cases} 1; & p_j \neq q_j, \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Potem velja:

$$\rho((i_1, \ldots, i_d)) = \prod_{j=1}^{d} \left\{ \left(\frac{1 - (\frac{q_j}{p_j})^{i_j}}{1 - (\frac{q_j}{p_j})^{N_j}} \right) S_j + \frac{i_j}{N_j}(1 - S_j) \right\}, \tag{4.7}$$

kar je večdimenzionalna posplošitev klasičnega problema igralčevega bankrota.

4.1.2 Sigmundova dualiteta in antidualiteta

V nadaljevanju bomo za dokaz izreka 4.2 potrebovali Sigmundovo dualiteto. Posvetili se bomo obstoju Sigmundovega duala in verjetnostim absorpcije.

Definicija 4.3. Naj bo X diskretna markovska veriga s prehodno matriko $\boldsymbol{P}_X$ in končno množico stanj $S = \{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_M\}$, ki je delno urejena z $\leq$, pri čemer sta minimalni element $\boldsymbol{s}_1$ in maksimalni element $\boldsymbol{s}_M$ enolična. Predpostavimo še, da je nerazcepna in ima invariantno porazdelitev π.
Za $A \subseteq S$ definirajmo $\boldsymbol{P}_X(\boldsymbol{s}, A) := \sum_{\boldsymbol{s}' \in A} \boldsymbol{P}_X(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^{'})$, kar pomeni, da je verjetnost, da pridemo iz stanja $s \in S$ v katerokoli stanje, ki leži v podmnožici A, enaka vsoti verjetnosti, da pridemo iz stanja $s \in S$ v posamezno stanje $s^{'} \in A$, za vse možne $s^{'} \in A$. Definirajmo še $\pi(A) := \sum_{\boldsymbol{s} \in A} \pi(\boldsymbol{s})$ ter $\{\boldsymbol{s}\}^{\uparrow} := \{\boldsymbol{s}^{'} \in S : \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{s}^{'}\}$, $\{\boldsymbol{s}\}^{\downarrow} := \{\boldsymbol{s}^{'} \in S : \boldsymbol{s}^{'} \leq \boldsymbol{s}\}$ in $\delta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^{'}) = \mathbf{1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^{'})$. Rečemo, da je markovska veriga Z, s prehodno matriko $\boldsymbol{P}_Z$, Sigmundov dual za X, če za vsak $n \geq 1$ velja:

$$\forall(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_j \in S) \ in \ \forall(n \geq 0) \ velja \ \boldsymbol{P}_X^n(\boldsymbol{s}_i, \{\boldsymbol{s}_j\}^{\downarrow}) = \boldsymbol{P}_Z^n(\boldsymbol{s}_j, \{\boldsymbol{s}_i\}^{\uparrow}). \tag{4.8}$$

Definicija 4.4. Kvadratno matriko P imenujemo pod-stohastična matrika, če izpolnjuje pogoja:

1. $p_{ij} \geq 0$ za $\forall\ i, j \in I$
2. $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \leq 1$ za $\forall i$,

kjer je I množica stanj markovske verige. [2]

Dodali bomo absorbirajoče stanje in sicer $-\infty$. Označimo dobljeno matriko s $\boldsymbol{P}_{Z'}$ in definirajmo $\boldsymbol{P}_{Z'}(\boldsymbol{s}_j, -\infty) = 1 - \sum_{\boldsymbol{s}_i} \boldsymbol{P}_{Z'}(\boldsymbol{s}_j, \boldsymbol{s}_i)$, $\boldsymbol{P}_Z(-\infty, \boldsymbol{s}_j) = \delta(-\infty, \boldsymbol{s}_j)$ in $\boldsymbol{P}_{Z'}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_2) = \boldsymbol{P}_Z(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_2)$ sicer.

Iz enčbe (4.8) sledi, da je $\boldsymbol{s}_M$ absorbirajoče stanje, torej ima $Z^{'}$ dve absorbirajoči stanji. Če izračunamo limito enačbe (4.8), ko $n \to \infty$, dobimo:

$$\pi(\{\boldsymbol{s}_j\}^{\downarrow}) = \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{P}_{Z'}^n(\boldsymbol{s}_j, \{\boldsymbol{s}_i\}^{\uparrow}) = P(\tau_{\boldsymbol{s}_M} < \tau_{\boldsymbol{s}_{-\infty}} | Z_0^{'} = \boldsymbol{s}_j), \tag{4.9}$$

kjer $\tau_{\boldsymbol{s}} = \inf\{n : Z_n^{'} = \boldsymbol{s}\}$.
Na ta način je invarianta porazdelitev nerazcepne markovske verige povezana z verjetnostmi absorpcije Sigmundovega duala.

Za delno urejenost $\leq$ definirajmo matriko $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^{'}) = \mathbf{1}(\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{s}^{'})$. Zaradi Mobiusove inverzne formule je taka matrika vedno obrnljiva [11] in njen inverz $\boldsymbol{C}^{-1}$ označimo z μ, imenujemo pa ga *Mobiusova funkcija urejenosti* $\leq$.

Enačbo (4.8) lahko za $n = 1$ zapišemo kot:

$$\boldsymbol{P}_X \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_Z^T. \tag{4.10}$$

Definicija 4.5. Markovska veriga X s prehodno matriko $\boldsymbol{P}$ je Mobiusovo $\downarrow$ monotona (pišemo $X \in \mathcal{M}^{\downarrow}$), če je $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C} \geq 0$, kar pomeni, da so vsi elementi matrike nenegativni. Veriga je Mobiusovo $\uparrow$ monotona (pišemo $X \in \mathcal{M}^{\uparrow}$), če je $(\boldsymbol{C}^T)^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T \geq 0$. [7]

Lema 4.6. *Za dano delno urejenost $\leq$, Sigmundova dualna veriga obstaja $\iff$ X je Mobiusovo monotona. V tem primeru ima Sigmundov dual za $S' = S \cup \{\infty\}$ prehode zunaj stanja $-\infty$, podane s:*

$$\boldsymbol{P}_{Z'} = (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{P}_X\boldsymbol{C})^T. \tag{4.11}$$

Naravni proces je, da za iskanje invariante porazdelitve markovske verige X, izračunamo Sigmundov dual in potem verjetnost, da bo nekoč absorbiran v $\boldsymbol{s}_M$.
Vendar lahko ta proces obrnemo in začnemo z verigo Z' z dvema absorbirajočima stanjema. V enem absorbirajočem stanju izgubimo, v drugem pa zmagamo. Recimo, da je množica stanj te markovske verige $S' = \{-\infty\} \cup \{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_M\}$ z absorbirajočima stanjema $-\infty$ in $\boldsymbol{s}_M$. Označimo $S := \{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_M\}$.
V tem primeru imamo naslednji proces:

1. Odstranimo stanje $-\infty$ in pridobimo pod-stohastično matriko $\boldsymbol{P}_Z$.

2. Naredimo nekaj delnega urejanja $\leq$ izraženega z matriko $\boldsymbol{C}$, tako da je $\boldsymbol{s}_M$ enoličen maksimalen element.

3. Izračunamo prehode Sigmundove antidualne verige X z uporabo enačbe (4.10), tako da izračunamo $\boldsymbol{P}_X = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_Z^T\boldsymbol{C}^{-1}$.

4. Če ima dobljena matrika $\boldsymbol{P}_X$ invariantno mero π tako, da je za $\forall \boldsymbol{s} \in S$ $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}_X^n(\boldsymbol{s}, \cdot) = \pi(\cdot)$, potem lahko izračunamo verjetnosti absorpcije verige Z' z uporabo enačbe (4.9). Če je $\boldsymbol{P}_X$ stohastična matrika, potem je π invarianta porazdelitev verige, povezane s to matriko.

Trditev 4.7. *Naj bo Z' markovska veriga s prehodno matriko $\boldsymbol{P}_{Z'}$ na množici stanj $S = \{-\infty\} \cup \{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_M\} =: \{-\infty\} \cup S$, z dvema absorbirajočima stanjema $-\infty$ in $\boldsymbol{s}_M$. Recimo, da imamo neko matriko $\boldsymbol{P}_Z$, ki je enaka matriki $\boldsymbol{P}_{Z'}$, le da ji odstranimo vrstico in stolpec, ki se navezujeta na stanje $-\infty$. Fiksiramo neko delno urejanje $\leq$ na množici stanj S, izraženo z matriko $\boldsymbol{C}$, t.d. je $\boldsymbol{s}_M$ enoličen maksimalen element.*
Izračunamo:

$$\boldsymbol{P}_X = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_Z^T\boldsymbol{C}^{-1}. \tag{4.12}$$

Za dobljeno matriko $\boldsymbol{P}_X$ *velja:* $\forall \boldsymbol{s} \in S$ *je* $\sum_{\boldsymbol{s}_2 \in S} \boldsymbol{P}_X(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_2) = 1$.
Predpostavimo, da obstaja invarianta mera π*, ki izpolnjuje pogoja:*

1. $\forall \boldsymbol{s}_2 \in S$ *je* $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}_X^n(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}) = \pi(\boldsymbol{s})$
2. $\sum_{\boldsymbol{s} \in S} \pi(\boldsymbol{s}) = 1$.

Potem sledi: $\rho(\boldsymbol{s}^{'}) := P(\tau_{\boldsymbol{s}_M} < \tau_{-\infty} | Z_0^{'} = \boldsymbol{s}^{'}) = \pi(\{\boldsymbol{s}^{'}\}^{\downarrow})$.

Opomba 4.8. Če je dobljena matrika $\boldsymbol{P}_X$ v enačbi (4.12) stohastična matrika nerazcepne markovske verige X, potem je π njena invarianta porazdelitev. Še več, je Mobiusovo monotona glede na $\leq$.

Opomba 4.9. Če ima dobljena matrika $\boldsymbol{P}_X$ negativne elemente, potem ne predstavlja pravih verjetnosti.

Dokaz. Glavna ideja dokaza trditve 4.7 je bila podana že pred trditvijo, pri njeni izpeljavi. Edina stvar, ki jo še moramo razjasniti je, da za vse $\boldsymbol{s}$ velja $\sum_{\boldsymbol{s}^{'}} \boldsymbol{P}_X(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^{'}) = 1$.

$$\sum_{\boldsymbol{s}^{'}} \boldsymbol{P}_X(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^{'}) = \sum_{\boldsymbol{s}^{'}} (\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_Z^T\boldsymbol{C}^{-1})(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^{'}) = \sum_{\boldsymbol{s}^{'}} \sum_{\boldsymbol{s}_2} (\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_Z^T)(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_2)\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}^{'}). \tag{4.13}$$

Velja:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_Z^T)(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_2) &= \sum_{\boldsymbol{s}_3} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_3)\boldsymbol{P}_Z^T(\boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_2) = \sum_{\boldsymbol{s}_3} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_3)\boldsymbol{P}_Z(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3) \\ &= \sum_{\boldsymbol{s}_3 \geq \boldsymbol{s}} \boldsymbol{P}_Z(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3) = \boldsymbol{P}_Z(\boldsymbol{s}_2, \{\boldsymbol{s}\}^{\uparrow}).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Iz tega sledi:

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{s}^{'}} \boldsymbol{P}_X(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^{'}) &= \sum_{\boldsymbol{s}^{'}} \sum_{\boldsymbol{s}_2} \boldsymbol{P}_Z(\boldsymbol{s}_2, \{\boldsymbol{s}\}^{\uparrow})\mu(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}^{'}) = \sum_{\boldsymbol{s}^{'}} \mu(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}^{'}) \sum_{\boldsymbol{s}_2} \boldsymbol{P}_Z(\boldsymbol{s}_2, \{\boldsymbol{s}\}^{\uparrow}) \\ &\overset{(*)}{=} \boldsymbol{P}_Z(\boldsymbol{s}_M, \{\boldsymbol{s}\}^{\uparrow}) = 1.\end{aligned} \tag{4.15}$$

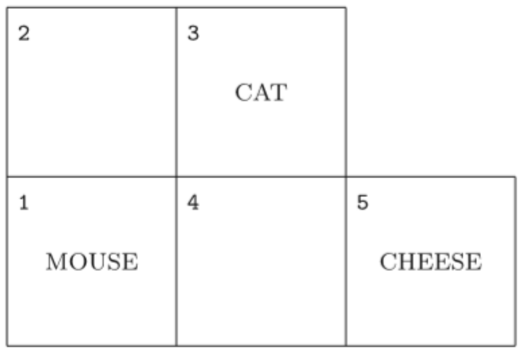
Pri (*) smo uporabili dejstvo, da za vsako delno urejenost z enoličnim maksimalnim elementom $\boldsymbol{s}_M$, Mobiusova funkcija izpolnjuje pogoj: $\forall \boldsymbol{s} \in S$ je $\sum_{\boldsymbol{s}_j} \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_j) = \mathbf{1}(\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_M)$. □

Primer 4.10. Ogledali si bomo primer mačke, ki lovi miš, ki lovi sir. Naš primer ima pet stanj.

Radoživa miš se premika po labirintu sob. Če je v času n v sobi, ki ima k sosednjih sob, bo v času $n+1$ v eni izmed teh k sob. Vsako od sob izbere naključno z verjetnostjo $\frac{1}{k}$. Lena mačka pa ostaja ves čas v isti sobi, kjer čaka na miš. Prav tako je tudi košček sira vedno v istem prostoru.

Če miš vstopi v sobo, v kateri se nahaja mačka, jo bo ta pojedla in igre bo konec. Igra se konča tudi v primeru, ko pride miš do sira.

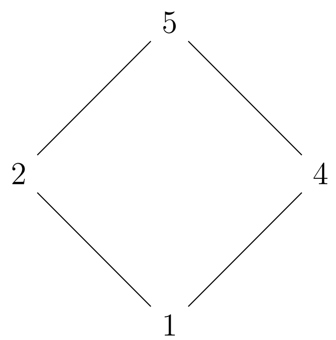
Zanima nas verjetnost, da bo miš prej pojedla sir kot prišla do mačke, če se na začetku nahaja v sobi 1, mačka in sir pa se nahajata v sobah 3 in 5? Glej Sliko 1.



Slika 1: Labirint sob: mačka, miš in sir.

Pišemo lahko $S^{'} = \{3\} \cup \{1,2,4,5\}$, kjer je 3 absorbirajoče stanje in

$$\boldsymbol{P}_{Z'} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_Z = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



, (4.16)

kjer je $\boldsymbol{P}_{Z'}$ originalna prehodna matrika igre Mačka, ki lovi miš, ki lovi sir, $\boldsymbol{P}_Z$ je prehodna matrika, ki ji odstranimo stolpec in vrstico, ki se nanašata na absorbirajoče stanje 3 in matrika $\boldsymbol{C}$ predstavlja delno urejenost.
Graf pod enačbo (4.16) pa predstavlja Hessejev diagram, kjer je 5 maksimalen element, 1 pa minimalen element.
Izračunati želimo $\rho(j) = P(\tau_5 < \tau_3 | Z_0^{'} = j)$, $j = 1, 2, 4, 5$.
Z uporabo enačbe (4.12) dobimo:

$$\boldsymbol{P}_X = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_Z^T\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ in } \big(\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(5)\big) = \big(\tfrac{2}{7}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{5}{7}\big).$$

Iz enačbe (4.9) dobimo: $(\rho(1), \rho(2), \rho(4), \rho(5)) = (\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 1)$.

4.1.3 Dokaz glavnega izreka

Lema 4.11. *Naj bo $P \times Q$ direkten produkt končnih delno urejenih množic P in Q. Potem je Mobiusova funkcija $P \times Q$ dana z enačbo:*

$$\mu((x, y), (u, v)) = \mu(x, u)\mu(y, v), \tag{4.17}$$

kjer sta $x, u \in P$ in $y, v \in Q$. [9]

Sedaj moramo dokazati izrek 4.2.

Dokaz. Matriki $\boldsymbol{P}_{Z'}$ iz enačbe (4.1) odstranimo stanje $-\infty$ in dobimo matriko $\boldsymbol{P}_Z$ na množici stanj $S = \{1, 2, \ldots, N_1\} \times \cdots \times \{1, 2, \ldots, N_d\}$.

$$\boldsymbol{P}_Z((i_1, \ldots, i_d), (i_1^{'}, \ldots, i_d^{'})) = \begin{cases} p_j(i_j); & i_j^{'} = i_j + 1, i_k^{'} = i_k, k \neq j, \\ q_j(i_j); & i_j^{'} = i_j - 1, i_k^{'} = i_k, k \neq j, \\ 1 - \sum_{k=1}^{d}(p_k(i_k) + q_k(i_k)); & i_j^{'} = i_j, 1 \leq j \leq d. \end{cases}$$

Rečemo, da so koordinate urejene in označimo $(i_1, \ldots, i_d) \leq (i_1^{'}, \ldots, i_d^{'})$, če velja $i_j \leq i_j^{'}$, kjer $j = 1, \ldots, d$. Stanje $\boldsymbol{s}_M := (N_1, \ldots, N_d)$ je enolično maksimalno stanje.

Direktno iz leme 4.11 lahko najdemo Mobiusovo funkcijo, ki ustreza dani matriki:

$$\mu((i_1, \ldots, i_d), (i_1{+}r_1, \ldots, i_d{+}r_d)) = \begin{cases} (-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}; & r_j \in \{0, 1\}, i_j + r_j \leq N_j, j = 1, \ldots d, \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Imamo:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}_X((i_1,\dots,i_d),(i_1^{'},\dots,i_d^{'})) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_Z^T\boldsymbol{C}^{-1}((i_1,\dots,i_d),(i_1^{'},\dots,i_d^{'})) =\\ &= \sum_{(i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)})\le(i_1^{'},\dots,i_d^{'})} \mu((i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}),(i_1^{'},\dots,i_d^{'}))\boldsymbol{P}_Z((i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}),\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow}).\end{aligned}$$

Naj bo $e_j = (0,\dots 0,1,0,\dots,0)$, kjer imamo 1 na mestu j. Ločimo naslednje primere:

I Naj bo $(i_1^{'},\dots,i_d^{'}) = (i_1,\dots,i_d) - e_j$. Potem imamo:

$$\begin{aligned}&P_X((i_1,\dots,i_d),(i_1^{'},\dots,i_d^{'})) =\\ &= \sum_{(i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)})\le(i_1,\dots,i_d)-e_j} \mu((i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}),(i_1,\dots,i_d)-e_j)\boldsymbol{P}_Z((i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}),\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &\overset{(*)}{=} \mu((i_1,\dots,i_d)-e_j,(i_1,\dots,i_d)-e_j)\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d)-e_j,\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &+ \sum_{(i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)})<(i_1,\dots,i_d)-e_j} \mu((i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}),(i_1,\dots,i_d)-e_j)\boldsymbol{P}_Z((i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}),\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &= 1\cdot\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d)-e_j,(i_1,\dots,i_d)) + 0 = q_j(i_j-1).\end{aligned}$$

Pri (*) smo vsoto razdelili na dva dela. Na del ko je $(i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}) = (i_1,\dots,i_d)-e_j$ in del ko je $(i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}) < (i_1,\dots,i_d)-e_j$.

II Naj bo $(i_1^{'},\dots,i_d^{'}) = (i_1,\dots,i_d) + e_j$. Potem imamo:

$$\begin{aligned}&P_X((i_1,\dots,i_d),(i_1^{'},\dots,i_d^{'})) =\\ &= \sum_{(i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)})\le(i_1,\dots,i_d)+e_j} \mu((i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}),(i_1,\dots,i_d)+e_j)\boldsymbol{P}_Z((i_1^{(2)},\dots,i_d^{(2)}),\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &= \mu((i_1,\dots,i_d)+e_j,(i_1,\dots,i_d)+e_j)\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d)+e_j,\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &+ \mu((i_1,\dots,i_d),(i_1,\dots,i_d)+e_j)\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d),\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &+ \sum_{r=1,\dots,d;r\neq j} \mu((i_1,\dots,i_d)-e_r+e_j,(i_1,\dots,i_d)+e_j)\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d)-e_r+e_j,\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &+ \sum_{r=1,\dots,d;r\neq j} \mu((i_1,\dots,i_d)-e_r,(i_1,\dots,i_d)+e_j)\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d)-e_r,\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &= (-1)^0\cdot\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d)+e_j,\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow}) + (-1)^1\cdot\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d),\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &+ \sum_{r=1,\dots,d;r\neq j}\Big[(-1)^1\cdot\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d)-e_r+e_j,\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\\ &+ (-1)^2\cdot\boldsymbol{P}_Z((i_1,\dots,i_d)-e_r,\{(i_1,\dots,i_d)\}^{\uparrow})\Big]\\ &= 1 - \sum_{r=1,\dots,d;r\neq j} q_r(i_r) - \left(1-\sum_{r=1} q_r(i_r)\right) + \sum_{r=1,\dots,d;r\neq j}(-1+1)p_r(i_r) = q_j(i_j).\end{aligned}$$

III Naj bo $(i_1^{'}, \ldots, i_d^{'}) = (i_1, \ldots, i_d)$. Potem imamo:

$$
\begin{aligned}
&P_X((i_1, \ldots, i_d), (i_1^{'}, \ldots, i_d^{'})) = \\
&\sum_{(i_1^{(2)}, \ldots, i_d^{(2)}) \leq (i_1, \ldots, i_d)} \mu((i_1^{(2)}, \ldots, i_d^{(2)}), (i_1, \ldots, i_d)) \boldsymbol{P}_Z((i_1^{(2)}, \ldots, i_d^{(2)}), \{(i_1, \ldots, i_d)\}^{\uparrow}) \\
&= \mu((i_1, \ldots, i_d), (i_1, \ldots, i_d)) \boldsymbol{P}_Z((i_1, \ldots, i_d), \{(i_1, \ldots, i_d)\}^{\uparrow}) \\
&\overset{(*)}{+} \sum_{r=1,\ldots,d} \mu((i_1, \ldots, i_d) - e_r, (i_1, \ldots, i_d)) \boldsymbol{P}_Z((i_1, \ldots, i_d), \{(i_1, \ldots, i_d)\}^{\uparrow}) \\
&= (-1)^0 \cdot \boldsymbol{P}_Z((i_1, \ldots, i_d), \{(i_1, \ldots, i_d)\}^{\uparrow}) + \sum_{r=1,\ldots,d} (-1)^1 \cdot \boldsymbol{P}_Z((i_1, \ldots, i_d), \{(i_1, \ldots, i_d)\}^{\uparrow}) \\
&= 1 - \sum_{r=1,\ldots,d} q_r(i_r) - \sum_{r=1,\ldots,d} p_r(i_r - 1) \\
&= 1 - \sum_{r=1,\ldots,d} (p_r(i_r - 1) + q_r(i_r)).
\end{aligned}
$$

Pri (*) je $(i_1^{(2)}, \ldots, i_d^{(2)}) < (i_1, \ldots, i_d)$, zato odštejemo e_r.

To so bili edini primeri, ko je $\boldsymbol{P}_X$ različen od 0. Sledi:

$$
\boldsymbol{P}_X((i_1, \ldots, i_d), (i_1^{'}, \ldots, i_d^{'})) = \begin{cases} q_j(i_j); & i_j^{'} = i_j + 1, i_k^{'} = i_k, k \neq j, \\ p_j(i_j - 1); & i_j^{'} = i_j - 1, i_k^{'} = i_k, k \neq j, \\ 1 - \sum_{k=1}^{d} (p_k(i_k - 1) + q_k(i_k)); & i_j^{'} = i_j, 1 \leq j \leq d. \end{cases}
$$

Predpostavimo, da za vse $(i_1, \ldots, i_d)$ velja: $\boldsymbol{P}_X((i_1, \ldots, i_d), (i_1, \ldots, i_d)) \geq 0$. Potem so to prehodi zaprte mreže z d neodvisnimi strežniki. Če začnemo v stanju $(i_1, \ldots, i_d)$ je prihod v strežnik j enak $q_j(i_j)$, odhod pa je $p_j(i_j - 1)$. Dobljene prehodne verjetnosti sovpadajo s prehodnimi verjetnostmi zaprtega omrežja strežbe z d neodvisnimi strežniki. Za tako markovsko verigo je znana stacionarna porazdelitev, ki je [12]:

$$
\pi((i_1, \ldots, i_d)) = \frac{\prod_{j=1}^{d} \left(\prod_{r=1}^{i_j - 1} \left(\frac{q_j(r)}{p_j(r)} \right) \right)}{\prod_{j=1}^{d} \left(\sum_{n_j=1}^{N_j} \prod_{r=1}^{n_j - 1} \left(\frac{q_j(r)}{p_j(r)} \right) \right)}. \tag{4.18}
$$

V primeru, da je nek vnos $\boldsymbol{P}_X$ negativen, matrika ne predstavlja markovske verige, vendar za π podan v enačbi (4.18), še vedno velja: $\pi \boldsymbol{P}_X = \pi$ in $\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{P}_X^n((i_1, \ldots, i_d), \cdot) = \pi(\cdot)$ za vsako množico stanj $(i_1, \ldots, i_d) \in S$.

Torej zaradi trditve 4.7, enakost 4.9 vedno drži, iz česar sledi formula 4.3 podana v izreku 4.2 in s tem je dokaz zaključen. □

5 Zaključek

V svojem zaključnem delu sem obravnavala problem igralčevega bankrota in posplošitev le-tega na večdimenzionalno igro. Skozi zaključno delo sem pokazala različne pristope do tega problema in ga tako tudi rešila na več različnih načinov. Pokazala sem, da lahko osnovni problem rešimo s pomočjo diferenčnih enačb in slučajnih sprehodov, posplošeni primer pa z uporabo markovskih verig.

V prvem delu svojega zaključnega dela sem za osnovni primer izpeljala pričakovano vrednost dobička oziroma izgube, kjer sem ugotovila, da je verjetnost, da bo igralec prej zaslužil majhno količino denarja kot pa bankrotiral, zelo velika. Pri izpeljavi pričakovanega časa trajanja igre, pa sem na primeru pokazala, da igra, pri kateri ob vsakem metu kovanca eden izmed igralcev pridobi en kovanec od soigralca, drugi pa ga izgubi, traja zelo dolgo.

V drugem delu svojega zaključnega dela pa sem izpeljala formulo, po kateri lahko izračunamo verjetnost zmage v večdimenzionalnem primeru, tj. da bo naš igralec premagal vse svoje soigralce, v odvisnosti od njegovih začetnih zneskov.

6 Literatura

[1] J. Boccio, *Gambler's ruin problem*, http://www.johnboccio.com/research/quantum/notes/index.html. (Datum ogleda: 6. 4. 2018.) *(Citirano na straneh 1, 3 in 6.)*

[2] P.S. Dey, *Definition of Markov Chain*, https://faculty.math.illinois.edu/~psdey/math564fa17/lec04.pdf. (Datum ogleda: 20. 5. 2018.) *(Citirano na strani 16.)*

[3] S. Gocheva-Ilieva, *Difference equations–Basic definitions and properties*, http://evlm.stuba.sk/~partner2/DBfiles/ode-difference_eqs/difference_eqs_introd_EN.pdf. (Datum ogleda: 12. 4. 2018.) *(Citirano na strani 6.)*

[4] D. Johnston, *An introduction to random walks*, http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Johnston.pdf. (Datum ogleda: 9. 4. 2018.) *(Citirano na strani 8.)*

[5] *Linear difference equation*, https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_difference_equation. (Datum ogleda: 12. 4. 2018.) *(Ni citirano.)*

[6] P. Lorek, Generalized Gambler's Ruin Problem: Explicit Formulas via Siegmund Duality. *Methodology and Computing in Applied Probability* 2 (2016) 603–613. *(Citirano na straneh 1 in 13.)*

[7] P. Lorek, P. Markowski, *Monotonicity requirements for efficient exact sampling with Markov chains*, http://www.math.uni.wroc.pl/~lorek/papers/2017_Lorek_Markowski_monotonicities_MPRF_Rev2.pdf. (Datum ogleda: 20. 5. 2018.) *(Citirano na strani 17.)*

[8] *Random walk*, https://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk. (Datum ogleda: 12. 4. 2018.) *(Citirano na strani 8.)*

[9] G.C. Rota, On the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Mobius Functions. *Z. Wahrseheinlichkeitstheorie* 2 (1964) 340–368. *(Citirano na strani 20.)*

[10] *Solve the difference equation for Gambler's ruin problem*, `http://edshare.soton.ac.uk/2066/26/MA222qu5.pdf`. (Datum ogleda: 13. 4. 2018.) *(Ni citirano.)*

[11] R.P. Stanley, *Enumerative combinatorics, Vol. 1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Second Edition, 2012. *(Citirano na strani 16.)*

[12] W.J. Stewart, *Probability, Markov chains, queues, and simulation*, Princeton University Press, 2009. *(Citirano na strani 22.)*

[13] R. Weber, *Markov Chains*, `http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/markov/M.pdf`. (Datum ogleda: 23. 4. 2018.) *(Citirano na strani 14.)*