UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

DOKTORSKA DISERTACIJA

OPTIMALNO UPRAVLJANJE S TVEGANJI PRI NALOŽBENIH ZAVAROVANJIH Z GARANCIJAMI

ANA ZALOKAR

KOPER, 2018

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

DOKTORSKA DISERTACIJA

OPTIMALNO UPRAVLJANJE S TVEGANJI PRI NALOŽBENIH ZAVAROVANJIH Z GARANCIJAMI

ANA ZALOKAR

KOPER, 2018

MENTOR: IZR. PROF. DR. MIHAEL PERMAN

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju, izr. prof. dr. Mihaelu Permanu, za prijaznost in pomoč pri nastanku te doktorske disertacije in za vpeljavo v raziskovalno delo.

Zahvaljujem se vodstvoma UP IAM in UP FAMNIT, ki sta mi ponudila priložnost na mestu mlade raziskovalke in omogočila doktorski študij. Hvala sodelavcem za prijetno vzdušje na delovnem mestu.

Zahvaljujem se svoji družini, bratu in staršem, ki so vedno verjeli vame. Zahvaljujem se tudi družini Zalokar in vsem svojim prijateljem za podporo.

Nazadnje se zahvaljujem še svojima največjima podpornima stebroma, možu Viktorju in sinu Maksu, ki s svojo radostjo in ljubeznijo razsvetljujeta moje življenje.

Kazalo

Stran

Povzetek **iii**

Abstract **v**

1 Uvod **1**

1.1 Hipoteze doktorske disertacije 5

2 Naložbeni zavarovalniški produkti z garancijo **13**

2.1 GMxB produkti 13

2.1.1 Struktura GMxB produktov 15

2.1.2 Minimalna garantirana izplačila 16

2.1.3 Povezava garancij z opcijami 20

2.1.4 Prodajna evropska opcija 23

2.1.5 Binomski algoritem 24

3 Strategija z optimalnim preskokom **29**

3.1 Snellova ovojnica 29

3.1.1 Snellova ovojnica na korenskem drevesu 32

3.2 Strategija 35

3.2.1 Model 36

3.2.2 Simulacije v primeru brez smrtnosti 39

3.2.3 Smrtnost 42

3.2.4 Simulacije v primeru s smrtnostjo 47

3.2.5 Minimalna garantirana izplačila v primeru smrti 53

3.2.6 Simulacije v primeru z izplačilom deleža 54

4 Strategija z deleži **59**

4.1 Pravila optimalnega ustavljanja 60

4.2 Aplikacije v zavarovalništvu 65

4.2.1 Simulacije 68

5 Sklep **75**

Literatura **78**

Povzetek

Optimalno upravljanje s tveganji pri naložbenih zavarovanjih z garancijami

Zavarovalne police z naložbenim tveganjem so eden izmed najbolj razširjenih zavarovalniških produktov. V mnogih primerih take pogodbe vključujejo določene garancije, kot je minimalen zajamčen donos v času trajanja pogodbe. Obveznosti, ki izhajajo iz takih pogodb, morajo biti upravljane z ustreznimi naložbami. V mnogih zakonodajah obstajajo omejitve glede strategij upravljanja s tveganji, vendar s prožnejšim nadzornim okvirjem, ki ga predstavlja Solventnost 2, obstajajo alternativni načini upravljanja določenih zajamčenih produktov z uporabo izvedenih finančnih instrumentov. V tej doktorski disertaciji sta predstavljeni dve alternativni strategiji upravljanja s tveganji pri naložbenih produktih z garancijo. V uvodu je predstavljena motivacija za raziskovalno delo. Navedene so tudi hipoteze doktorske disertacije. V drugem poglavju je predstavljena osnovna finančno-matematična terminologija, predvsem iz teorije varovalnega oziroma zaščitnega portfelja. Predstavljena je povezava med garancijami v naložbenih produktih in izvedenimi finančnimi instrumenti. V tretjem poglavju je najprej vpeljana teorija Snellove ovojnice. Nato je predstavljena prva alternativna strategija varovanja naložbenega produkta z zajamčenim minimalnim izplačilom v primeru doživetja. Strategija raziskuje, kdaj je optimalno preklopiti iz Δ-varovanja na varovanje z nakupom ustreznih opcij v Cox-Ross-Rubinsteinovem modelu. Strategija uporabi koncept Snellove ovojnice na zaporedju slučajnih spremenljivk, ki so definirane kot razlika med pričakovanim primanjkljajem za zavarovalnico in ceno ustreznih opcij. Strategija minimizira pričakovano izgubo za zavarovalnico. Rešitev danega problema izvira iz problema optimalnega ustavljanja. V model sta vpeljana smrtnost in minimalna garantirana izplačila v primeru prezgodnje smrti. Ker eksplicitnih rešitev ni mogoče najti, so predstavljene numerične simulacije. Njihovi rezultati lahko nakažejo raven kapitalskih zahtev, ki so potrebne za varno poslovanje, ki ga zahteva nadzor. Strategija je zlasti primerna za uporabo v neugodnih tržnih pogojih. V četrtem poglavju je predstavljena druga alternativna strategija za upravljanje s tveganji. Strategija uporabi koncept optimalnega ustavljanja na markovskih verigah. Ponovno so obravnavane pogodbe z mnimalnim zajamčenim izplačilom v primeru doživetja v Cox-Ross-Rubinsteinovem modelu. Zavarovalnica si na vsakem koraku vzame določen delež, če je trenutna cena sklada višja od diskontirane vrednosti zajamčene garancije. V vsakem trenutku zavarovalnica lahko kupi ustrezne opcije in se tako zavaruje pred tveganji. Strategija poišče optimalni čas nakupa opcije, da je pričakovana izguba za zavarovalnico najmanjša. V model je vključena smrtnost. Rezultati numeričnih simulacij kažejo, da je možno najti optimalni čas nakupa opcij in da je tveganje lahko vsaj delno izravnano. V četrtem poglavju so podani zaključki.

Ključne besede: Naložbeni produkti z garancijo, upravljanje s tveganji, optimalno ustavljanje, optimalno ustavljanje na markovskih verigah.

Math. Subj. Class. (MSC 2010): `60G40`, `91B30`, `62P05`.

Abstract

Optimal hedging in equity-linked products with guarantees

Equity-linked insurance policies are one of the most widespread insurance products. In many cases such contracts have guarantees like a minimum return over the lifetime of the policy. Liabilities arising from such guarantees must be hedged by suitable investments. There are restrictions on hedging strategies in many jurisdictions but with the more flexible regulatory framework of Solvency 2 there are alternative ways to hedge certain guaranteed products using derivative securities. In this thesis two alternative hedging strategies for equity-linked products with guarantees are presented.

In the introduction the motivation for research work is presented and the hypothesis of the thesis are stated. In the second chapter the basic terms from financial mathematics, conserning hedging strategies are presented. Also the connection between guarantees of equity-linked products and contingent claims is introduced. In the third chapter the theory of Snell envelope is presented. Then the first alternative hedging strategy for guaranteed survival equity-linked products is introduced. The strategy investigates when it is optimal to switch from Δ-hedging strategy to hedging with buying suitable options, all in the framework of Cox-Ross-Rubinstein model. The strategy is using the concept of Snell envelope on the sequence of random variables, that are defined as a difference between expected shortfall for the insurance company and the price of the suitable options. The strategy minimizes the expected loss for the company. The solution of the presented problem is derived via optimal stopping problems. Mortality and minimum death guarantees are also incorporated in the model. While the explicit solutions can not be derived, the results of the numerical simulations give the results,

which may indicate the level of capital requirements to achieve the desired confidence level set by the regulation. In particular the strategy may be applicable in adverse market conditions. In the fourth chapter the second alternative hedging strategy is presented. The strategy uses the concept of optimal stopping problem in Markov chains. Again survival contracts with minimal guarantee in Cox-Ross-Rubinstein model are considered. The insurance company in every time interval takes a fee, if the current fund price exceeds the discounted minimal guarantee amount. At every time instant the company can buy suitable options to hedge the risk. The strategy finds the optimal time to buy options in such a way, that the expected loss for the company is minimized. Mortality is included in the model. The results of the numerical simulations show, that the optimal time can be found and that the risk can be at least partially offset. In the fourth chapter some final remarks are made.

Key words: Equity-linked products with guarantees, hedging of liabilities, optimal stopping, optimal stopping for Markov chains.

Math. Subj. Class. (MSC 2010): 60G40, 91B30, 62P05.

Poglavje 1

Uvod

Nabor zavarovalniških produktov se je v zadnjih nekaj desetletjih precej razširil. Če so bili v preteklosti glavni fokus zavarovalnic klasični zavarovalniški produkti, v katere so zajeta zavarovanja za primer poškodbe, smrti, zavarovanja doma, avtomobila in tako naprej, se v zadnjih desetletjih pojavlja vedno več zavarovalniških produktov, ki so povezani s finančnimi trgi. Tako so se razvila naložbena zavarovanja, kjer je zavarovančev vložek investiran v določen vzajemni sklad. Pri teh produktih celotno tveganje nase prevzame zavarovanec, zato taki produkti za veliko večino prebivalstva niso zanimivi. S pojavom naložbenih zavarovalniških produktov z garancijo pa so zavarovalnice požele interes pri širši množici ljudi, kar jih je spodbudilo k razvoju vedno več produktov s takimi karakteristikami. Z zagotovitvijo jamstva so zavarovalnice del tveganja prevzele nase, zato je upravljanje s tveganji dobilo še močnejšo vlogo pri samem razvoju produktov.

Zavarovalništvo je ena pomembnejših gospodarskih panog. Delež zavarovalnih premij je v Sloveniji v letu 2016 predstavljal 5,2 % BDP (bruto domačega proizvoda), medtem ko v Evropski uniji delež zavarovalnih premij predstavlja 7,19% BDP. Po podatkih Slovenskega zavarovalnega združenja, ki so zbrani v Statističnem zavarovalniškem biltenu 2017 [1], so njihove članice v letu 2016 zbrale 2.066,1 milijonov evrov zavarovalne premije, kar je 98 % slovenskega zavarovalnega trga. Znesek je od leta 2007 zaradi vmesne gospodarske krize narasel le za 5,4 %. Pozitivno rast celotne dejavnosti so v letu 2016 zavirala življenjska zavarovanja, predvsem zaradi znižanja premij dodatnega pokojninskega zavarovanja za javne uslužbence kot del državnih varčevalnih ukrepov ter temu ustreznega dogovora med slovensko vlado in sindikati o zmanjšanju obsega sredstev za plače in druge stroške dela v javnem sektorju. S povečevanjem zavedanja prebivalstva o pomembnosti zavarovanj za varnost posameznika pa se razvijajo vsa osebna zavarovanja, ki so v letu 2016 s 1.194,2 milijonov evrov zbrane premije predstavljala 57,8 % celotne dejavnosti članic SZZ (pri čemer so dopolnilna zdravstvena zavarovanja obsegala 23,1 % skupne zbrane premije). Rast neživljenjskih zavarovanj je bila s 3,4 % najvišja po letu 2009, kar je bilo posledica višje rasti zavarovanj avtomobilskega kaska, drugih škodnih zavarovanj in splošnih zavarovanj odgovornosti.

V letu 2016 je torej znesek vseh zavarovalnih premij znašal 2.066,1 milijonov evrov, od tega premije življenjskih zavarovanj predstavljajo 29,36% oziroma približno 606,5 milijonov evrov. Glede na majhnost slovenskega trga znesek ni zanemarljiv. V celotni Evropski uniji je znesek premij življenjskih zavarovanj v letu 2016 znašal 616 milijard evrov. V prihodnosti je zaradi staranja prebivalstva in posledičnega primanjkljaja sredstev v javnih pokojninskih shemah, pričakovati rast v številu življenjskih zavarovanj, kar kaže na to, da je raziskovanje na področju življenjskih zavarovanj, v našem primeru bolj specifično naložbenih zavarovanj z garancijo, upravičeno. Osrednja tema doktorske disertacije bo upravljanje s tveganji pri naložbenih produktih z garancijo.

Največkrat se naložbena zavarovanja z garancijami pojavljajo v sklopu življenjskih zavarovanj. Na slovenskem trgu so na voljo naslednja naložbena zavarovanja z garancijo.

1. *Naložbena življenjska zavarovanja*, ki so kombinacija varčevanja, naložb v sklade, življenjskega zavarovanja in dodatnih zavarovanj;

2. *Individualna prostovoljna dodatna pokojninska zavarovanja (Individualno PDPZ)*, ki predstavljajo zbiranje denarnih sredstev na osebnih računih članov z namenom, da se jim zagotovi izplačevanje dodatne starostne pokojnine od upokojitve dalje. Omogočajo tudi davčno olajšavo. V PDPZ je smiselno vplačevati do maksimalne davčne olajšave, ki znaša 5,844 % bruto plače člana, vendar ne več kot znaša absolutni znesek maksimalne davčne olajšave, ki jo določi finančni minister (2.819,09

EUR v letu 2017). Zavarovalnice dajajo članom PDPZ določeno mero svobode pri upravljanju s sredstvi. Izbirajo lahko namreč med drznejšim upravljanjem, kar pomeni agresivnejšo naložbeno politiko, in zmernim upravljanjem, kar zagotavlja večjo varnost naložb, vendar tudi manjše donose.

3. *Rentno zavarovanje*, kjer se lahko vloži enkraten znesek ali se vplačuje periodično. Zavarovalnica garantira bodisi desetletno bodisi doživljenjsko izplačevanje rente.

Znesek, za katerega zavarovalnica jamči, da bo zavarovancu izplačan ob koncu trajanja pogodbe, je lahko fiksiran že ob sklenitvi pogodbe ali pa je vezan na neko minimalno garantirano obrestno mero. Lahko je povezan s samim razvojem določenega vzajemnega sklada, v katerega se je investiral začetni vplačani znesek, skozi določeno časovno obdobje. Zaradi zagotavljanja garancije se v zavarovalnicah spopadajo z izzivi kako učinkovito varovati portfelj. Šele pred nekaj leti so z evropsko direktivo Solventnost 2 zavarovalnice dobile več možnosti kako se zavarovati pred tveganji, saj jim direktiva omogoča uporabo izvedenih finančnih instrumentov, česar se v preteklosti niso smele posluževati. Tako lahko varovanje izvajajo v interakciji s finančnimi trgi, kar odpira več možnosti pri upravljanju portfeljev in posledično večjo konkurenčnost med zavarovalnicami.

V doktorski disertaciji bosta predstavljeni novi strategiji za upravljanje portfelja zavarovalnih polic. Sicer bo model predpostavljal določene poenostavitve, vendar bo vseeno približek realnemu stanju na področju upravljanja s tveganji in bo upošteval trenutno veljavno zakonodajo s tega področja. V nadaljevanju so predstavljena osnovna izhodišča evropske regulative *Direktiva 2009/138/ES Evropskega parlamenta in Sveta z dne 25. novembra 2009 o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti zavarovanja in pozavarovanja (Solventnost II)*, glejte [2], ki bodo uporabljena v doktorski disertaciji.

Kapitalske zahteve so po navodilih Solventnosti II lahko izračunane po standardni formuli ali pa z internim modelom države. Standardna formula za izračun zahtevanega solventnostnega kapitala naj bi odražala profil tveganj večine zavarovalnic in pozavarovalnic. Zahtevani solventnostni kapital, izračunan na podlagi standardne formule, je vsota osnovnega zahtevanega solventnostnega kapitala, zahtevanega kapitala za operativno tveganje in prilagoditve zaradi absorbcijske zmožnosti zavarovalno-tehničnih rezervacij in odloženih davkov. Osnovni zahtevani solventnostni kapital vsebuje najmanj naslednje module tveganja:

a) tveganje neživljenjskega zavarovanja;

b) tveganje življenjskega zavarovanja;

c) tveganje zdravstvenega zavarovanja;

d) tržno tveganje;

e) tveganje neplačila nasprotne stranke.

Osnovni zahtevani solventnostni kapital se izračuna po formuli:

$$\text{Osnovni SCR} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

pri čemer SCR_i označuje modul tveganja i. Pri izračunu se SCR_i in SCR_j nadomestita z naslednjim:

- $SCR_{\text{nezivljenjsko}}$ označuje modul tveganja neživljenjskega zavarovanja;
- $SCR_{\text{zivljenjsko}}$ označuje modul tveganja življenjskega zavarovanja;
- $SCR_{zdravstveno}$ označuje modul tveganja zdravstvenega zavarovanja;
- SCR_{trg} označuje modul tržnega tveganja;
- $SCR_{neplacilo}$ označuje modul tveganja neplačila nasprotne stranke.

Vrednosti $Corr_{i,j}$ so podane v direktivi sami.

Modul tveganja življenjskega zavarovanja se izračuna po podobni formuli, ki vsebuje podmodule tveganja umrljivosti, tveganja dolgoživosti, tveganja invalidnosti in obolevnosti, tveganja stroškov življenjskega zavarovanja, tveganja revizij, tveganja predčasne prekinitve in tveganja katastrofe življenjskega zavarovanja.

Modul tržnega tveganja je sestavljen iz podmodulov tveganja obrestne mere, delniškega tveganja, nepremičninskega tveganja, tveganja razpona, koncentracije tržnega tveganja in deviznega tveganja.

V doktorski disertaciji bosta pri upravljanju portfelja upoštevani dve tveganji, **tveganje umrljivosti** in **naložbeno tveganje**.

Pri naložbenih produktih z garancijo mora zavarovalnica predvideti zadostne kapitalske rezerve, da se zavaruje za primer, ko cene vrednostnh papirjev, v katere je investirala premije, padejo pod zajamčeno raven. Zavarovalnica mora upravljati s tveganji v skladu z veljavno regulativo. Nemški zavarovalni nadzor, kot primer, zahteva, da mora zavarovalnica v vsakem trenutku zagotoviti dovolj visoke rezerve, ki pokrijejo razliko med diskontirano vrednostjo garancije in trenutno vrednostjo investicijskega portfelja. To tako imenovano Δ-varovanje ima prednost, da je neodvisno od modeliranja gibanja cene investicijskega portfelja, lahko pa je preveč togo in neskladno s finančnimi trgi in zato vpliva na konkurenčnost zavarovalnic in zmanjšuje ponudbo.

S prihodom Solventnosti 2 imajo podjetja več možnosti glede zaščite pred tveganjem zaradi gibanja trga oziroma naložbenega tveganja. Nova zakonodaja omogoča uporabo bolj naprednih tehnik zmanjševanja tveganja, ki lahko vključujejo izvedene finančne inštrumente, ki omogočajo učinkovito interakcijo s finančnimi trgi. V evropski direktivi Solventnost II je v oddelku 6, ki se nanaša na *Naložbe*, v 132. členu, ki se nanaša na *Načelo preudarne osebe*, v 4. odstavku namreč zapisano: "Uporaba izvedenih instrumentov je mogoča, če prispevajo k zmanjšanju tveganj ali olajšajo učinkovito upravljanje portfelja."

Od tu tudi izhaja osnovna ideja raziskovanja, predstavljenega v doktorski disertaciji. Namen doktorske disertacije je poiskati nov način varovanja portfelja pri naložbenih produktih z garancijo. V nadaljevanju so predstavljeni še problem, cilji in hipoteze doktorske disertacije.

1.1 Hipoteze doktorske disertacije

Naj bo $T = (V, E)$ končno korensko drevo z množico vozlišč V, množico povezav E in globino N. Predpostavimo, da s funkcijo $f : V \to \mathbb{R}$ vsakemu vozlišču pripišemo neko realno število. Predpostavimo, da se povezavam iz vozlišča do vozlišč v nižjem nivoju pripišejo verjetnosti, ki se seštejejo v 1. Slučajni sprehod po drevesu je potem končna markovska veriga, ki se premika po nivojih drevesa z verjetnostmi pripisanimi povezavam. Označimo markovsko verigo z $X_0, X_1, \ldots, X_N$. Definiramo zaporedje $Z_k = (1+r)^{-k} f(X_k)$, kjer je r konstantna obrestna mera.

Raziskovalno vprašanje 1. *Iščemo čas ustavljanja ν zaporedja Z_k glede na filtracijo markovske verige, ki maksimizira pričakovano vrednost $E((1+r)^{-\nu} f(X_\nu))$.*

V doktorski disertaciji bo pokazano, da lahko že znane rezultate pri iskanju optimalnega časa ustavljanja s pomočjo Snellove ovojnice uporabimo tudi v okviru binomskega drevesa.

Predpostavimo, da je zavarovalnica neto zbrane premije investirala v naložbeni sklad. Za model vrednosti sklada izberemo Cox-Ross-Rubensteinov model iz [3]. Obrestna mera naj bo v prvi aproksimaciji konstantna, označimo jo z r. V vsakem trenutku se vrednost sklada pomnoži z u z verjetnostjo p ali z d z verjetnostjo $q = 1 - p$. Običajna predpostavka, ki onemogoča arbitražo, je $d < 1 < u$ in naj bo izpolnjena.

Definiramo homogeno markovsko verigo $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$, ki predstavlja slučajno gibanje vrednosti enote sklada po binomskem drevesu v skladu z izbranimi verjetnostmi.
Zavarovalnica garantira posamezniku končno izplačilo v višini

$$G = \max\left(S_0(1+r)^T, (1-c)S_T\right),$$

kjer je c delež, ki v primeru ugodnega gibanja cene osnovnega sklada pripade zavarovalnici. Na eni strani bo obravnavano Δ-varovanje, ki zahteva od zavarovalnice, da v vsakem trenutku zagotovlja pokritje primanjkljaja med trenutno vrednostjo sklada in sedanjo vrednostjo zajamčenih izplačil, na drugi strani pa varovanje z ustrezno prodajno opcijo. Kot začetno poenostavitev privzamemo, da so na trgu na razpolago opcije s poljubnimi izvršnimi cenami in poljubnimi ročnostmi.

Prvi obravnavani primer v doktorski disertaciji bo nekoliko poenostavljen in ne bo v skladu z možnostmi na trgu, zato pa bo primer, na katerem je možno eksplicitno razviti koncepte nove strategije upravljanja s tveganji. V začetku ne bomo vključili smrtnosti.

Naj L^+ označuje diskontiran primanjkljaj zavarovalnice oziroma pozitivni del izgub, brez vključenih finančnih instrumentov. Potem velja

$$L^+ = (1+r)^{-T}(mG - mS_T)_+,$$

kjer je m število zavarovancev, ki sklenejo pogodbo v trenutku 0.

Vpeljemo σ-algebro $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_u, u \le t\}$. Pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke L^+ pogojno na $\mathcal{F}_t$ je enaka porazdelitvi slučajne spremenljivke L_t^+

$$L_t^+ = \left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}} (mG - mS_{t,T}) \right)_+ .$$

Tu ima slučajna spremenljivka $S_{t,T}$ porazdelitev enako pogojni porazdelitvi S_T pri pogoju $\mathcal{F}_t$. Z vpeljavo binomsko porazdeljene slučajne spremenljivke $X \sim \mathrm{Bin}(T-t, p)$, se izraz za L_t^+ spremeni v

$$L_t^+ = \left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}} \left(mG - ms_0 u^{k+X} d^{k+T-t-X}\right) \right)_+ .$$

S temi predpostavkami lahko izračunamo pogojno pričakovano vrednost primanjkljaja. Izračunamo še ceno O_t m prodajnih opcij po [4] z izvršno ceno

$$k = S_0(1+r)^T.$$

Obravnavamo zaporedje slučajnih spremenljivk $(Z_t)_{0 \le t \le T}$, kjer

$$Z_t = (1+r)^{-t}(E\left(L_t^+ \middle| \mathcal{F}_t\right) - O_t),$$

saj je razlika med pogojnim pričakovanim primanjkljajem in ceno opcije merilo kdaj preklopiti na varovanje s prodajnimi opcijami. Definiramo Snellovo ovojnico $(U_t)_{0 \le t \le T}$ zaporedja Z_t s predpisom

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T \\ U_t &= \max(Z_t, E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)). \end{aligned}$$

Kriterij za preskok iz Δ-varovanja na varovanje z opcijami bo minimizirana pričakovana izguba za zavarovalnico. Označimo ceno opcij ob času ustavljanja ν, kjer $0 \le \nu \le T$, z O_ν. Pri tem je vključena aktivna interakcija s trgom in zato je lahko končna porazdelitev izgube osnova za določanje ustrezne višine kapitalskih rezerv, ki bodo zagotavljale vnaprej določeno verjetnost, da bo zavarovalnica zmožna izpolniti obveznosti iz naslova garancij.

Hipoteza 1. *Pri določenih pogojih za p,u in d ima končna izguba pri strategiji s preskokom na varovanje z opcijami manjšo pričakovano vrednost in manjši standardni odklon kot končna izguba pri Δ-varovanju.*

Hipoteza 2. *Časi preskoka so pri različnih potekih gibanja cen sklada na trgu različni.*

V predstavljen model vpeljemo smrtnost. Predpostavke so, da je tabela smrtnosti konstantna in da je potek smrtnosti neodvisen od gibanja cen sklada na trgu. Znano je, [5], da zaradi smrtnosti model ni več poln in je posledično točno varovanje pred tveganji nemogoče.

Sledimo modelu predstavljenem zgoraj. Vpeljemo filtracijo $\mathcal{G}_t = \sigma\{\alpha_u; u \leq t\}$ in $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$, kjer je α_t število živih zavarovancev v trenutku t, kjer $0 \leq t \leq T$. Definiramo primanjkljaj za zavarovalnico kot $L_t^+|\mathcal{H}_t$, kjer je

$$L_t^+ = \left(\frac{1}{(1+R)^{T-t}} \left(\alpha_t \cdot G - m \cdot S_{t,T} \right) \right)_+ .$$

.

Hipoteza 3. *V primeru z vpeljavo smrtnosti in pri določenih pogojih za p,u in d ima končna izguba pri strategiji s preskokom na varovanje z opcijami manjšo pričakovano vrednost in manjši standardni odklon kot končna izguba pri Δ-varovanju.*

Hipoteza 4. *Časi preskoka pri različnih potekih gibanja cen sklada na trgu so različni.*

Zavarovalnice običajno garantirajo tudi nek zajamčen znesek v primeru smrti zavarovanca v času akumulacijske dobe pogodbe. Ta garantiran znesek je dan kot

$$b_t = \max\{S_t, G_t\}, \quad t \leq T.$$

Obstaja mnogo različnih primerov fiksnih ali variabilnih garantiranih zneskov. V doktorski disertaciji bo obravnavan primer

$$G_t = S_0(1+r)^t$$

za $0 \leq t \leq T$. Model varovanja bomo prilagodili na način, da bomo potrebne zneske za garantirana izplačila zagotovili iz posebnega fonda. Število lastniških enot vzajemnega sklada ostane torej nespremenjeno.

Hipoteza 5. *V primeru z vpeljavo garantiranega izplačila v primeru prezgodnje smrti in pri določenih pogojih za p,u in d ima končna izguba pri strategiji s preskokom na varovanje z opcijami manjšo pričakovano vrednost in manjši standardni odklon kot končna izguba pri Δ-varovanju.*

Hipoteza 6. *Časi preskoka so pri različnih potekih gibanja cen sklada na trgu različni.*

Končna porazdelitev izgube je lahko osnova za določanje dovolj visokih kapitalskih rezerv, ki bodo zagotavljale vnaprej določeno mero zaupanja.

V disertaciji bodo predstavljene simulacije in numerični primeri, ki bodo potrdili ali ovrgli predstavljene hipoteze.

V nadaljevanju bo povzetih nekaj rezultatov iz ocenjevanja in varovanja porfeljev.

Prvi avtorji, ki so predstavili garancije pri produktih z naložbenim tveganjem s pomočjo opcij so [6] in [7]. Nonnenmacher [8] je eden izmed prvih avtorjev, ki je predstavil izračun potrebnih rezerv z uporabo izvedenih finančnih instrumentov. V njegovem primeru je S_t, $t = 0, 1, \ldots, T$, cena investicijskega sklada v času t in i_l konstantna minimalna zajamčena donosnost skozi celoten čas trajanja pogodbe T. Obravnan je primer z naslednjim zajamčenim izplačilom

$$A_T^1 = NP \cdot \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=i}^{T} \left(1 + \max\left(i_l, \frac{S_j - S_{j-1}}{S_{j-1}} \cdot x_1\right) - \max\left(\frac{S_j - S_{j-1}}{S_{j-1}} \cdot x_1 - i_h, 0\right)\right). \tag{1.1}$$

Zavarovanec je upravičen do sorazmernega dela dobička s sorazmernostnim faktorjem x_1 in z omejitvijo donosnosti z i_h. Po drugi strani je upravičen do minimalnega donosa i_l. Ob upoštevanju Black-Sholesovega modela za gibanje vrednosti osnovnega sklada so v [8] podane eksplicitne formule za določanje cene pogodbe in za potrebno višino kapitalskih rezerv.

Møller v [5] predstavi naložbene produkte z garancijami kot izvedene finančne instrumente vezane na vrednost investicijskega sklada, vpelje pa tudi smrtnost kot neodvisen dodatni vir slučajnosti. S tem dodatkom Cox-Ross-Rubinsteinov model ni več poln, vendar je še vedno uporaben za razmišljanje o optimalnem upravljanju s tveganji. Avtor predstavi optimalne varovalne strategije, ki minimizirajo stroške za zavarovalnico.

V članku Møller definira funkcijo izgube v času 0 kot

$$L_n = Y_T^{(n)} f(S) e^{-\delta T} - n\kappa,$$

kjer je

$$f(S) = \max(S_T, K)$$

zajamčena vrednost, ki jo zavarovancu zagotavlja pogodba. S_T je vrednost investicijskega sklada ob izteku pogodbe T, K pa garantirana višina izlačila v primeru $S_T < K$. Pri tem $Y_T^{(n)}$ predstavlja število živih zavarovancev ob času T, pri čemer je bilo število zavarovancev ob sklenitvi pogodbe n. δ je konstantna obrestna mera, κ pa enkratna premija, ki jo plača vsak zavarovanec ob času 0. V članku postavi vprašanje, če je optimalna strategija ob času 0 kupiti $n \cdot {}_T p_x$ opcij, ki bi zagotovile ob času T vsaka izplačilo $f(S)$.

V zgodnjejšem članku Møller [5] obravnava prej opisan problem v posplošenem Black-Sholesovem modelu. V takem modelu finančni trg sestavljata dve osnovni sredstvi, delnica in varčevalni račun, z njima se lahko trguje dinamično. Avtor prav v tem članku prvič simultano obravnava tveganje, ki ga predstavlja gibanje cen delnic in tveganje iz vidika smrtnosti.

V članku Bacinellijeve in soavtorjev [9] so predstavljena različna vrednotenja garancij GMxB z vidika statičnega, dinamičnega in mešanega upravljanja s tveganji. Avtorji v svojo obravnavo vključijo tako minimalno garancijo ob izteku pogodbe, kot različne minimalne garancije v primeru smrti zavarovanca pred iztekom pogodbe. Dodatne rezervacije so določene skozi interakcijo s trgom na način, da zavarovalnica z ustreznim faktorjem participira v skladu in skozi ta "davek" zagotavlja pravično ceno produktov in zagotavlja, da bo zmožna poravnati svoje obveznosti. V [10] pa so obravnavani pristopi vrednotenja anuitet pri produktih z garancijami.

V novejši literaturi Planchet in soavtorji v [11] raziskujejo različne strategije varovanja portfelja v Black-Sholesovem modelu in v Mertonovem modelu s skoki, kjer je obravnavano tudi kupovanje kratkoročnih prodajnih opcij.

Varovanje izvajajo zavarovalnice zato, da zmanjšajo tveganje izgub zaradi gibanja cen na trgu. Eden od možnih načinov zaščite pred tveganjem je, da zavarovalnica kupi opcijo, ki ji zagotovi pravico, ampak ne obveznost, da na določen datum v prihodnosti kupi (nakupna ali call opcija) ali proda (prodajna ali put opcija) določen finančni instrument po v naprej določeni ceni. Ločimo evropske opcije, ki se dajo unovčiti samo ob izteku pogodbe in ameriške opcije, ki so unovčljive v vsakem trenutku. Vrednotenje evropskih opcij bo povzeto po [4].

V doktorski disertaciji bo uporabljen koncept Snellove ovojnice in določanja optimalnega časa ustavljanja, ki je predstavljen v [12] in [13].

Sledi povzetek vsebine doktorske disertacije po poglavjih.

V drugem poglavju bodo predstavljeni zavarovalniški produkti z garancijo, ki bodo združeni v skupino GMxB produktov. Tu lahko 'x' označuje različne garancije, ki jih zavarovalnica zajame v svojo ponudbo. Za nas bodo v nadaljevanju pomembni predvsem GMSB produkti, ki predstavljajo garancijo v primeru doživetja. V ta model bomo kasneje vpeljali še GMDB produkte, kjer bodo zajeta tudi minimalna garantirana izplačila v primeru prezgodnje smrti. V drugem poglavju bo predstavitvi različnih produktov sledila še predstavitev povezave garancij z opcijami. Posebej bo predstavljena evropska prodajna opcija in binomski algoritem za vrednotenje in repliciranje opcij v binomskem modelu. Slednjega bomo uporabili v obeh strategijah upravljanja z varovalnim portfeljem, ki sta glavni temi te doktorske disertacije.

V tretjem poglavju bo predstavljena prva strategija upravljanja z varovalnim portfeljem, ki smo jo razvili v okviru raziskovalnega dela pri nastajanju te doktorske disertacije. Kot uvod v poglavje bo predstavljen koncept Snellove ovojnice. Še posebej bo obravnavana Snellova ovojnica na korenskem drevesu, kjer bomo sam koncept vložili v finančne okvirje in pokazali, tako s primerom kot z intuitivno razlago, da je Snellova ovojnica pravi pristop v našem raziskovanju. V nadaljevanju poglavja bo sledila predstavitev strategije. Ta je postavljena v Cox-Ross-Rubinsteinov model in temelji na primerjavi pričakovane vrednosti primanjkljaja za zavarovalnico, ki mora ob izteku pogodb zagotoviti minimalno zajamčeno izplačilo, in cene opcij, ki bi zavarovalnico obvarovale pred tveganjem izgube. Strategija maksimizira razliko med pričakovanim primanjkljajem in ceno opcij, oziroma, išče optimalni čas nakupa opcij, ko je cena opcije v primerjavi s pričakovanim primanjkljajem najmanjša. Osnovni model ne vsebuje smrtnosti, rezultati strategije so predstavljeni z numeričnimi simulacijami. Kasneje bo v model vpeljana smrtnost, kar pomeni, da imamo dve zaporedji slučajnih spremenljivk. Prvo je gibanje cene vzajemnega sklada, v katerega so bile investirane premije, drugo pa gibanje smrtnosti. Obravnavan bo primer, ko zavarovalnica zavaruje delež zavarovancev, ki je enak številu živih zavarovancev v trenutku nakupa opcij in primer, ko zavaruje pričakovan delež živih zavarovancev ob izteku pogodbe glede na podatke ob času nakupa opcij. Vsi primeri bodo zajeti v numeričnih simulacijah. Model bo razširjen še z zagotavljanjem izplačil v primeru prezgodnje smrti.

V četrtem poglavju bo predstavljena druga strategija upravljanja z varovalnim portfeljem. V uvodu v poglavje bodo predstavljena pravila optimalnega ustavljanja na markovskih verigah. Obravnavan bo primer z dvema danima omejenima funkcijama c in g in iskanjem najmanjše pričakovane vrednosti nekega izraza, ki je funkcija danih funkcij c in g. Predstavljene bodo enačbe dinamičnega programiranja in izreki, ki dajo rešitev problema optimalnega ustavljanja. V novi strategiji upravljanja bodo uporabljeni že znani koncepti na primeru parov slučajnih spremenljivk, ki v našem primeru spet predstavljata gibanje cene sklada in gibanje smrtnosti. Koncepti bodo vkomponirani v finančni okvir, kjer bosta dani funkciji predstavljali ceno opcij, ki lahko zavarovalnico zavarujejo pred tveganji izgube zaradi obveznosti do zavarovancev, in določen delež, ki si ga zavarovalnica letno jemlje v primeru pozitivnega gibanja cene sklada in možnih drugih pogojih, za potrebe pokritja izgub. Na koncu poglavja bodo predstavljeni rezultati numeričnih simulacij strategije. Vse numerične simulacije so bile narejene v računalniškem programu Matlab in so rezultat lastnega dela avtorice doktorske disertacije.

V petem poglavju bodo povzeti glavni rezultati doktorske disertacije in njihov prispevek na področju aktuarske matematike.

Rezultati te doktorske disertacije so zajeti v [14] in [15] in so sprejeti v objavo v mednarodnih matematičnih revijah s faktorjem vpliva.

Poglavje 2

Naložbeni zavarovalniški produkti z garancijo

V tem poglavju bomo predstavili naložbene zavarovalniške produkte z garancijo. Nato bomo predstavili še povezavo garancij z opcijami.

2.1 GMxB produkti

Z izrazom variabilna zavarovanja se zajame širok spekter investicijskih zavarovalniških produktov, katerih vrednost se lahko zavaruje pred investicijskim tveganjem ali pred tveganjem prezgodnje smrti z izborom primerne garancije. Variabilno zavarovanje je dolgoročna investicija, največkrat je uporabljena kot zagotavljanje dohodka v času po upokojitvi. Pod določenimi pogoji je taka investicija zajeta v davčni olajšavi. Variabilna zavarovanja so se najprej pojavila v Združenih državah Amerike v letu 1952. V zadnjih 20 letih so doživela velike spremembe, saj so se iz prvotnih preprostih pogodb razvila v pogodbe z visoko stopnjo fleksibilnosti in so popularna tako v ZDA, kot v Evropi in Aziji.

Glavna razlika med tradicionalnimi zavarovalniškimi produkti in variabilnimi zavarovanji je, da lahko pri slednjih zavarovanec izbira med različnimi garancijami, ki se lahko nanašajo na akumulacijsko dobo pogodbe, na prezgodnjo smrt zavarovanca ali pa na pokojninska varčevanja. Garancije se na kratko zapiše kot GMxB (Guaranteed Minimum Benefit), kjer se lahko z 'x' označi akumulacijo (A), smrt (D - *angl.* death), prihodek (I - *angl.* income), delni umik (W - *angl.* withdrawal) ali prekinitve (S - *angl.* surrender). Vse garancije predstavljajo zaščito zavarovančevega varčevalnega računa. Prva od naštetih ščiti varčevalni račun v akumulacijski fazi, tipično v delovni dobi zavarovanca, GMDB ščiti varčevalni račun v primeru prezgodnje smrti zavarovanca v akumulacijski dobi in mogoče še nekaj let po upokojitivi, GMIB po upokojitvi, še posebej v primeru dolge življenjske dobe zavarovanca, GMSB pa v primeru prekinitve pogodbe zagotavlja zavarovancu nek znesek izplačila.

V nekaterih državah se lahko uspeh variabilnih zavarovanj pripiše tudi davčnim olajšavam, ki jih ponuja zakonodaja z namenom spodbujanja individualnih pokojninskih varčevanj. Tipično se davčne olajšave nanašajo na akumulacijsko dobo pogodbe, tako da se šteje variabilno zavarovanje kot neobdavčena investicija, vendar so predčasna izplačila, torej umik od pogodbe, lahko dodatno obdavčena.

Zavarovalnice se s ponujanjem takih produktov soočajo s številnimi tveganji - smrtnost, dolgoživost, gibanje finančnih trgov, obnašanje zavarovanca in druge. Ni popolnoma jasno, kako so posamezna tveganja povezana med sabo, zato je še posebej pomembno, kako naj se zavarovalnica zavaruje pred temi tveganji. Zavarovalnica se mora že pri sestavljanju pogodb intenzivno ukvarjati s tem kako vrednotiti in varovati ponujene garancije. Zato je potrebno razviti prave pristope upravljanja s tveganji, kjer se obravnava opisana tveganja. Poleg že omenjenih tveganj se zavarovalnice soočajo tudi s tveganji, ki so povezana z nepredvideno fluktuacijo števila smrti oziroma s tveganjem sistematičnih odklonov v številu smrti v prihodnosti. Namreč težko je napovedati, kakšen bo prihodnji trend smrtnosti, kam se bo gibala. Potem so tu še tveganje gibanja trga, tveganje stroškov, tveganja spreminjanja cen v kreditiranju itn.

Upravljanje s tveganji je običajno sestavljeno iz več faz. Prva faza je *identifikacija tveganja* - vsak vir tveganja mora biti identificiran, preiskan in ugotovljeno mora biti ali se je mogoče zaščititi pred tveganjem ali ne.

Druga faza je *ocena tveganja*, kjer je treba v obzir vzeti več virov tveganja. Pri naložbenih življenjskih zavarovanjih je še posebno treba integrirano obravnavati smrtnost in finančna tveganja, kot tudi tvegano obnašanje zavarovanca.

Tretji korak pa predstavljajo *ukrepi za obvladovanje tveganja*. Pod dejavnosti za obvladovanje tveganja spadajo predvsem izbira tabele smrtnosti, delež pri dobičku, struktura in vrednotenje minimalnih garancij. Dejavnosti za financiranje tveganja pa so prenosi tveganja, bodisi prek pozavarovanj bodisi z rešitvami, ki jih ponuja kapitalski trg.

2.1.1 Struktura GMxB produktov

Najbolj obširno je področje GMxB produktov predstavljeno v člankih in publikacijah, katerih avtorji so A. R. Bacinello in soavtorji ([10], [9]), M. Ledlie in soavtorji v [16] in E. Pittaco in soavtorji v [17]. Za vpogled v starejšo literaturo iz področja variabilnih zavarovanj citiramo [18] in [19].

Kot omenjeno prej, variabilna zavarovanja združujejo najbolj atraktivne komercialne lastnosti naložbenih zavarovanj in udeležbenih življenjskih zavarovanj: dinamične investicijske možnosti, varovanje pred finančnimi tveganji, izplačila v primeru smrti. Predstavljajo tudi moderne rešitve za pokojninska varčevanja.

Variabilna zavarovanja so naložbene pogodbe z različnimi garantiranimi izplačili v primeru smrti ali doživetja. Uznačimo jih z GMxB, kjer 'x' predstavlja vrsto garancije. Najprej jih lahko grobo razdelimo na dve skupini:

- garantirana minimalna izplačila v primeru smrti GMDB (Guaranteed Minimum Death Benefits),
- garantirana minimalna izplačila v primeru doživetja GMLB (Guaranteed Minimum Living Benefits).

Drugo skupino lahko naprej razdelimo na:

- garantirana minimalna izplačila v akumulacijski dobi GMAB (Guaranteed Minimum Accumulation Benefits),

- garantirana minimalna izplačila v primeru doživetja GMIB (Guaranteed Minimum Income Benefits),
- garantirana minimalna izplačila v primeru delnega umika pogodbe GMWB (Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits),
- garantirana minimalna izplačila v primeru prekinitve pogodbe znotraj akumulacijske dobe GMSB (Guaranteed Minimum Surrender Benefits).

Variabilna zavarovanja so običajno sestavljena iz enkratne premije ali iz periodičnih premij. Z izjemo nekaterih predhodnih stroškov se celoten znesek premij investira v referenčni portfelj, ki ga je izbral zavarovanec oziroma nosilec zavarovalne police. Zavarovanec lahko izbira med bolj ali manj tveganimi naložbenimi možnostmi, tako imenovanimi dinamičnimi ali konzervativnimi strategijami. Pod določenimi pogoji lahko brez stroškov zamenja izbrano naložbeno strategijo, na primer, lahko to stori največ enkrat letno.

Stroške zagotavljanja minimalnih garancij (in zraven administrativne stroške, stroške vodenja naložbe in druge stroške) se ne zaračuna ob sklenitvi pogodbe, ampak se zaračunava kot letni odbitek v velikosti določenega odstotka vrednosti zavarovalnega računa. To zagotavlja večjo transparentnost same pogodbe, saj mora biti vsak odbitek na računu javljen nosilcu zavarovalne police. Garancije lahko zavarovanec dodaja ali odvzema tudi po sklenitvi pogodbe. Posledično se potrebni stroški zagotavljanja izbrane garancije naknadno dodajo oziroma ukinejo.

2.1.2 Minimalna garantirana izplačila

Naj P označuje enkratno premijo in $T \geq 0$ konec akumulacijske dobe pogodbe. V primeru $T = 0$ nekatere garancije izgubijo pomen. Osredotočili se bomo na primer enkratne premije, saj je to osnova tudi za produkte z večkratnimi vplačili. Naj bo z A_t označena vrednost zavarovalnega računa ob času t. Ta vrednost je seveda odvisna od razvoja referenčnega sklada, v katerega se investira enkratna premija. Naj bo privzetek, da so vse garancije izbrane ob času t in se ne spreminjajo skozi celo trajanje pogodbe.

Minimalna garancija v primeru smrti GMDB običajno velja za trajanje akumulacijske dobe, pri nekaterih zavarovalnicah je lahko vključenih še nekaj dodatnih let, do neke določene starosti. Strukturirana je tako, da v primeru smrti zavarovanca pred iztekom pogodbe, zavarovalnica zavarovalnim upravičencem izplača večjo vrednost izmed vrednosti zavarovalnega računa in neke garantirane vrednosti. Za $t \leq T$ je torej izplačilo formulirano kot

$$b_t^D = \max(A_t, G_t^D). \tag{2.1}$$

Garantiran znesek je lahko fiksen ali odvisen od vrednosti zavarovalnega računa. Primeri fiksnega zneska so:

- neto znesek vplačane premije, zmanjšan za morebitne umike:

$$G_t^D = P; \tag{2.2}$$

- obrestovan znesek neto vplačane premije, obrestovan po neki garantirani obrestni meri:

$$G_t^D = Pe^{\delta t}, \tag{2.3}$$

  kjer je lahko garantirana obrestna mera δ določena vnaprej in enaka skozi celotno trajanje pogodbe ali pa je odvisna od časa in je modificirana v vnaprej določenih časovnih intervalih. V primeru, da zavarovanec umakne del vplačane premije, se garancija proporcionalno zmanjša.

Primeri garantiranega minimalnega izplačila v primeru smrti, ki so odvisni od vrednosti zavarovalnega računa pa so:

- najvišja vrednost računa izmed vseh vrednosti, ki so bile zabeležene ob vnaprej določenih časovnih trenutkih (*angl.* ratchet guarantee):

$$G_t^D = \max_{t_i < t} A_{t_i}, \tag{2.4}$$

  kjer t_i teče po $i = 0, 1, \ldots, n$ in velja $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T$.

- vrednost zavarovalnega računa na vnaprej določen datum, znan kot datum resetiranja (*angl.* reset guarantee):

$$G_t^D = A_{\max(t_i; t_i < t)}, \tag{2.5}$$

kjer časi $t_i, t = 0, 1, \ldots, n$ predstavljajo datume, na katere se vrednost garancije na novo oblikuje.

Razlika med zadnjima dvema garancijama je, da se pri prvi (t.i. ratchet garanciji) vrednost garancije nikoli ne zmanjša, pri drugi (t.i. reset garanciji) pa se to lahko zgodi.

Možne so tudi kombinacije različnih oblik garancij, na primer:

$$G_t^D = \max(Pe^{\delta t}, \max_{t_i < t} A_{t_i}). \tag{2.6}$$

Garancije GMAB zagotavljajo minimalno izplačilo zavarovancu na nek vnaprej določen datum, običajno ob koncu akumulacijske dobe pogodbe, v primeru doživetja zavarovanca. Višina izplačila se lahko zapiše kot

$$b_T^A = \max(A_T, G_T^A). \tag{2.7}$$

Garancije G_T^A se lahko zapišejo podobno kot v primeru GMDB garancij.

Garancije GMIB zagotovijo zavarovancu življenjsko rento od nekega specifičnega trenutka v prihodnosti naprej. Lahko jih razdelimo v dve skupini:

- garancija za višino izplačane rente, kjer je obrok rente:

$$b^I = \alpha_T \max(A_T, G_T^I) \tag{2.8}$$

in je α_T participatorni delež, ki je določen glede na pogoje trga ob času T in G_T^I definiran podobno kot v prejšnjih primerih.

- garancija na participatorni delež, kjer lahko obrok rente zapišemo kot

$$b^I = A_T \max(\alpha_T, g), \tag{2.9}$$

kjer je g garantiran participatorni delež.

Garancije GMSB zagotavljajo izplačilo v primeru, da zavarovanec odstopi od pogodbe ob času $t < T$. Izplačilo lahko zapišemo kot

$$b_t^S = \max(A_t, G_t^S), \tag{2.10}$$

kjer lahko G_t^S definiramo podobno kot v (2.2) - (2.6).

Garancije GMWB omogočajo delna periodična izplačila v času trajanja pogodbe, kjer se posledično vrednost zavarovalnega računa periodično zmanjšuje. Garancija se nanaša na višino periodičnih izplačil in na trajanje delnih izplačil. Periodično izplačilo, označeno z b_t^W, je definirano kot določen odstotek osnovne vrednosti, običajno je to zavarovalni račun na dan, ki je določen v GMWB. Torej, izplačilo lahko zapišemo kot:

$$b_t^W = \beta_t G_t^W, \tag{2.11}$$

kjer t pripada množici datumov, določenih v zavarovalni pogodbi, β_t predstavlja delež, ki je tudi določen v zavarovalni pogodbi in G_t^W osnovno vrednost. Osnovna vrednost je po potrebi spremenjena, če na primer zavarovanec želi večje ali manjše izplačilo kot je določeno v pogodbi. GMWB zagotavlja tudi, da pooblaščenci zavarovanca v primeru njegove smrti dobijo izplačan preostanek osnovne vrednosti (če je le ta pozitiven). V primeru, da ob koncu zavarovalne dobe ostane na računu nek pozitiven znesek, se ga izplača zavarovancu. Strošek garancije zavarovalnica obračuna v času trajanja garancije.

2.1.3 Povezava garancij z opcijami

Binomski model

Finančni trg je poln, če je lahko vsak (izveden) finančni instrument popolno varovan in posledično tudi enolično ocenjen. Tak primer je CRR model, ki so ga predlagali Cox, Ross in Rubinstein (1979), [3]. V CRR modelu je finančni trg sestavljen iz dveh osnovnih trgovalnih sredstev, delnice in varčevalnega računa. Vrednost delnice ob času $t = 0, 1, \dots, T$ je S_t, vrednost varčevalnega računa pa B_t. Trgovanje se dogaja ob koncu fiksnih časovnih enot, ki so enako dolge. Sprememba v vrednosti delnice med dvema trgovalnima momentoma lahko zavzame samo dve različni vrednosti, posledično je model poznan tudi kot binomski model. Med dvema trgovalnima časoma je na varčevalnem računu pripisan delež konstantnih obresti r.

Dinamiko varčevalnega računa lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (1+r)B_n, \\ B_0 &= 1, \end{aligned}$$

dinamiko vrednosti delnice pa kot

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n \cdot Z_n, \\ S_0 &= s. \end{aligned}$$

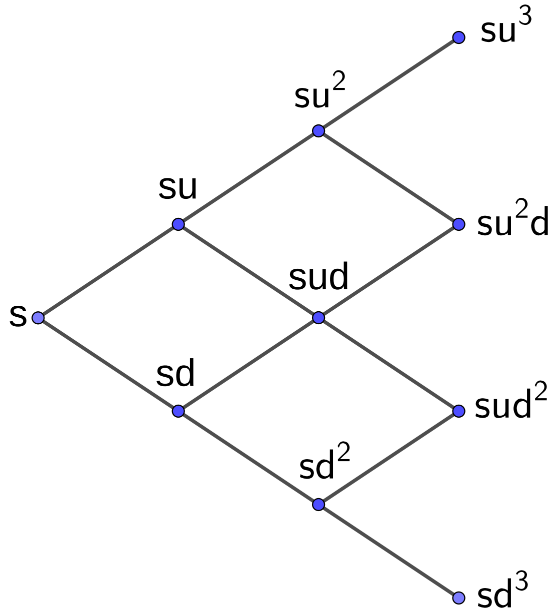
Tukaj so $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenjivke s porazdelitvijo

$$P(Z_n = u) = p_u,$$
$$P(Z_n = d) = p_d.$$

Dinamiko gibanja vrednosti delnice lahko ponazorimo na rekombiniranem binomskem drevesu oziroma binomski mreži kot prikazano na sliki 2.1.

Vrednost vsakega vozlišča se lahko opiše z

$$S_t = su^k d^{t-k}, \quad k = 0, \dots, t.$$



Slika 2.1: Rekombinirano binomsko drevo.

Rezultati iz nadaljevanja tega razdelka so povzeti po [4], [20] in [12].

Definicija 2.1.1. **Trgovalna strategija** *je slučajni proces*

$$h_t = (x_t, y_t), \quad t = 1, \ldots, T,$$

kjer je h_t funkcija $S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}$. Velja naj $h_0 = h_1$. **Vrednost portfelja** *h je enaka*

$$V_t^h = x_t(1+r) + y_t S_t.$$

Interpretacija formalne definicije je, da je x_t znesek, ki ga imamo položenega v banki od trenutka $t-1$ do trenutka t, y_t pa predstavlja število delnic, ki jih imamo v lasti od trenutka $t-1$ do trenutka t. Dopustimo, da je portfelj odvisen od vseh informacij, pridobljenih do trenutka t.

Definicija 2.1.2. *Trgovalna strategija h je* **samofinancirana***, če za vsak $t = 0, 1, \ldots, T$ velja*

$$x_t(1+r) + y_t S_t = x_{t+1} + y_{t+1} S_t.$$

To pomeni, da ne dodajamo ali odvzemamo denarja iz portfelja.

Definicija 2.1.3. **Arbitraža** *je samofinanciran portfelj* h *z lastnostmi*

$$\begin{aligned} V_0^h &= 0, \\ P(V_T^h \geq 0) &= 1, \\ P(V_T^h > 0) &> 0. \end{aligned}$$

Sledi potreben pogoj za izostanek arbitraže.

Lemma 2.1.4. *Če je model brez arbitraže, potem mora veljati*

$$d \leq (1+r) \leq u. \tag{2.12}$$

Dokaz: Predpostavimo, da ne velja eden izmed pogojev iz (2.12). Naj velja torej $s(1+r) > su$. Potem velja tudi $s(1+r) > sd$, kar pomeni, da je vedno bolj profitabilno imeti denar na varčevalnem računu kot ga investirati v delnico. Poglejmo sedaj strategijo $h_1 = (s, -1)$, kar bi pomenilo, da prodamo delnico in ves denar položimo na varčevalni račun. Velja $V_0^h = x_0 + y_0 \cdot s = s - s = 0$ in za $t = 1$

$$V_1^h = s(1+r) - sZ_1,$$

kar je po predpostavki pozitivno in sledi arbitraža. S protislovjem je lema dokazana. □

Definicija 2.1.5. **Martingalske verjetnosti** q_u *in* q_d *so definirane kot verjetnosti, za katere velja*

$$s = \frac{1}{1+r} E^Q(S_{t+1} | S_t = s).$$

Iz definicije sledi, da so martingalske verjetnosti enake

$$\begin{aligned} q_u &= \tfrac{1+r-d}{u-d} \\ q_d &= \tfrac{u-1-r}{u-d} \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.1.4 Prodajna evropska opcija

V nadaljevanju bomo v binomski model vpeljali izvedene finančne instrumente, v našem primeru bo to opcija, zato jih najprej spoznajmo.

Poznamo nakupno (call) opcijo in prodajno (put) opcijo. Prodajna opcija daje imetniku pravico, ne pa dolžnost, da v nekem vnaprej dogovorjenem času v prihodnosti proda vnaprej določen finančni instrument (na primer delnico) po vnaprej dogovorjeni ceni.

Glede na izvršni čas opcije ločimo dve vrsti opcij. Evropska opcija se lahko unovči samo na dan zapadlosti, ameriška pa se lahko unovči kadarkoli do dneva zapadlosti.

Definicija 2.1.6. Izplačila izvedenega finančnega instrumenta *v času T predstavimo s slučajno spremenljivko X*

$$X = \Phi(S_T),$$

kjer je Φ neka dana funkcija.

Primer 2.1.1. *Za evropsko prodajno opcijo velja*

$$X = (K - S_T)_+,$$

kjer je K izvršna cena opcije in S_T vrednost delnice oziroma vzajemnega sklada ob času zapadlosti T.

Dve glavni vprašanji, ki se tičeta izvedenih finančnih inštrumentov oziroma opcij, sta kako pravično postaviti ceno taki pogodbi (vrednotenje opcij) in kako naj se ponudnik opcije zavaruje pred finančnim tveganjem (varovanje opcij).

Prva sta naložbena življenjska zavarovanja z garancijami povezala z opcijami že Brennan in Schwartz leta 1976, [6]. Prepoznala sta, da je izplačilo naložbene police z garancijo povezano z izplačilom evropske opcije.

Naj bo vrednost izplačila naložbene zavarovalne pogodbe z garancijo enaka

$$G_t = \max(x_t, g_t), \tag{2.14}$$

kjer je x_t vrednost referenčnega portfelja ob času t in g_t neka minimalna zagotovljena garancija. G_t lahko zapišemo tudi kot

$$G_t = g_t + \max(x_t - g_t, 0), \tag{2.15}$$

ali

$$G_t = x_t + \max(g_t - x_t, 0). \tag{2.16}$$

Enakost (2.15) izraža izplačilo kot vsoto garancije g_t in izplačila nakupne opcije, kjer je izvršna cena za nakup referenčnega portfelja g_t. Enačba (2.16) pa izraža izplačilo kot vsoto variabilne vrednosti x_t in izplačila prodajne opcije na referenčni portfelj, kjer g_t predstavlja izvršno ceno opcije. Prodajno opcijo je smiselno unovčiti samo v primeru, ko je izvršna cena opcije višja od vrednosti portfelja.

2.1.5 Binomski algoritem

V nadaljevanju vpeljimo izvedene finančne instrumente v naš binomski model. Rabimo še nekaj teorije finančnih trgov.

Definicija 2.1.7. *Dano izplačilo izvedenega finančnega instrumenta X je* **dosegljivo***, če obstaja taka samofinancirana strategija h, da velja*

$$V_T^h = X$$

z verjetnostjo 1*. V tem primeru rečemo, da je portfelj trgovalne strategije h* **varovalni** *(ali zaščitni ali repliciran)* **portfelj***. Če se da replicirati vse izvedene finančne instrumente, rečemo, da je finančni trg* **poln***.*

Sedaj nas zanima, kaj bi bila prava cena za pogodbo X. Recimo, da je X dosegljiva z uporabo samofinancirane strategije h. Fiksirajmo t in recimo, da imamo ob času t na razpolago znesek V_t^h. Potem lahko ta znesek investiramo v portfelj strategije h in ga skozi čas rebalansiramo brez dodatnih stroškov tako, da bomo imeli v trenutku T slučajno vrednost V_T^h. Po definiciji je $V_T^h = X$ z verjetnostjo 1, torej bo ne glede na slučajno gibanje delnice vrednost našega portfelja enaka vrednosti izvedenega finančnega instrumenta. Torej sta iz finančnega vidika portfelj strategije h in izvedeni finančni instrument ekvivalentna in morata imeti enako ceno.

Torej, če je X dosegljiva s strategijo h in je možno v nekem trenutku t kupiti X ceneje kot je vrednost V_t^h (ali jo prodati po ceni višji od vrednosti V_t^h), potem je možno doseči arbitražo. Sledi:

Princip cenitve: Če je izvedeni finančni instrument X dosegljiv s strategijo h, potem je smiselna cena za X

$$\Pi(t;X) = V_t^h, \quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

Izrek 2.1.8. *Binomski model je poln. To pomeni, da je lahko vsak izveden finančni instrument varovan (repliciran) s samofinancirano strategijo.*

V naslednjem izreku je podan algoritem za izračun take samofinancirane strategije v binomskem modelu. Torej bo z dokazom naslednjega izreka dokazan tudi izrek (2.1.8).

Izrek 2.1.9. (Binomski algoritem) *Naj bo $X = \Phi(S_T)$ izplačilo nekega izvedenega finančnega instrumenta. Potem ga lahko repliciramo s samofinancirano strategijo. Če z $V_t(k)$ označimo vrednost portfelja strategije v vozlišču (t,k), potem je lahko $V_t(k)$ izračunan rekurzivno s shemo*

$$\begin{aligned} V_t(k) &= \tfrac{1}{1+r}(q_u V_{t+1}(k+1) + q_d V_{t+1}(k)) \\ V_T(k) &= \Phi(s u^k d^{T-k}), \end{aligned}$$

kjer so martingalske verjetnosti enake

$$\begin{aligned} q_u &= \tfrac{1+r-d}{u-d}, \\ q_d &= \tfrac{u-1-r}{u-d}. \end{aligned}$$

Varovalni portfelj je potem dan z

$$\begin{aligned} x_t(k) &= \tfrac{1}{1+r}\tfrac{uV_t(k)-dV_t(k+1)}{u-d}, \\ y_t(k) &= \tfrac{1}{S_{t-1}} \cdot \tfrac{V_t(k+1)-V_t(k)}{u-d}. \end{aligned}$$

Cena, ki ne omogoča arbitraže, je ob času $t = 0$ dana z $V_0(0)$.

Dokaz: Gremo z indukcijo. Začnemo na listih ob času T in se pomikamo nazaj do korena ob času $T = 0$.

Začnemo z določanjem cene opcije ob času T. Iz principa cenitve sledi

$$\Pi(T,X) = V_T^h = X,$$

torej vrednost izvedenega finančnega instrumenta ob času T. Če gremo en korak nazaj od časa $t+1$ v čas t, je vrednost enote delnice, od katere je odvisna vrednost izvedenega finančnega instrumenta, enaka S_t. Izognili bi se radi arbitraži, zato mora veljati

$$V_t^h = \frac{1}{1+r} E^Q(V_{t+1}^h | V_t^h), \tag{2.17}$$

kjer je martingalska mera Q enolično določena z (2.1.5). Če uporabimo oznake iz izreka, torej da z (t, k) označimo vsako vozlišče na drevesu, so enačbe iz izreka ekvivalentne (2.17). Vrednosti x_t in y_t sledijo iz definicije samofinancirane strategije.

□

Naslednja posledica sledi direktno iz izreka (2.1.9).

Posledica 2.1.10. *Cena izvedenega finančnega instrumenta, ki obvaruje pred arbitražo, ob času $t = 0$ je dana z*

$$\Pi(0, X) = \frac{1}{(1+r)^T} E^Q(X),$$

kjer je Q martingalska mera. Bolj eksplicitno velja

$$\Pi(0, X) = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} \Phi(su^k d^{T-k}),$$

kjer je Φ vrednost izplačila izvedenega finančnega instrumenta, ki je v času T odvisno od vrednosti S_T.

Posledica 2.1.11. *Pogoj*

$$d < (1+r) < u$$

je zadosten in potreben pogoj za izključitev arbitraže.

Dokaz: Implikacija, da iz predpostavke o izključitvi arbitraže sledi pogoj, sledi iz (2.1.4).

Predpostavimo sedaj, da je h samofinancirana strategija, za katero velja

$$P(V_T^h \geq 0) = 1,$$
$$P(V_T^h > 0) > 0.$$

Iz (2.1.10) in iz zgornjih dveh pogojev sledi

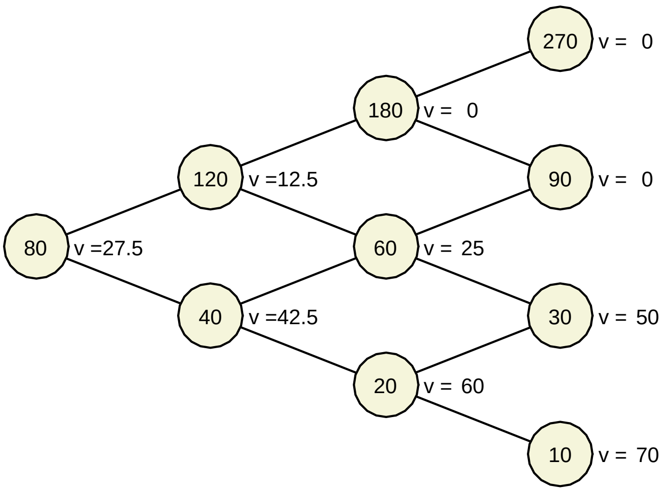
$$V_0^h = \frac{1}{(1+r)^T} E^Q(V_T^h) > 0,$$

kar pomeni, da je h strategija, ki ne omogoča arbitraže. □

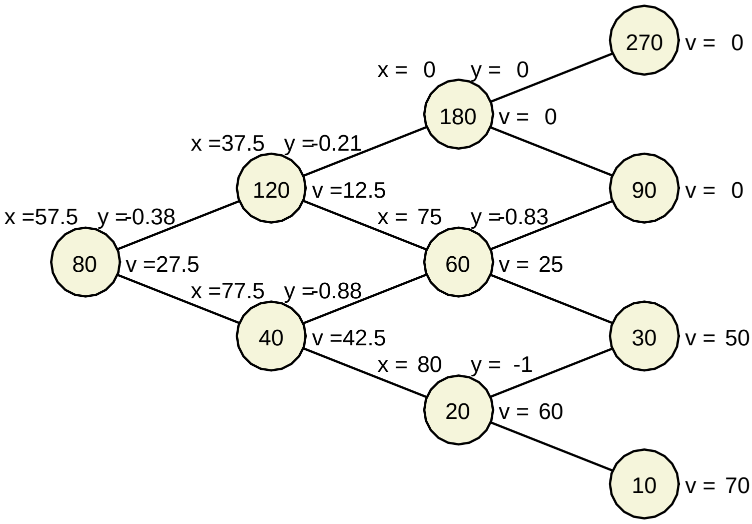
Primer 2.1.2. *Naj bo* $T = 3$*,* $S_0 = 80$*,* $u = 1,5$*,* $d = 0,5$*,* $p_u = 0,6$*,* $p_d = 0,4$ *in* $r = 0$*. Naj bo* X *evropska prodajna opcija, torej velja*

$$X = \max(K - S_T, 0),$$

kjer je $K = 80$*. Z uporabo binomskega algoritma dobimo za izračun cene opcije in varovalnega portfelja naslednje rezultate, predstavljene na slikah 2.2 in 2.3.*



Slika 2.2: Uporaba binomskega algoritma za izračun cene evropske prodajne opcije s $K = 80$.



Slika 2.3: Uporaba binomskega algoritma za izračun varovalnega portfelja za evropsko prodajno opcijo s $K = 80$.

Poglavje 3

Strategija z optimalnim preskokom

V tem razdelku bomo predstavili alternativno strategijo upravljanja z varovalnim portfeljem pri naložbenih produktih z garancijo. Vodilni avtorji iz tega področja so Nonnenmacher ([8],[21], [22], [23]), Møller ([5],[24], [25]) in Bacinello ([10], [9]). Navajamo še druge reference [17], [26], [27].

Najprej si bomo ogledali problem optimalnega ustavljanja in optimalno rešitev s Snellovo ovojnico, nato pa implementacijo te rešitve v našo strategijo.

3.1 Snellova ovojnica

Model upravljanja s tveganji, kjer bomo iskali optimalni čas preskoka iz ene varovalne strategije na drugo, bo temeljil na Snellovi ovojnici in iskanju optimalnega časa ustavljanja. Naslednji rezultati so povzeti po [12] in [13].

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ verjetnostni prostor.

Definicija 3.1.1. *Naj bo* $\{\mathcal{F}_n\}_{0\leq n\leq N}$ *filtracija, torej naraščajoče zaporedje* σ*-algeber. Naj bo* $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ *prilagojeno zaporedje slučajnih spremenljivk. Zaporedje* $(U_n)_{0\leq n\leq N}$*,* *definirano kot*

$$\begin{aligned} U_N &= Z_N, \\ U_n &= \max(Z_n, E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \quad \forall n \leq N-1, \end{aligned}$$

se imenuje Snellova ovojnica zaporedja $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$.

Pokazati se da, da je $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ najmanjši supermartingal, ki dominira zaporedje $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$.

Dokaz: Iz enakosti

$$U_n = \max(Z_n, E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n))$$

sledi, da je zaporedje $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ supermartingal, ki dominira $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$. Naj bo sedaj tudi zaporedje $(T_n)_{0\leq n\leq N}$ supermartingal, ki dominira $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$. Velja $T_N \geq U_N$ in če velja $T_n \geq U_n$, potem sledi

$$T_{n-1} \geq E(T_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq E(U_n|\mathcal{F}_{n-1}),$$

od koder sledi

$$T_{n-1} \geq \max(Z_{n-1}, E(U_n|\mathcal{F}_{n-1})) = U_{n-1}.$$

Obratna indukcija pokaže, da (T_n) dominira (U_n). Sledi, da je zaporedje (U_n) najmanjši supermartingal, ki dominira $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$. □

Definicija 3.1.2. *Slučajna spremenljivka* ν*, ki ima vrednosti v množici* $\{0, 1, \ldots, N\}$*, se imenuje čas ustavljanja, če za vsak* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *velja*

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Definicija 3.1.3. *Čas ustavljanja* $\nu \in \tau_{0,N}$ *glede na filtracijo* $\{\mathcal{F}_n\}_{0\leq n\leq N}$ *se imenuje optimalen za zaporedje* $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$*, če*

$$E\left(Z_\nu\right) = \sup_{\mu\in\tau_{0,\infty}} E(Z_\mu),$$

kjer je $\tau_{0,N}$ *množica vseh časov ustavljanja, ki imajo vrednosti iz množice* $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

Naslednji izrek karakterizira optimalne čase ustavljanja.

Izrek 3.1.4. *Čas ustavljanja* $\nu \in \tau_{0,N}$ *je optimalen, če in samo če je* $Z_\nu = U_\nu$ *in je ustavljeno zaporedje* $(U_{\nu\wedge n})_{0\leq n\leq N}$ *martingal.*

Dokaz: Predpostavljamo, da je ustavljeno zaporedje U_n^ν martingal. Potem velja $U_0 = E(U_\nu|\mathcal{F}_0)$ in posledično tudi $U_0 = E(Z_\nu|\mathcal{F}_0)$. Pokazati je treba še optimalnost. Vzemimo nek čas ustavljanja $\tau \in \tau_{0,N}$. Potem je ustavljeno zaporedje U^τ supermartingal in velja

$$\begin{aligned} U_0 &\geq E(U_N^\tau|\mathcal{F}_0) = E(U_\tau|\mathcal{F}_0) \\ &\geq E(Z_\tau|\mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

Sledi, da je čas ustavljanja ν optimalen.
Obratno predpostavimo, da je ν optimalen. Potem velja

$$U_0 = E(Z_\nu|\mathcal{F}_0) \leq E(U_\tau|\mathcal{F}_0)$$

Ampak, ker je U^ν supermartingal, velja tudi

$$E(U_\tau|\mathcal{F}_0) \leq U_0.$$

Sledi

$$E(Z_\nu|\mathcal{F}_0) = E(U_\tau|\mathcal{F}_0) = U_0 \tag{3.1}$$

in ker $U_\nu \geq Z_\nu$ tudi $U_\nu = Z_\nu$.
Iz lastnosti supermartingalov za U_n^ν sledijo neenakosti

$$U_0 \geq E(U_{\nu\wedge n}|\mathcal{F}_0) \geq E(U_\nu|\mathcal{F}_0).$$

Ampak po (3.1) je $E(U_\tau|\mathcal{F}_0) = U_0$ in sledi

$$E(U_{\nu\wedge n}|\mathcal{F}_0) = E(U_\nu|\mathcal{F}_0) = E((U_\nu|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_0).$$

Pri nas velja $U_{\nu\wedge n} \geq E(U_\nu|\mathcal{F}_n)$ in sledi $U_{\nu\wedge n} = E(U_\nu|\mathcal{F}_n)$. To dokazuje, da je (U_n^ν) martingal. $\square$

Naslednja posledica zagotavlja potreben in zadosten pogoj za obstoj optimalnega časa ustavljanja in karakterizira najmanjši optimalni čas ustavljanja.

Posledica 3.1.5. *Najmanjši optimalni čas ustavljanja $\nu \in \tau_{0,N}$ je dan z*

$$\nu_0 = \inf\{n \in \mathbb{N}|U_n = Z_n\}.$$

Dokaz: Preveriti moramo, da je zaporedje $(U_{\nu_0 \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ martingal.

$$\begin{aligned} E(U_{\nu_0 \wedge (n+1)} | \mathcal{F}_n) &= \textstyle\sum_{j=0}^n U_j 1_{\{\nu_0 = j\}} + E(U_{n+1} 1_{\{\nu_0 \geq n+1\}} | \mathcal{F}_n) \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^n U_j 1_{\{\nu_0 = j\}} + 1_{\{\nu_0 \geq n+1\}} E(U_{n+1} | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

Uporabili smo dejstvo, da $\{\nu_0 \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$. Na dogodku $\{\nu_0 \geq n+1\}$ imamo $Z_n < U_n$ in zaradi $U_n = \max(Z_n, E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n))$ je $U_n = E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, od koder sledi

$$E(U_{\nu_0 \wedge (n+1)} | \mathcal{F}_n) = \sum_{j=0}^n U_j 1_{\{\nu_0 = j\}} + 1_{\{\nu_0 \geq n+1\}} U_n = U_{\nu_0 \wedge n}.$$

Sledi, da je zaporedje $(U_{\nu_0 \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ martingal. $\square$

3.1.1 Snellova ovojnica na korenskem drevesu

Naj bo $T = (V, E)$ končno korensko drevo z množico vozlišč V, množico povezav E in globino N. Predpostavimo, da s funkcijo $f : V \to \mathbb{R}$ vsakemu vozlišču pripišemo neko realno število. Predpostavimo, da se povezavam iz vozlišča do vozlišč v nižjem nivoju pripišejo verjetnosti, ki se seštejejo v 1. Slučajni sprehod po drevesu je potem končna markovska veriga, ki se premika po nivojih drevesa z verjetnostmi pripisanimi povezavam. Označimo markovsko verigo z $X_0, X_1, \ldots, X_N$. Definiramo zaporedje

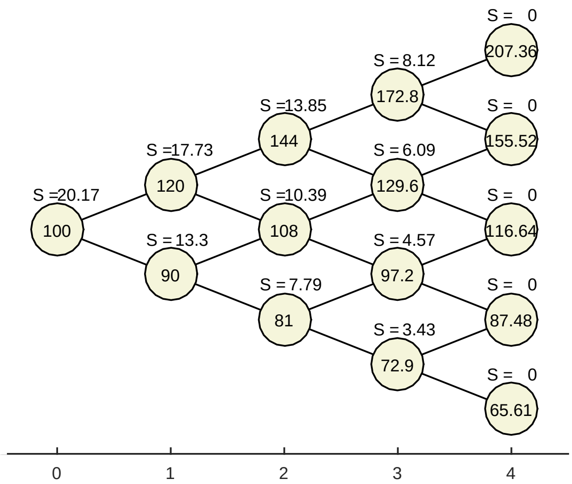
$$Z_k = (1 + r)^{-k} f(X_k).$$

Iščemo čas ustavljanja ν glede na filtracijo markovske verige, ki bo maksimiziral pričakovano vrednost $E((1 + r)^{-\nu} f(X_\nu))$, kjer je r konstantna obrestna mera. Rešitev dobimo z uporabo izreka 3.1.4. Opisano z besedami lahko rečemo, da se bo sprehajalec, ki se slučajno sprehaja po drevesu (od korena proti listom), odločil kdaj pobrati število iz vozlišča takrat, da bo pričakovana vrednost pobranega števila največja.

Primer 3.1.1. *Naj bo (V, E) rekombinirano binomsko drevo z globino 4. Na vsakem vozlišču imamo dane neke vrednosti kot vrednosti neke funkcije f. Naj bo $(X_n)_{0 \leq n \leq 4}$ slučajni sprehod na drevesu. Na vsakem koraku se sprehajalec premakne gor z verjetnostjo $p = 0.49$ in dol z verjetnostjo $1 - p = 0.51$. Definirajmo $(U_n)_{0 \leq n \leq 4}$ kot Snellovo ovojnico* *zaporedja* $Z_n = f(X_n)$. *Za namene poenostavitve definirajmo še zaporedje* $(S_n)_{0 \leq n \leq 4}$ *kot*

$$S_n = U_n - Z_n$$

za $n = 0, 1, 2, 3, 4$. *Ko je vrednost* S_n *enaka* 0 *po izreku 3.1.4 sledi, da je takrat dosežen čas ustavljanja* ν_0.

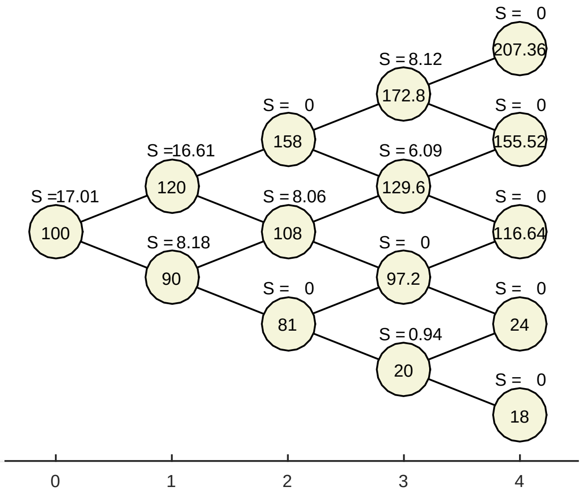


Slika 3.1: Čas ustavljanja na binomskem drevesu, kjer so v vozliščih zapisane vrednosti Z_n.

Interpretacija slik 3.1 in 3.2 je, da je optimalni čas ustavljanja ν_0 *dosežen natanko tedaj, ko je prvič pripisana vrednost nekega vozlišča večja kot pričakovan izkupiček, če bi sprehod nadaljevali.*

Imamo dva primera. Na sliki 3.1 so pripisane vrednosti vozlišč enake razvoju vrednosti nekega vzajemnega sklada. Na vsakem koraku je namreč vrednost števila pomnožena bodisi z u *z verjetnostjo* p *ali z* d *z verjetnostjo* $1 - p$, *kjer sta* u *in* d *enaka za vsak* $n = 0, 1, 2, 3$.

Na sliki 3.2 je prikazan primer, ko so vrednosti sklada nekoliko prirejene. Dve vozlišči na binomskem drevesu na sliki 3.2 imata drugačne vrednosti kot na binomskem drevesu na sliki 3.1.

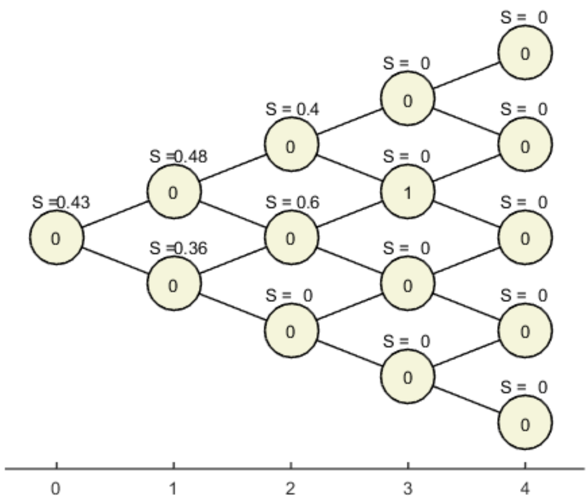


Slika 3.2: Čas ustavljanja na binomskem drevesu s prirejenimi vrednostmi.

Finančna interpretacija bi bila, da se lahko zgodi bodisi večji padec v vrednosti sklada (na primer izplačati je treba več zavarovancev in sredstva vzamemo iz sklada) bodisi vrednost sklada nesorazmerno narase. V obeh primerih se jasno vidi učinek Snellove ovojnice. V primeru padca vrednosti, bi vzeli kar imamo korak preden pride do padca, v primeru nesorazmernega dviga pa vzamemo kar imamo v trenutku dviga vrednosti sklada.

Primer 3.1.2. *Še en primer binomskega drevesa, kjer se lepo vidi učinek čakanja na to, da bomo vzeli, kar se da največ. Na binomskem drevesu so na vozliščih pripisane same ničle, razen v enem vozlišču, ki mu je pripisana vrednost 1.*

Interpretacija slike 3.3 (na naslednji strani) je, da dokler imamo upanje, da "ulovimo" enko, čakamo, v nasprotnem obupamo.



Slika 3.3: Čas ustavljanja na binomskem drevesu, kjer "lovimo" enico.

3.2 Strategija

Predpostavljajmo, da zavarovančevo neto premijo naložbenega zavarovanja z garancijo zavarovalnica investira v vzajemni sklad, za katerega privzamemo, da se njegova cena giblje po preprostem Cox-Ross-Rubinsteinovem modelu. Označimo ceno sklada v vsakem časovnem trenutku s $S_0, S_1, \ldots, S_T$. Privzeta naj bo še konstantna obrestna mera, označimo jo z r. V naslednjem časovnem trenutku je torej trenutna cena vzajemnega sklada pomnožena bodisi z u bodisi z d. Prvi primer se zgodi z verjetnostjo p, drugi z verjetnostjo $q = 1 - p$. Predpostavimo še običajne predpostavke, ki onemogočajo arbitražo: $d < 1 < u$.

Mnoge garancije se lahko interpretira kot izvedene finančne instrumente na podrejenem skladu. Z nakupom ustrezne opcije na začetku zavarovalne dobe lahko zavarovalnica povsem izravna tveganje, če ni tveganja neplačila nasprotne stranke. Izkaže pa se, da nakup opcije na začetku zavarovalne dobe ni optimalna strategija. Pristop, opisan v nadaljevanju, bo izbrati najboljši čas za nakup opcije glede na objektiven kriterij, to bo pričakovan primanjkljaj.

Pod martingalsko mero je pričakovana izguba vedno enaka ceni izvedenega finančnega instrumenta, ki izravna tveganje. Vendar odločitev zavarovalnice ne bo nujno temeljila na martingalski meri, temveč na neki oceni verjetnosti p, ki se lahko razlikuje od martingalskih verjetnosti. Bolj zadržane zavarovalnice večkrat ocenjujejo, da je p manjši od martingaleske verjetnosti. S temi predpostavkami obstaja strategija, ki minimizira pričakovano izgubo zavarovalnice. Strategija bo na koncu podala porazdelitev izgube, ki jo je mogoče uporabiti za izračun potrebnih solventnostnih kapitalskih zahtev. Te bodo zavarovalnici zagotovile ustrezno verjetnost, da se bo lahko obvarovala pred tveganjem izgube. Interakcija s kapitalskimi trgi pa kaže na zahteve skladne s finančnimi trgi, kot jih predvideva Solventnost 2.

Sledili bomo [5] in v model vpeljali smrtnost. Predpostavljali bomo, da je tabela smrtnosti fiksna in da je smrtnost neodvisna od gibanja cene vzajemnega sklada na trgu. O neodvisnosti oziroma odvisnosti teh dveh slučajnih spremenljivk pišejo Dhaene in soavtorji v [28].

Z vpeljavo smrtnosti model ne bo več poln in posledično se razen z nadzaščito ni več mogoče popolnoma zavarovati pred tveganjem. Vendar je našo strategijo še vedno mogoče vpeljati. Pričakovana prihodnja izguba ni več odvisna samo od gibanja cene vzajemnega sklada, v katero je bila neto premija investirana, ampak je odvisna tudi od smrtnosti.

Minimalne garancije, ki jih zagotavlja zavarovalnica, so lahko različnih tipov. V našem raziskovanju smo se osredotočili na primer, ko zavarovanec z zavarovalnico sklene pogodbo, ki mu ob vplačilu zneska x v primeru doživetja zagotavlja izplačilo zneska $x(1+r)^T$. Zagotovljen ima torej nek minimalen donos.

3.2.1 Model

Recimo, da ima m ljudi starih x let v lasti povsem identične naložbene produkte z garancijo G in trajanjem T. Recimo, da zavarovalnica investira neto znesek njihove premije v enoto sklada z začetno vrednostjo S_0. Zavarovalnica torej skupno investira v m enot sklada. Predpostavljajmo še, da so na trgu v vsakem trenutku na razpolago prodajne opcije s poljubnimi izvršnimi cenami in poljubnimi ročnostmi. Ta privzetek model oddalji od realnega stanja, vendar ga privzamemo zaradi poenostavitve. Če bi se želeli približati realnosti, bi bilo potrebno željene opcije aproksimirati z opcijami dosegljivimi na trgu.

Naj $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ predstavlja slučajno gibanje cene vzajemnega sklada na trgu. Privzeli bomo preprost Cox-Ross-Rubinsteinov binomski model, predstavljen v 2.1.3.

Zavarovalnica garantira posamezniku končno izplačilo v višini

$$G = \max\left(S_0(1+r)^T, (1-c)S_T\right),$$

kjer je c delež, ki v primeru ugodnega gibanja cene osnovnega sklada pripade zavarovalnici. Na eni strani bo obravnavano Δ-varovanje, ki zahteva od zavarovalnice, da v vsakem trenutku zagotovlja pokritje primanjkljaja med trenutno vrednostjo sklada in sedanjo vrednostjo zajamčenih izplačil. Torej, če pogledamo za posamezno naložbeno pogodbo, mora zavarovalnica v času t zagotavljati

$$\Delta_t = \left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}}(1+r)^T S_0 - S_t\right)_+,$$

oziroma

$$\Delta_t = \left((1+r)^t S_0 - S_t\right)_+.$$

V primeru Δ-varovanja nas bo zanimala porazdelitev končne izgube, ki bo uporabljena za primerjavo s končno izgubo v primeru alternativne strategije.

Na drugi strani bo obravnavano varovanje z ustrezno prodajno opcijo z vrednostjo

$$X = (G - S_T)_+$$

Sedaj vpeljemo pojem primanjkljaja za zavarovalnico. Pod tem pojmom se razume pozitivna izguba, torej zanima nas samo ali bo zavarovalnica utrpela izgubo ali ne.

Naj L^+ označuje diskontiran primanjkljaj zavarovalnice brez vključenih finančnih instrumentov. Potem velja

$$L^+ = (1+r)^{-T}(mG - mS_T)_+.$$

Vpeljemo σ-algebro $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_u, u \leq t\}$. Pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke L^+ pogojno na $\mathcal{F}_t$ je enaka porazdelitvi slučajne spremenljivke L_t^+

$$L_t^+ = \left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}}(mG - mS_T)\right)_+.$$

Z vpeljavo binomsko porazdeljene slučajne spremenljivke $X \sim \mathrm{Bin}(T-t,p)$, se izraz za L_t^+ spremeni v

$$L_t^+ = \left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}}\left(mG - mS_0 u^{k+X} d^{k+T-t-X}\right)\right)_+ ,$$

kjer k označuje število skokov cene vzajemnega sklada gor do časa t oziroma število ugodnih razvojev trga do časa t, kjer so možne vrednosti $k = 0, 1, \ldots, t$.

S temi predpostavkami lahko izračunamo pogojno pričakovano vrednost primanjkljaja $E(L^+|\mathcal{F}_t) = E(L_t^+)$. Opomnimo, da pričakovano izgubo računamo glede na verjetnostno mero P, ki je subjektivno določena s strani zavarovalnice.

$$E(L_t^+) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \sum_{x=0}^{T-t} \left(mG - mS_0 u^{k+x} d^{T-k-x}\right)_+ P(X = x), \tag{3.1}$$

Izračunamo še ceno O_t za m prodajnih opcij po [4] z izvršno ceno

$$K = (1+r)^T S_0.$$

Vrednotenje opcij računamo z upoštevanjem martingalske mere Q.

Optimalen čas nakupa nakupne opcije bomo dobili s pomočjo Snellove ovojnice iz razdelka 3.1. Merilo kdaj preklopiti na varovanje s prodajno opcijo bo razlika med pogojno pričakovano vrednostjo primanjkljaja in ceno opcij. Torej bo ta razlika iskano zaporedje slučajnih spremenljivk $(Z_t)_{0 \le t \le T}$, za katerega bomo uporabili Snellovo ovojnico.

Definiramo zaporedje slučajnih spremenljivk $(Z_t)_{0 \le t \le T}$

$$Z_t = (1+r)^{-t}\left(E\left(L_t^+ \middle| \mathcal{F}_t\right) - O_t\right).$$

Definiramo Snellovo ovojnico $(U_t)_{0 \le t \le T}$ zaporedja Z_t s predpisom

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T \\ U_t &= \max\left(Z_t, E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\right). \end{aligned}$$

Naj bo ν najmanjši čas ustavljanja, da bo $E(Z_\nu)$ maksimalen. Maksimizirali bi torej radi pričakovano sedanjo vrednost razlike med pogojno pričakovano vrednostjo primanjkljaja in ceno opcije. Označimo ceno opcije ob času ustavljanja ν, kjer $0 \le \nu \le T$, z O_ν. Optimalni čas preskoka dobimo iz trditve 3.1.5.

Pri tem je vključena aktivna interakcija s trgom in zato je lahko porazdelitev končne izgube osnova za določanje ustrezne višine kapitalskih rezerv, ki bodo zagotavljale vnaprej določeno verjetnost, da bo zavarovalnica zmožna izpolniti obveznosti iz naslova garancij. Da bomo lahko primerjali uspešnost strategije s preskokom, si bomo ogledali porazdelitev končne izgube v primeru uporabe naše strategije in porazdelitev končne izgube v primeru, ko za varovanje ne uporabimo izvedenih finančnih instrumentov. V končnem koraku, torej ob času T, je končna izguba v tem primeru enaka končni izgubi Δ-varovanja. V nadaljevanju bomo torej primerjali končni izgubi v primeru Δ-varovanja in v primeru strategije s preskokom.

V primeru Δ-varovanja lahko končno izgubo za zavarovalnico v času T definiramo kot

$$\mathrm{L} = \begin{cases} m(1+r)^T S_0 - mS_T; & \text{če } (1+r)^T S_0 \geq (1-c)\cdot S_T \\ -mcS_T; & \text{če } (1+r)^T S_0 < (1-c)\cdot S_T. \end{cases} \tag{3.2}$$

pri čemer je m število zavarovancev. Negativna izguba predstavlja dobiček za zavarovalnico. V primeru preklopa na varovanje z opcijami pa končno izgubo v času T definiramo kot $\tilde{L}$, kjer

$$\tilde{\mathrm{L}} = \begin{cases} O_\nu; & \text{če } (1+r)^T S_0 \geq (1-c)\cdot S_T \\ O_\nu - mcS_T; & \text{če } (1+r)^T S_0 < (1-c)\cdot S_T, \end{cases} \tag{3.3}$$

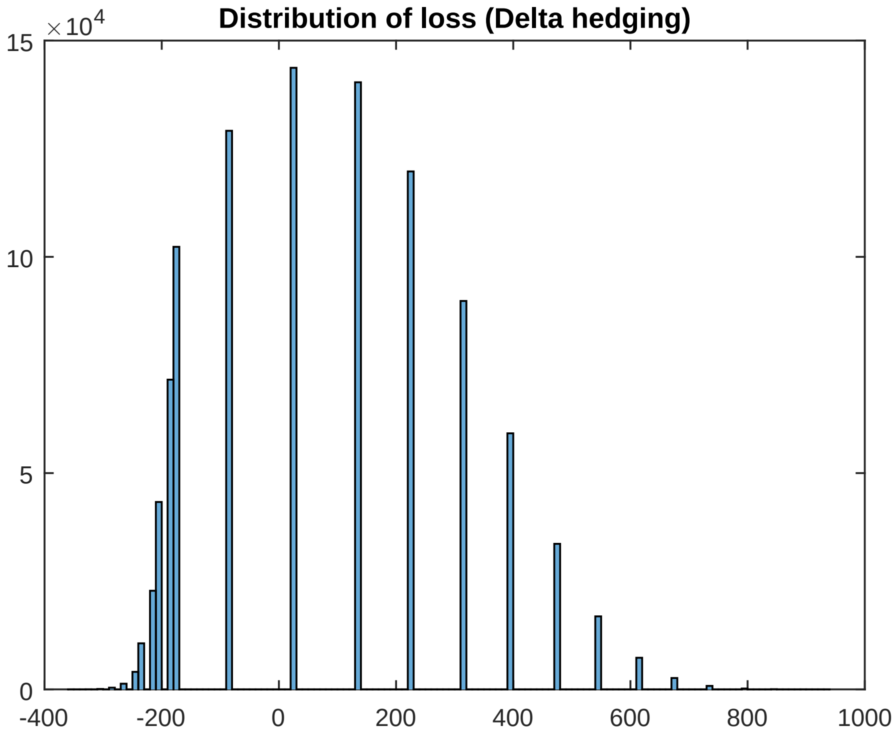
3.2.2 Simulacije v primeru brez smrtnosti

Vhodni podatki za simulacije prvega primera, torej primera brez smrtnosti, so naslednji:

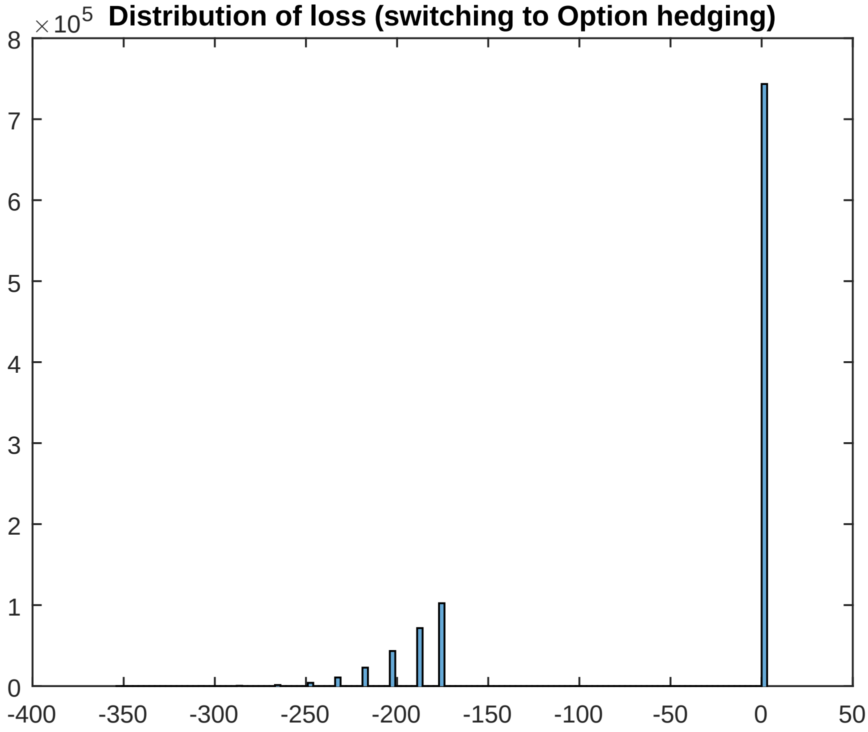
x	30
S_0	1
u	$1,05$
d	$0,98$
p	$0,49$
r	$0,015$
T	30
c	$0,1$
m	1000
n	1000000

Spomnimo, da S_0 označuje začetno vrednost ene enote vzajemnega sklada, u faktor, s katerim je vrednost sklada pomnožena v primeru, da se premakne gor, d faktor, ko se premakne dol, p verjetnost, da se vrednost sklada premakne gor, r konstantna obrestna mera, T trajanje pogodbe v letih, c delež, ki si ga vzame zavarovalnica v primeru dobrega donosa sklada, m število zavarovancev na začetku in n število simulacij.

Poglejmo si najprej simulirano porazdelitev končne izgube v primeru Δ-varovanja in v primeru alternativne strategije, torej s preskokom na varovanje z opcijami.



Slika 3.4: Porazdelitev končne izgube v primeru Δ-varovanja v primeru brez smrtnosti.



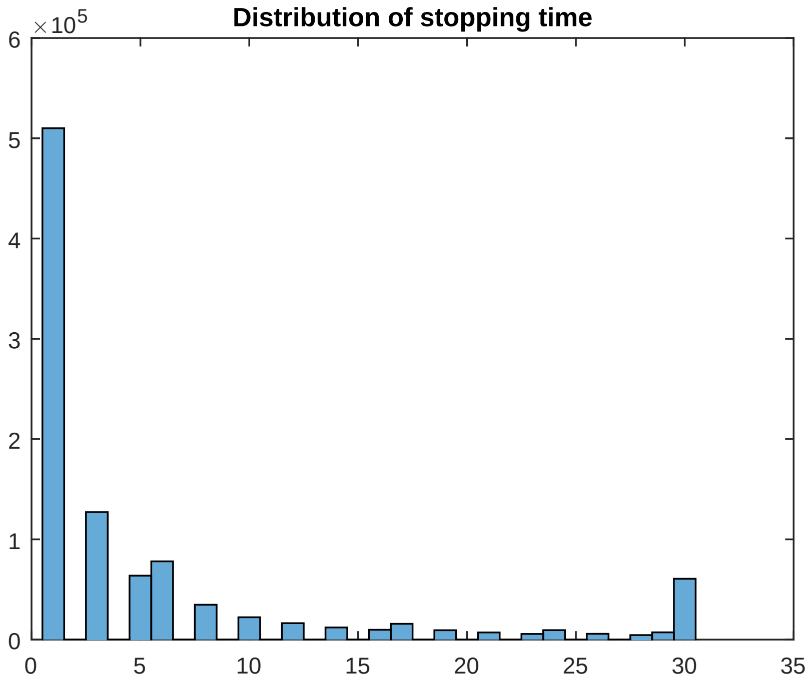
Slika 3.5: Porazdelitev končne izgube v primeru varovanja z opcijami v primeru brez smrtnosti.

Opazimo, da se porazdelitev občutno spremeni v prid porazdelitvi s preskokom. Poglejmo si še opisne statistike, da bomo lahko ocenili zneske.

	Δ -varovanje	**Strategija s preskokom**
Pričakovana vrednost	$E(L) = 73,53$	$E(\tilde{L}) = -49,16$
Standardni odklon	SD(L)$= 221,57$	SD$(\tilde{L}) = 84,35$
90. centil	$P_{90} = 397,9$	$P_{90} = 0,09$

Tabela 3.1: Opisne statistike za $p = 0,49$.

Poglejmo si še porazdelitev optimalnega časa preskoka ν, za katerega velja $E(\nu) = 5,96$ in SD$(\nu) = 8,36$.



Slika 3.6: Porazdelitev optimalega časa preskoka ν v primeru brez smrtnosti.

3.2.3 Smrtnost

Za modeliranje smrtnosti vpeljimo zaporedje slučajnih spremenljivk $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_T$ z $\alpha_0 = m$, kjer α_t predstavlja število živih zavarovancev ob času $t = 0, 1, \ldots, T$. Predpostavljali bomo, da sta gibanje cene vzajemnega sklada in smrtnost neodvisna. Vpeljimo filtraciji $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq T}$ in $(\mathcal{H}_t)_{0\leq t\leq T}$, kjer

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{S_0, S_1, \ldots, S_t\} \quad \text{in} \quad \mathcal{H}_t = \sigma\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}.$$

Prvi primer, ki si ga bomo ogledali, je primer brez zagotovljene minimalne garancije v primeru smrti v času trajanja pogodbe. V našem modelu to pomeni, da zavarovalnica celotno obdobje trajanja pogodbe upravlja z m enotami vzajemnega sklada, v katere je investirala na začetku. Višek enot sklada, ki na koncu lahko ostanejo zaradi smrti zavarovancev, lahko smatramo kot dobiček ali uporabimo za pokrivanje izgube zaradi izplačila garancij, odvisno seveda od samega gibanja cene vzajemnega sklada.

Garancija ob izteku pogodbe je oblike

$$G = \max(S_0(1+r)^T, (1-c)S_T),$$

kjer je $c \in (0,1)$ vnaprej določen delež, ki v primeru ugodnega gibanja cene osnovnega sklada pripade zavarovalnici. Obrestna mera r je konstantna.

Diskontiran primanjkljaj za zavarovalnico v primeru, ko ne vključimo izvedenih finančnih instrumentov, je enak

$$L^+ = (1+r)^{-T} \left(\alpha_T G - m S_T\right)_+ . \tag{3.4}$$

Definiramo še izgubo L, ki ustreza zgoraj definiranemu primanjkljaju:

$$L = (1+r)^{-T} \left[\alpha_T G - m S_T - c S_T \cdot \mathbf{1}\left((1-c)S_T > (1+r)^T S_0\right)\right] . \tag{3.5}$$

Pogojna porazdelitev diskontiranega primanjkjaja L^+ za zavarovalnico, pogojno na $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$, ko ne uporabimo izvedenih finančnih instrumentov, je enaka porazdelitvi slučajne spremenljivke L_t^+ dane kot

$$L_t^+ = \left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}} \left(\alpha_{t,T} \cdot G - m \cdot S_{t,T}\right)\right)_+ . \tag{3.6}$$

Tukaj je r obrestna mera, m je število zavarovancev, ki sklenejo pogodbo, slučajna spremenljivka $\alpha_{t,T}$ ima pogojno porazdelitev živih zavarovancev ob izteku pogodbe, pogojno na $\mathcal{F}_t$, $S_{t,T}$ ima porazdelitev enako pogojni porazdelitvi S_T, pogojno na $\mathcal{G}_t$. Opomnimo, da sta po predpostavki $\alpha_{t,T}$ in $S_{t,T}$ neodvisni. Pogojni pričakovan primanjkljaj $E(L^+|\mathcal{F}_t)$ je izračunan kot

$$E(L^+|\mathcal{F}_t) = E(L_t^+) = (1+r)^{-(T-t)} E\left(\left(\alpha_{t,T} G - m S_{t,T}\right)_+\right), \tag{3.7}$$

kjer lahko $S_{t,T}$ zapišemo kot

$$S_{t,T} = s_0 u^{k+X} d^{t-k+T-t-X}.$$

Za slučajno spremenljivko X velja, da je porazdeljena binomsko $X \sim \mathrm{Bin}(T-t, p)$ in je neodvisna od $\alpha_{t,T}$. Velja še, da se S_t v vsakem časovnem trenutku premakne gor z verjetnostjo p in dol z verjetnostjo $1-p$.

Pričakovan primanjkljaj iz (3.7) bo v strategiji uporabljen za odločanje o nakupu opcije. Izraz lahko preoblikujemo v

$$E(L_t^+) = \tfrac{1}{(1+r)^{T-t}} \textstyle\sum_{x,y} \left(yG - mS_0u^{k+x}d^{T-k-x}\right)_+ \cdot P(X = x)P(\alpha_{t,T} = y),$$

kjer sta X in $\alpha_{t,T}$ neodvisni slučajni spremenljivki. Nadalje lahko zapišemo

$$\alpha_{t,T} = \alpha_t - (Y_{t+1} + Y_{t+2} + \ldots + Y_T),$$

kjer Y_i predstavlja število smrti, ki so se zgodile na intervalu $(i-1, i]$ za $i = t+1, \ldots, T$. Slučajne spremenljivke Y_i imajo pogojno na $\mathcal{F}_{i-1}$ binomsko porazdelitev

$$Y_i|\mathcal{F}_{i-1} \sim \mathrm{Bin}(\alpha_{i-1}, q_{x+i-1}), \tag{3.8}$$

kjer je q_{x+i-1} verjetnost, da posameznik star $x + i - 1$ umre v enem letu. V simulacijah bo za določanje $\alpha_{t,T}$ simuliran vektor $(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_T)$ pod zgoraj določenimi pogojnimi porazdelitvami.

Zavarovalnica bo imela pozitivno izgubo samo v primeru, če cena vzajemnega sklada pade pod zajamčeno vrednost $(1 + r)^T S_0$. Če bo torej zavarovalnica v kateremkoli trenutku kupila opcijo z izvršno ceno $k = (1 + r)^T S_0$ za vsakega zavarovanca, se bo popolnoma zavarovala pred tveganjem neugodnega gibanja cene vzajemnega sklada.Vendar, v našem modelu, kjer ne izplačujemo minimalnih garancij v primeru smrti, bo gotovo veljalo $\alpha_T \leq m$. Torej, je boljša strategija, da ne kupimo opcij za vse zavarovance, ampak samo za določen delež. V članku [5] Møller postavi vprašanje kaj je optimalna strategija za nakup opcij, da se zavarovalnica za čim manjši vložek čim bolje zavaruje pred tveganjem smrtnosti. V našem modelu bomo obravnavali dva primera. Prvi bo, da v trenutku ν zavarovalnica kupi

$$k_1 = \alpha_\nu \tag{3.9}$$

opcij, kar pomeni, da kupi toliko prodajnih opcij kot je število živih zavarovancev ob času nakupa opcij. To bo zavarovalnico gotovo zavarovalo pred finačnim tveganjem. Slabši vidik pa je, da je cena nakupa tolikšnega števila opcij višja kot alternativa, če bi bolje predvideli število živih zavarovancev ob izteku pogodbe.

Zato bomo za drugi primer vzeli v obravnavo nakup

$$k_2 = E(\alpha_{\nu,T}) = E(\alpha_T|\alpha_\nu) \tag{3.10}$$

prodajnih opcij. Tu bo cena kupljenih opcij nižja kot v prvem primeru, vendar obstaja tveganje, da bo ob izteku pogodbe več živih zavarovancev, kot je zavarovalnica predvidevala ob času nakupa opcij. Obstaja torej tveganje napake ocene števila živih zavarovancev. Pričakovano vrednost števila živih zavarovancev bo pri predstavitvi rezultatov simulirana.

Izračun cene opcije, označene z O_t, bo sledil standardnemu načinu, predstavljenem v razdelku 2.1.5 doktorske disertacije. V katerem izmed zgornjih primerov bo imela zavarovalnica na koncu nižjo izgubo, bo razvidno iz rezultatov simulacij.

Sledimo naprej naši strategiji varovanja. Definirati moramo zaporedje slučajnih spremenljivk $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$, za katero bomo naredili Snellovo ovojnico. Iskano zaporedje je razlika med pričakovanim primanjkljajem v trenutku t in ceno opcije kupljene v istem trenutku t.

Definiramo

$$Z_t = (1+r)^{-t}\left(E(L^+|\mathcal{F}_t) - O_t\right).$$

Snellova ovojnica zaporedja $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ je enaka

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T \\ U_t &= \max(Z_t, E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)). \end{aligned}$$

Naj bo ν najmanši optimalen čas ustavljanja, ki maksimizira $E(Z_\nu)$. Iz trditve 3.1.5 sledi, da je najmanjši optimalen čas ustavljanja ν_0 enak

$$\nu_0 = \inf\{t \in \{0, 1, \ldots, T\}; U_t = Z_t\}.$$

Optimalen čas ustavljanja bo dosežen z verjetnostjo 1, saj je iz definicije Snellove ovojnice jasno, da je čas ustavljanja dosežen najkasneje v času T. Opomnimo še, da je vrednost Z_t ob času T enaka 0, kar sledi iz finančnih razlogov. Cena opcije v trenutku T je enaka dejanski izgubi v trenutku T. V nasprotnem bi bila mogoča arbitraža.

Naša začetna raziskovalna hipoteza je bila, da se bo s predstavljeno strategijo spremenila porazdelitev izgube za zavarovalnico. Predvsem, če se zavarovalnica postavi na pesimistično stališče glede gibanja cen vzajemnega sklada. Da bomo lahko preverili postavljeno hipotezo, moramo definirati končno izgubo za zavarovalnico v primeru, ko se zavarovalnica poslužuje Δ-varovanja in v primeru, ki ga predlagamo z novo postavljeno strategijo preskoka na varovanje z opcijo.

V primeru Δ-varovanja je sedanja vrednost končne izgube enaka

$$L = (1+r)^{-T} \left(\alpha_T \cdot G - mS_T\right), \tag{3.11}$$

oziroma

$$L = (1+r)^{-T} \left(\alpha_T \cdot \max\left[S_0(1+r)^T, (1-c)S_T\right] - mS_T\right). \tag{3.12}$$

Negativno izgubo razumemo kot dobiček. Enačbo 3.12 interpretiramo na način, da je zavarovalnica na začetku investirala v m enot vzajemnega sklada, torej to poseduje in ima zato predznak minus. Izplačati pa mora garancijo G živim α_T zavarovancem.

V primeru preskoka na varovanje z opcijami je ob času T v primeru kupovanja k_1 opcij iz 3.9 vrednost sklada enaka

$$A_T = \alpha_\nu \cdot \max((1+r)^T S_0, S_T) + (m - \alpha_\nu)\, S_T\,. \tag{3.13}$$

Delež sklada, ki je varovan z nakupno opcijo, predstavlja α_ν enot, ki jih lahko v času T izvršimo za $\max((1+r)^T S_0, S_T)$. Preostanek enot lahko prodamo samo po trenutni tržni vrednosti. V tem primeru lahko sedanjo vrednost izgube zapišemo kot

$$\tilde{L} = (1+r)^{-T} \left((1+r)^{T-\nu} O_\nu + \alpha_T G - A_T - cS_T \cdot \mathbf{1}((1-c) > (1+r)^T S_0)\right)\,. \tag{3.14}$$

V primeru preskoka na varovanje z opcijami je ob času T v primeru kupovanja k_2 opcij iz (3.10) pa je vrednost sklada enaka

$$A_T = E(\alpha_T|\mathcal{F}_\nu) \cdot \max((1+r)^T S_0, S_T) + (m - E(\alpha_T|\mathcal{F}_\nu))\, S_T\,. \tag{3.15}$$

Tu delež sklada, ki je varovan z nakupno opcijo predstavlja $E(\alpha_T|\mathcal{F}_\nu)$ enot. Njihova vrednost v času T je $\max((1+r)^T S_0, S_T)$. Preostanek enot sklada je spet lahko prodan po tržni ceni. Sedanjo vrednost izgube lahko zapišemo kot

$$\tilde{L} = (1+r)^{-T}\left((1+r)^{T-\nu}O_\nu + \alpha_T G - A_T - cS_T \cdot \mathbf{1}((1-c)S_T > (1+r)^T S_0)\right) \ . \quad (3.16)$$

Prva dva člena v zvezah (3.14) in (3.16) predstavljata akumuliran strošek nakupa opcij in odgovornost do zavarovancev. Primer $\nu = T$ pomeni, da se ne odločimo za nakup opcije. V tem primeru velja $O_T = (\alpha_T G - mS_T)_+$.

3.2.4 Simulacije v primeru s smrtnostjo

Vhodni podatki za simulacije so

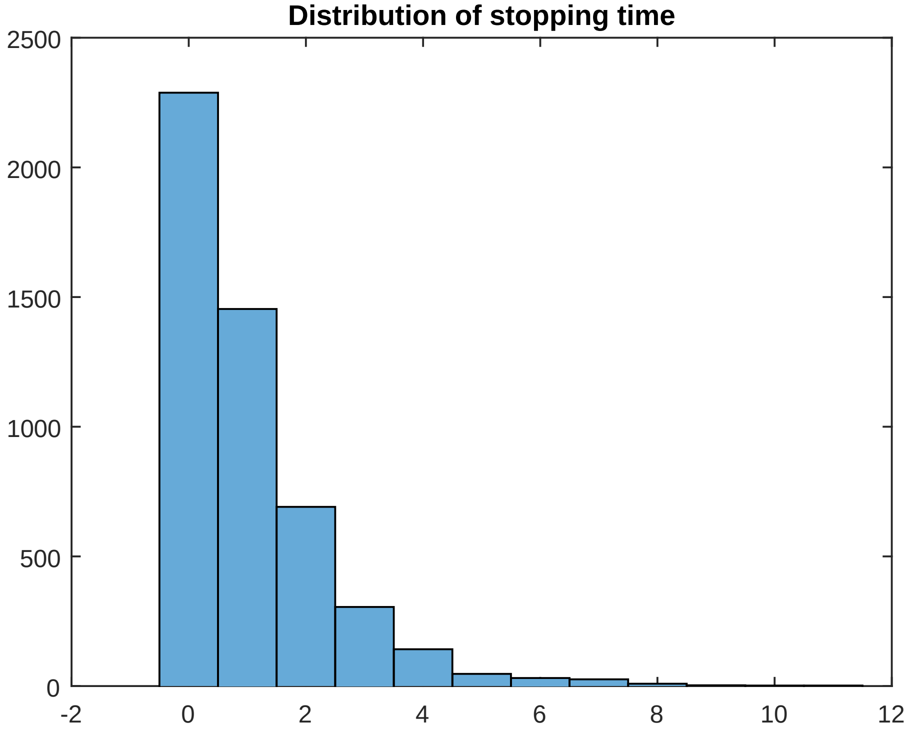
x	30
S_0	1
u	$1,04$
d	$0,98$
p	$0,49$
r	$0,015$
T	30
c	$0,1$
m	1000

Za simulacijo smrtnosti smo vzeli sloveske tablice smrtnosti SIA65 [29] za moškega starega $x = 30$ let. Opomnimo še, da se zaradi simulacije smrtnosti s pomočjo $Y_i|\mathcal{F}_{i-1}$ iz (3.8) čas izračuna simulacije občutno poveča. Zato so v primeru s smrtnostjo rezultati predstavljeni za manjše število simulacij.

Poglejmo si najprej primer, ko je verjetnost premika vzajemnega sklada na vsakem koraku gor enaka $p = 0,49$ in zavarovalnica čaka na optimalni čas ν za nakup

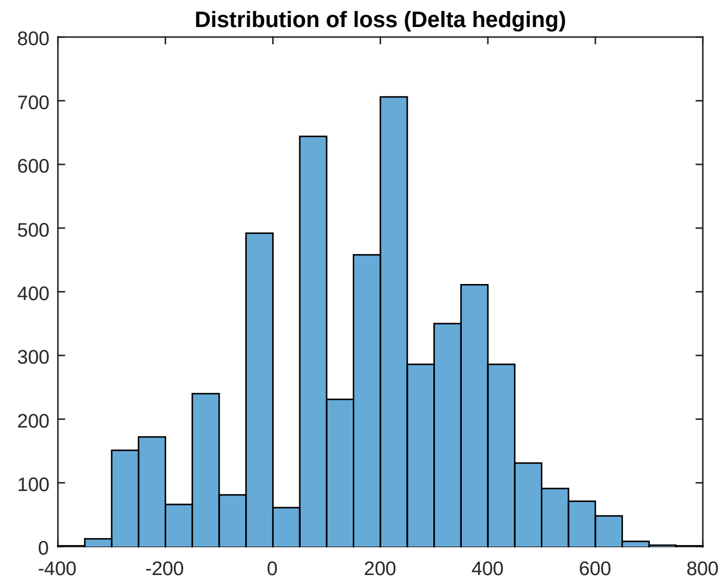
$$k_2 = E(\alpha_T|\alpha_\nu)$$

prodajnih opcij. Število simulacij je $n = 5000$. Porazdelitev časa preskoka ν oziroma optimalnega časa nakupa prodajnih opcij je prikazana na sliki 3.7.

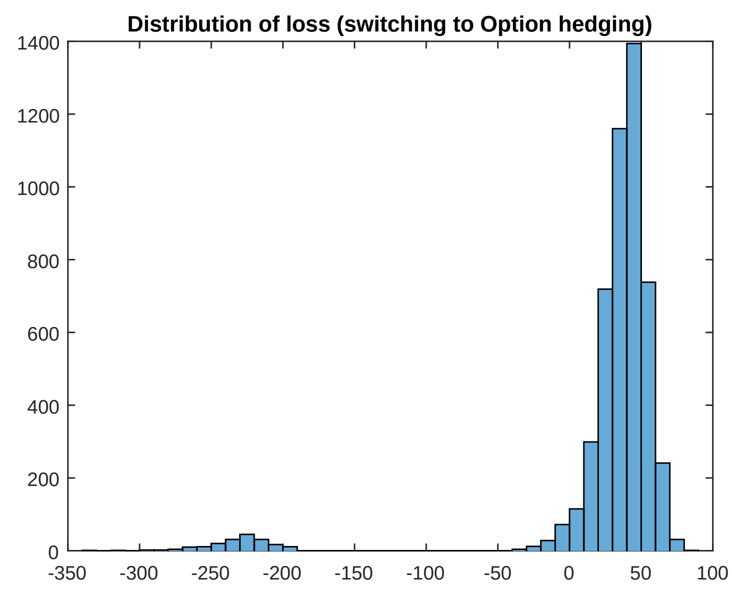


Slika 3.7: Porazdelitev časa ustavljanja ν.

Primerjajmo porazdelitvi končne izgube v primeru Δ-varovanja in v primeru strategije s preskokom na varovanje z opcijami.



Slika 3.8: Porazdelitev končne izgube v primeru Δ-varovanja.



Slika 3.9: Porazdelitev končne izgube v primeru preskoka na varovanje z opcijami.

S primerjavo obeh histogramov opazimo, da se empirična porazdelitev končne izgube pomembno spremeni, če se poslužimo strategije s preskokom. Čeprav je iz slike 3.9 razvidno, da je še vedno v veliki večini primerov končna izguba pozitivna, je v primerjavi s sliko 3.8 ta bistveno manjša. Poglejmo si še nekaj opisnih statistik za obravnavana primera.

	Δ -varovanje	**Strategija s preskokom**	**Čas preskoka**
Pričakovana vrednost	$E(L) = 166{,}91$	$E(\tilde{L}) = 28{,}22$	$E(\nu) = 1{,}01$
Standardni odklon	SD(L) $= 206{,}62$	SD($\tilde{L}$) $= 53{,}35$	SD(ν) $= 1{,}34$
90. centil	$P_{90} = 433{,}07$	$P_{90} = 56{,}04$	

Tabela 3.2: Opisne statistike za $p = 0,49$.

Sedaj bomo primerjali opisne statistike za $n = 1000$ simulacij za različno izbrane verjetnosti p.

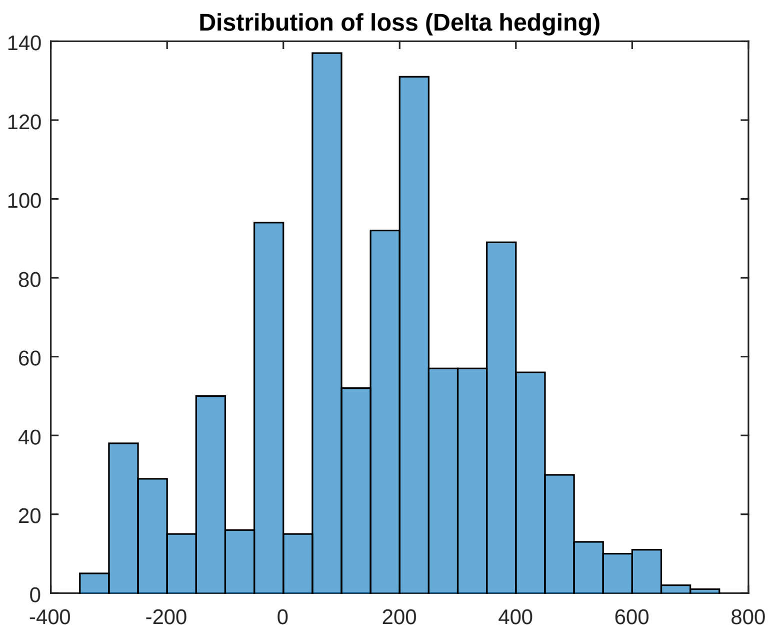
	$p = 0{,}48$	$p = 0{,}49$	$p = 0{,}50$
$E(L)$	182,0	160,2	143,2
SD(L)	207,69	209,20	203,63
$P_{90}(L)$	442,4	433,1	412,8
$E(\tilde{L})$	30,6	26,4	27.8
SD($\tilde{L}$)	51,87	58,26	55,94
$P_{90}(\tilde{L})$	53,0	56,5	58,6
$E(\nu)$	0	1	2,99
SD(ν)	0	1,27	2,96
$P_{90}(\nu)$	0	3	7

Tabela 3.3: Opisne statistike za različne vrednosti p.

Spet smo se postavili na pesimistično stališče glede gibanja cen vzajemnega sklada, torej $p \leq 0,50$. Opazimo, da je v primeru $p = 0,48$ optimalni čas preklopa med načinoma varovanja vedno ob času 0. To je razumljivo, saj smo se postavili na stališče, da se bo cena vzajemnega sklada na vsakem koraku z verjetnostjo $0,52$ premaknila dol. Kakor smo videli v poglavju o Snellovi ovojnici 3.1, s preskokom čakamo, dokler imamo kaj upanja, da se nam v prihodnosti obeta bolje, kot je trenutno stanje. V danem primeru ni za pričakovati, da bi na dolgi rok cena sklada naraščala, zato je najbolje kupiti opcijo takoj na začetku.

Primerjajmo še rezultate simulacij, ki smo jih dobili s kupovanjem različnega števila opcij. Vhodni podatki so kot na začetku, s tem, da je $p = 0,49$ in $n = 1000$. Pogledali si bomo porazdelitvi končnih izgub pri obeh primerih, torej pri $k_1 = \alpha_\nu$ in $k_2 = E(\alpha_T|\alpha_\nu)$.

Porazdelitev izgube pri Δ-varovanju je v obeh primerih enaka, saj smo simulacije delali na istem vzorcu.



Slika 3.10: Porazdelitev končne izgube v primeru Δ-varovanja.

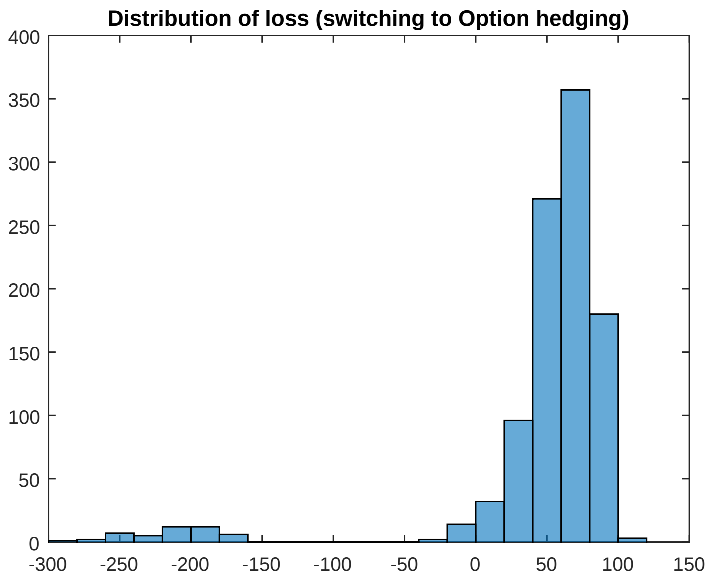
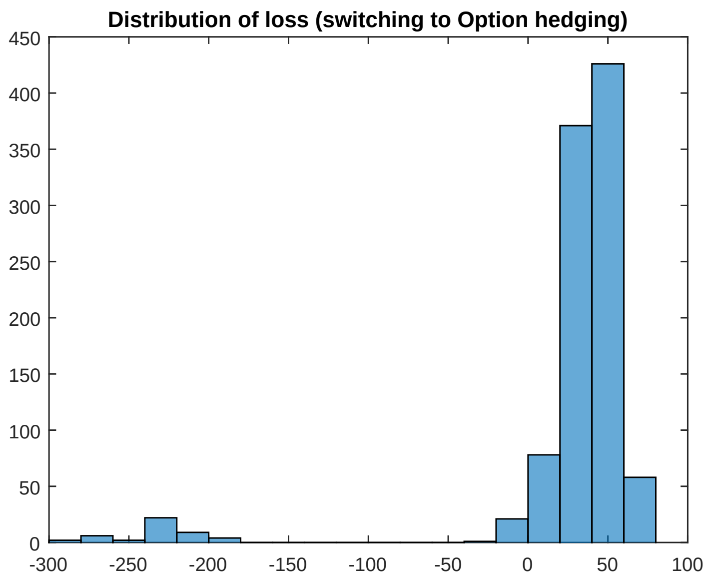
<table>
<tr><th></th><th>$\tilde{L}$</th></tr>
<tr><td>k_1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>k_2</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabela 3.4: Porazdelitvi izgube v primeru preskoka za k_1 (zgoraj) in k_2.

Vidimo, da je povprečna izguba v primeru k_2 manjša kot v primeru k_1, saj je cena opcij kupljenih v primeru k_2 manjša kot cena opcij v primeru k_1. Sicer imamo v primeru k_2 prisotno tveganje, da nismo dobro ocenili pričakovane smrtnosti. V našem primeru se izkaže, da je bila smrtnost dobro ocenjena, vendar je bila tudi dejanska smrtnost v našem primeru simulirana povsem naključno. V realnosti se lahko zgodi, da je dejanska smrtnost precej višja od simulirane zaradi nepredvidenih vzrokov. Ti so lahko večja pojavnost določene bolezni na nekem območju ali na primer bolezen in posledično smrt zaradi narave dela. V teoretičnem modelu ti dejavniki niso zajeti.

3.2.5 Minimalna garantirana izplačila v primeru smrti

Model lahko še nekoliko razširimo s tem, da vpeljemo izplačila tudi za primer smrti v času trajanja pogodbe. Obstaja veliko različnih oblik takih izplačil, glejte [9].

V naš model bomo vpeljali primer, ko ob smrti, ki se zgodi do časa T, zavarovalnica pooblaščencem ob koncu leta, v katerem se je smrt zgodila, izplača maksimalno vrednost izmed trenutne vrednosti sklada in nekim minimalnim garantiranim donosom. Naj bo izplačilo v primeru smrti za $t = 0, 1, \ldots, T$ enako

$$b_t = \max\left(S_t, (1+r)^t S_0\right), \quad t \leq T\,. \tag{3.17}$$

Predpostavljali bomo, da so izplačila za primere smrti financirana iz posebnega fonda. V našem modelu bomo znesek teh izplačil upoštevali pri izračunu končne izgube v času zapadlosti T.

Z vpeljavo garantiranih minimalnih izplačil v primeru smrti se enakosti (3.11) in (3.14) za primer nakupa k_2 opcij iz (3.10) spremenita v

$$L = (1+r)^{-T}\left(\alpha_T G + D_T - mS_T\right)_+ \tag{3.18}$$

in

$$\tilde{L} = (1+r)^{-T}\left[(1+r)^{T-\nu}O_\nu + \alpha_T G + D_T - A_T - cS_T \cdot \mathbf{1}\left((1-c)S_T > (1+r)^T S_0\right)\right]\,. \tag{3.19}$$

Tukaj D_T predstavlja akumulirano vrednost garantiranih izplačil v primeru smrti ob času T:

$$D_T = \sum_{t=1}^{T}(1+r)^{T-t} b_t\left(\alpha_t - \alpha_{t-1}\right)\,. \tag{3.20}$$

3.2.6 Simulacije v primeru z izplačilom deleža

Vstopni podatki ostajajo še vedno enaki kot v prvem primeru brez smrtnosti. Začnemo torej z 1000 zavarovalnimi policami z akumulacijskimi dobami 30 let, sklenjenimi s 30 letnimi moškimi. Začetna vrednost sklada je $S_0 = 1$ in se premika gor za faktor $u = 1,04$ z verjetnostjo $p = 0,49$ in dol za faktor $d = 0,98$ z verjetnostjo $1 - p = 0,51$. Vzamemo fiksno obrestno mero $r = 0,015$. Zavarovalnica imetnikom polic garantira izplačilo zneska $b_t = \max(S_t, S_0(1 + r)^t)$ za $t \leq T$. To pomeni, da dobijo zavarovančevi pooblaščenci izplačilo v primeru smrti in da obenem ob primeru doživetja zavarovalnica garantira minimalni donos.

Za $n = 1000$ simulacij so rezultati predstavljeni v tabeli 3.5.

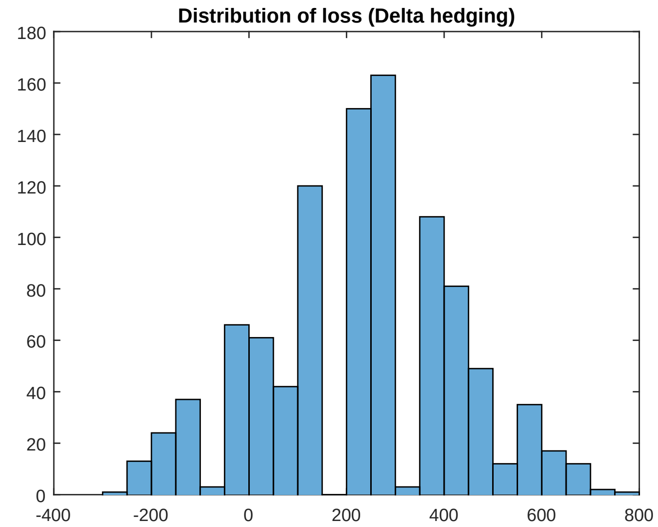
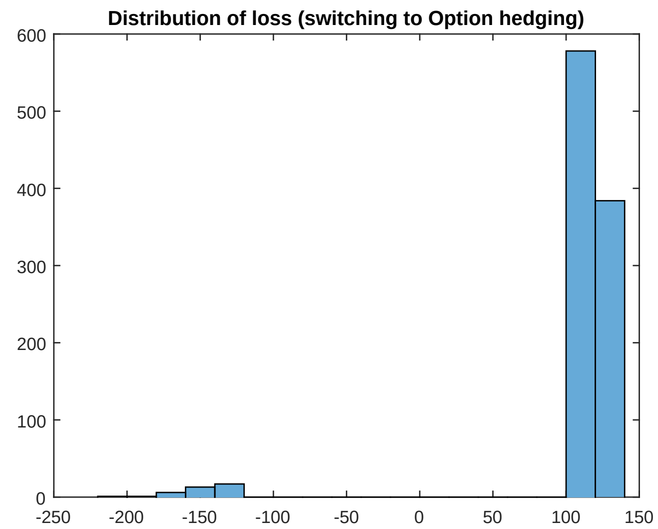
L	
$\tilde{L}$	

Tabela 3.5: Simulirana porazdelitev končne izgube za primer Δ-varovanja (zgoraj) in za preskok na varovanje z opcijami z vključenimi izplačili v primeru smrti.

Spet lahko iz porazdelitev opazimo, da čeprav je izguba v primeru preskoka na varovanje z opcijami še vedno pozitivna, je v primerjavi z izgubo pri Δ-varovanju bistveno manjša.

Ocenjene pričakovane izgube, standardni odkloni in 90. percentili za primer z izplačili deležev so

Δ-varovanje	Varovanje s preskokom	Čas ustavljanja (preskoka)
E(L) = 231,74	$E(\tilde{L})$ = 108,65	$E(\nu)$ = 0,048
SD(L) = 203,54	$SD(\tilde{L})$= 51,10	$SD(\nu)$ = 1,07
P_{90} = 496,48	P_{90} = 123,46	0

Tabela 3.6: Opisne statistike za primer z garantiranimi izplačili v primeru smrti.

Čas preskoka na varovanje z opcijami v primeru z minimalnim garantiranim izplačilom v primeru smrti teži k začetku akumulacijske dobe. Za prej podane vhodne podatke je čas ustavljanja oziroma preskoka neničeln samo v nekaj redkih primerih.

Poglejmo še primer z vhodnimi podatki večinoma enakimi kot prej, spremenimo le u, ki naj bo $u = 1,05$. Za $n = 500$ dobimo naslednje rezultate.

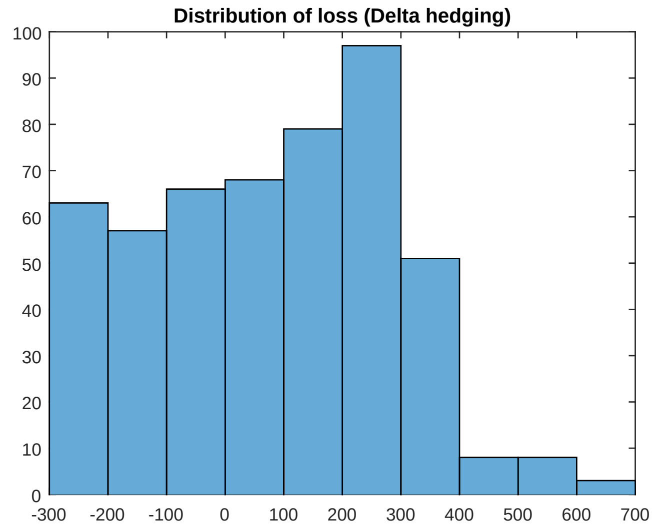
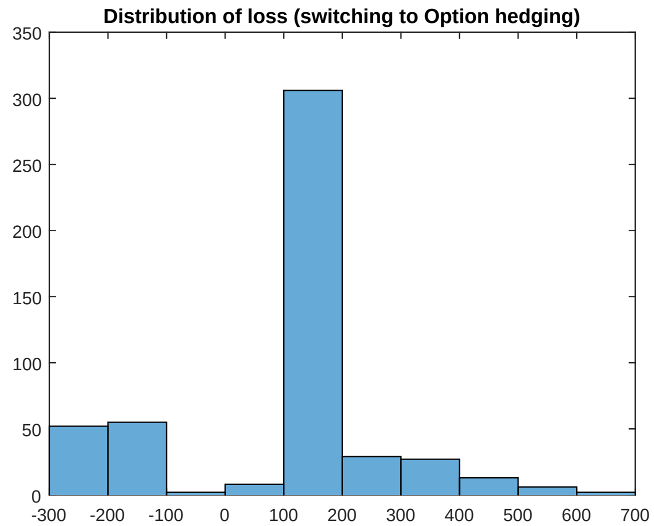
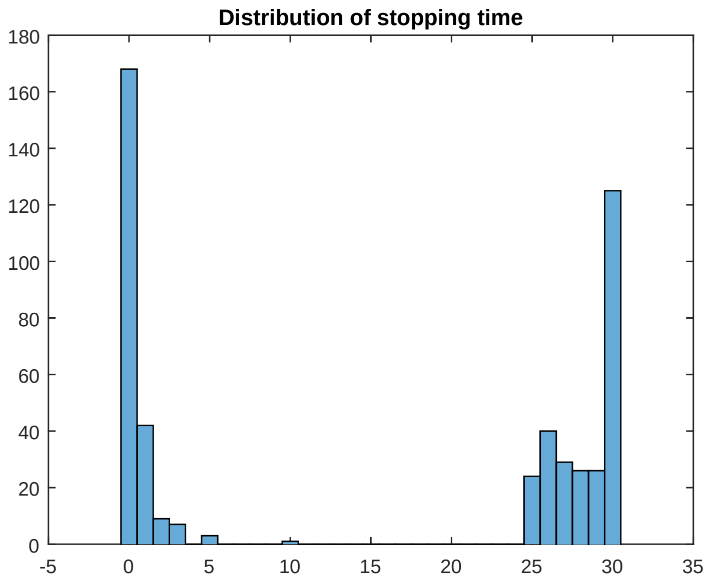
L	
$\tilde{L}$	

Tabela 3.7: Simulirana porazdelitev izgube za primer Δ-varovanja (zgoraj) in za preskok na varovanje z opcijami z vključenimi izplačili v primeru smrti, kjer je $u = 1,05$.

Iz tabele 3.8 opazimo, da je pričakovana izguba v primeru Δ-varovanja manjša kot v primeru varovanja z opcijami. Vendar vidimo iz tabele 3.7, da je to na račun negativne izgube oziroma dobička, ki se zgodi v velikem številu primerov. Če pa primerjamo 90. percentil, vidimo, da je manjši v primeru varovanja z opcijami. Porazdelitev časa preskoka je predstavljena na sliki 3.11.

Δ-varovanje	Varovanje s preskokom	Čas ustavljanja (preskoka)
E(L) = 61,95	E($\tilde{L}$)= 104,43	E(ν) = 15,52
SD(L) = 210,34	SD($\tilde{L}$) = 179,54	SD(ν) = 4,43
P_{90} = 378,72	P_{90} = 289,39	

Tabela 3.8: Opisne statistike za primer z garantiranimi izplačili v primeru smrti, kjer je $u = 1,05$.



Slika 3.11: Porazdelitev časa preskoka v primeru z minimalnimi garancijami v primeru smrti in $u = 1,05$.

Poglavje 4

Strategija z deleži

V tem poglavju bo predstavljena še alternativna strategija upravljanja z varovalnim portfeljem pri zavarovalniških produktih z garancijo, ki vključuje postopno jemanje deležev.

Tudi za to strategijo je motivacija prišla iz sodobne zavarovalniške ureditve, ki od zavarovalnic zahteva, da uporabljajo tržno vrednotenje sredstev in obveznosti. Vrednost sredstev je mogoče določiti neposredno iz tržne cene ali z ustreznimi približki z uporabo metodologije poštene vrednosti. Vendar za zavarovalne obveznosti ni določenega reguliranega trga, ki bi določil njihovo vrednost. Osredotočili se bomo na naložbena življenjska zavarovanja z garancijami.

Nonnenmacher je v [8] povezal garancije s prodajnimi opcijami na vrednostih sklada. Predstavil je produkt, kjer je zavarovancem zajamčen nek minimalen donos i_l, vendar je donos omejen tudi navzgor z i_h. Torej v primeru ekstremnega donosa, delež vrednosti sklada ostane zavarovalnici.

Bacinello, Millossovich, Olivieri in Pitacco v članku [10] predstavijo nov model, kjer iščejo ustrezen način zaračunavanja upravljavske provizije v teku trajanja pogodbe z zajamčeno garancijo na način, da je pričakovana izguba zavarovalnice enaka nič.

V našem modelu si bo zavarovalnica jemala določen delež v času trajanja pogodbe v primeru, ko bo trenutna cena vzajemnega sklada presegala sedanjo vrednost zajamčene garancije, do trenutka nakupa opcije. Optimalni čas nakupa opcije bomo v model vpeljali z razširitvijo problema optimalnega ustavljanja.

Naš model bo predstavljen na poenostavljenem binomskem modelu.

4.1 Pravila optimalnega ustavljanja

Rezultati tega razdelka izhajajo iz [30] in [31].

Klasični problem ustavljanja na končni nehomogeni markovski verigi $X_0, X_1, \ldots, X_N$ je minimizirati izraz

$$E\left[g(X_\nu) + \sum_{j=1}^{\nu-1} c(X_j)\right], \tag{4.1}$$

kjer ν teče po vseh časih ustavljanja glede na filtracijo markovske verige in kjer sta g in c dani funkciji. Za potrebe poenostavitve bomo predpostavljali, da sta g in c omejeni na $\mathbb{R}$. Za markovsko verigo je dovolj rešiti problem s privzetkom, da je $X_0 = x$ za x iz množice stanj. Označimo vrednostno funkcijo v_N z

$$v_N(x) = \inf_{\{\nu\colon P(\nu\leq N)=1\}} E\left[g(X_\nu) + \sum_{j=1}^{\nu-1} c(X_j) \big| X_0 = x\right]. \tag{4.2}$$

Enačbe dinamičnega programiranja so za ta problem definirane rekurzivno z

$$\begin{aligned} V_N(x) &:= g(x) \\ V_n(x) &:= \min\left\{g(x), c(x) + E\left[V_{n+1}\left(X_{n+1}\right)|X_n = x\right]\right\} \end{aligned}$$

za $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Rešitev problema ustavljanja je dana z naslednjim izrekom.

Izrek 4.1.1. *Vrednostna funkcija je dana z $v_N(x) = V_0(x)$, in optimalni čas ustavljanja je dan z*

$$\nu = \inf\{j \geq 0\colon V_j(X_j) = g(X_j)\}. \tag{4.3}$$

Dokaz: Oglejmo si proces

$$Z_n = \sum_{j=0}^{n-1} c(X_j) + V_n(X_n); \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Proces $\{Z_n : n = 0, 1, \dots, N\}$ je submartingal:

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n) &= \textstyle\sum_{j=0}^{n} c(X_j) + E(V_{n+1}(X_{n+1})|X_n) \\ &\geq \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} c(X_j) + V_n(X_n) \\ &= Z_n. \end{aligned}$$

Iz submartingalnosti sledi

$$E(Z_\nu) \geq E(Z_0) = V_0(x)$$

za vse čase ustavljanja z vrednostmi v $\{0, 1, \dots, N\}$. Ampak po definiciji velja $V_j \leq g$ za vsak j, zato

$$V_0(x) \leq E(Z_\nu) \leq E\left(\sum_{j=0}^{\nu-1} c(X_j) + g(X_\nu)\right).$$

Naj ν_N zadošča (4.3). Za vsak $n = 0, 1, \dots, N-1$ potem velja

$$\begin{aligned} &E(Z_{\nu_N \wedge (n+1)}|X_0, X_1, \dots, X_n) \\ &= \mathbf{1}(\nu_N \leq n) Z_{\nu_N} + \mathbf{1}(\nu_N \geq (n+1)) E(Z_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n) \\ &= \mathbf{1}(\nu_N \leq n) Z_{\nu_N} + \mathbf{1}(\nu_N \geq (n+1)) \left(\sum_{j=0}^{n} c(X_j) + E(V_{n+1}(X_{n+1})|X_n)\right) \\ &= \mathbf{1}(\nu_N \leq n) Z_{\nu_N} + \mathbf{1}(\nu_N \geq (n+1)) \left(\sum_{j=0}^{n-1} c(X_j) + V_n(X_n)\right) \\ &= \mathbf{1}(\nu_N \leq n) Z_{\nu_N} + \mathbf{1}(\nu_N \geq (n+1)) Z_n \\ &= Z_{\nu_N \wedge n}. \end{aligned}$$

Ugotovili smo torej, da je zaporedje $(Z_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ martingal, kar pomeni da velja

$$E\left(E(Z_{\nu_N \wedge n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n)\right) = E(Z_{\nu_N \wedge n})$$

oziroma

$$E\left(Z_{\nu_N \wedge n+1}\right) = E(Z_{\nu_N \wedge n})$$

za vsak $n = 0, 1, \dots, N-1$. Velja še

$$E(Z_{\nu_N \wedge 0}) = E(Z_0) = V_0(x_0)$$

in

$$E(Z_{\nu_N \wedge N}) = E(Z_{\nu_N}).$$

Sledi

$$V_0(x_0) = E(Z_0) = E(Z_{\nu_N \wedge 0}) = E(Z_{\nu_N \wedge 1}) = \ldots = E(Z_{\nu_N \wedge N}) = E(Z_{\nu_N}).$$

Ampak ker

$$E(Z_{\nu_N}) = E\left(\sum_{j=0}^{\nu_N - 1} c(X_j) + V_{\nu_N}(X_{\nu_N})\right),$$

sledi

$$V_0(x) = v_N(x).$$

To pa ravno pomeni, da je ν_N optimalen čas ustavljanja. $\square$

Pravkar predstavljen problem optimalnega ustavljanja ima mnogo možnih razširitev in posplošitev. Za finančne aplikacije problema, ki jih bomo predstavili v nadaljevanju, bomo minimizirali izraz

$$E\left[g_\nu(X_1, \ldots, X_\nu) + \sum_{j=1}^{\nu-1} c_j(X_1, \ldots, X_j)\right] \tag{4.4}$$

po vseh omejenih časih ustavljanja ν za dane funkcije $c_1, \ldots, c_N$ in $g_1, \ldots, g_N$. Enačbe dinamičnega programiranja za bolj splošen primer so potem enake

$$\begin{aligned} V_N(x_0, \ldots, x_N) &:= g_N(x_0, \ldots, x_N) \\ V_n(x_0, \ldots, x_n) &:= \min\big\{g_n(x_0, \ldots, x_n), \\ &\quad\; c_n(x_0, \ldots, x_n) + E\left[V_{n+1}\left(x_0, \ldots, x_n, X_{n+1}\right) | X_n = x_n\right]\big\} \end{aligned}$$

Optimalen čas ustavljanja je potem dosežen, ko velja

$$\nu_N = \inf\left\{j \geq 0 \colon V_j(X_0, \ldots, X_j) = g_j(X_0, \ldots, X_j)\right\}. \tag{4.5}$$

Poglejmo še dokaz tega splošnejšega izreka. Definirajmo

$$Z_n = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(X_0, \ldots, X_j) + V_n(X_0, \ldots, X_n) \tag{4.6}$$

za $j = 0, 1, \ldots, N$. Potem sledi:

Izrek 4.1.2. *Zaporedje* $(Z_n)_{0\le n\le N}$ *je submartingal glede na filtracijo markovske verige.*

Dokaz: Označimo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ za $1 \le n \le N$. Računamo

$$\begin{aligned} & E\left[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n} c_j(X_0,\ldots,X_j) + E\left[V_{n+1}(X_0,\ldots,X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right] \\ &\ge \sum_{j=0}^{n-1} c_j(X_0,\ldots,X_j) + V_n(X_0,\ldots,X_n) \\ &= Z_n \end{aligned}$$

in izrek sledi. □

Izrek 4.1.3. *Za čas ustavljanja* ν_N *definiran v (4.5) izraz (4.4) zavzame minimum, ki je enak* $E(v_0(X_0))$.

Dokaz Iz izreka 4.1.2 sledi

$$E\left[Z_\nu\right] \ge E\left[Z_0\right] = E\left[V_0(X_0)\right] .$$

za vsak čas ustavljanja ν. Po definiciji velja

$$E\left[V_0(X_0)\right] \le E\left[Z_\nu\right] \le E\left[\sum_{j=0}^{\nu-1} c_j(X_0,\ldots,X_j) + g_\nu(X_0,\ldots,X_\nu)\right] .$$

Če zamenjamo ν z ν_N, dobimo

$$\begin{aligned} & E\left[Z_{\nu_N\wedge(n+1)}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \mathbf{1}(\nu_N \le n)Z_{\nu_N} + \mathbf{1}(\nu_N \ge n+1)E\left[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \mathbf{1}(\nu_N \le n)Z_{\nu_N} \\ &\qquad +\mathbf{1}(\nu_N \ge n+1)\left[\sum_{j=1}^{n} c_j(X_0,\ldots,X_j) + E\left[V_{n+1}(X_0,\ldots,X_{n+1})|X_0,\ldots,X_n\right]\right] \\ &= \mathbf{1}(\nu_N \le n)Z_{\nu_N} + \mathbf{1}(\nu_N \ge n+1)\left[\sum_{j=1}^{n-1} c_j(X_0,\ldots,X_j) + V_n(X_0,\ldots,X_n)\right] \\ &= \mathbf{1}(\nu_N \le n)Z_{\nu_N} + \mathbf{1}(\nu_N \ge n+1)Z_n \\ &= Z_{\nu_N\wedge n} . \end{aligned}$$

Sledi, da je $(Z_{\nu_N \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ martingal, zato je

$$E\left[V_0(X_0)\right] = E\left[Z_{\nu_N \wedge 1}\right] = \cdots E\left[Z_{\nu_N \wedge N}\right] .$$

Iz definicije Z_n sledi, da je $E\left[V_0(X_0)\right]$ minimum, dosežen pri ν_N. $\square$

Rezultati izreka 4.1.3 veljajo za markovske verige s splošnim prostorom stanj. Če sta X in Y neodvisni markovski verigi, potem rezultat izreka velja tudi za markovsko verigo $(X_j, Y_j)_{1 \leq j \leq N}$. V tej obliki bomo izrek uporabljali v zavarovalniških aplikacijah, ki sledijo.

4.2 Aplikacije v zavarovalništvu

Predpostavljajmo, da je neto premija m zavarovancev investirana v naložbeni sklad, katerega gibanje cene sledi preprostemu Cox-Ross-Rubinsteinovem modelu. Cene sklada označimo s $S_0, S_1, \ldots, S_N$. Ob času $j = 0$ skupna investicija zavarovancev torej znaša mS_0.

Obrestna mera r naj bo konstantna. Cena sklada je v vsakem časovnem trenutku z verjetnostjo p pomnožena z u, z verjetnostjo $1 - p$ pa z vrednostjo d. Veljajo običajne predpostavke $d < 1 < 1 + r < u$.

Garancije, ki jih zavarovalnice jamčijo pri naložbenih življenjskih zavarovanjih, so lahko različnih oblik. V našem primeru bo zajamčena vrednost izplačila ob času N enaka

$$(1 + r)^N S_0, \tag{4.1}$$

kjer je r neka vnaprej določena obrestna mera, specificirana ob sklenitvi zavarovalne pogodbe.

V času N, torej ob izteku pogodbe, zavarovanec prejme višjo od vrednosti $(1+r)^N S_0$ in S_N, torej:

$$G = \max((1 + r)^N S_0, S_N).$$

Če bi zavarovalnica ob času $j = 0$ kupila m prodajnih opcij z izvršno ceno

$$k = (1 + r)^N S_0$$

in izvršnim časom N, bi se s tem popolnoma obvarovala pred tveganjem gibanja cene sklada. Vendar taka strategija ne upošteva smrtnosti. Strategijo, ki smo jo razvili in bo predstavljena v nadaljevanju, bo kombinacija jemanja deležev vzajemnega sklada in iskanja optimalnega časa za nakup prodajnih opcij. Taka strategija bo vsaj delno obvarovala zavarovalnico pred naložbenim tveganjem.

Predlagana strategija je naslednja. Zavarovalnica shrani na stran delež vrednosti vzajemnega sklada, če so izpolnjeni določeni pogoji. Na primer, če je trenutna cena enote sklada višja od sedanje vrednosti zajamčene garancije. Ti shranjeni deleži predstavljajo rezerve, ki se jih lahko kasneje porabi za pokrivanje izgube ali v druge namene.

Zavarovalnica se lahko v vsakem trenutku odloči preklopiti na varovanje prihodnjih obveznosti z izvedenimi finančnimi instrumenti. Odločitev je odvisna od trenutne cene enote vzajemnega sklada in od števila trenutno živih zavarovancev. V primeru, da se zavarovalnica odloči za preskok na varovanje z opcijami, se lahko akumulirani deleži porabijo za delno pokritje cene opcij.

Poiskali bomo optimalen čas preklopa, ki bo minimiziral končno izgubo za zavarovalnico. Opišimo predlagano strategijo še z matematičnimi simboli.

Predpostavljajmo, da so vsi zavarovanci, ki jih je m, stari x let. Označimo število živih zavarovancev ob času $j = 0, 1, \dots, N$ z

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N.$$

Predpostavljali bomo še, da je smrtnost neodvisna od gibanja cene sklada, ki je po [28] v realnem svetu razumna predpostavka. Pogodba, ki jo sklenejo, garantira minimalen donos, ki je izplačan ob izteku pogodbe v primeru doživetja. Zaradi poenostavitve bomo predpostavljali, da pogodbe ne predvidevajo minimalnega garantiranega izplačila v primeru smrti v akumulacijski dobi pogodbe.

Opazimo, da je zaporedje $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ zaradi staranja zavarovancev nehomogena markovska veriga, za katero velja

$$P(\alpha_{j+1} = i - k | \alpha_j = i) = \binom{i}{k} q_{x+j}^k p_{x+j}^{i-k},$$

kjer so možne vrednosti $k = 0, 1, \dots, i$ in q_{x+j} predstavlja verjetnost, da zavarovanec star $x + j$ umre v roku enega leta in $p_{x+j} = 1 - q_{x+j}$ verjetnost, da zavarovanec star $x + j$ preživi naslednje leto, torej do časa $x + j + 1$. Znotraj simulacij strategije bomo v vsakem časovnem intervalu simulirali tudi smrtnost. Za simuliranje smrtnosti bomo uporabili Slovenske tablice smrtnosti [29].

Zavarovalnica v vsakem trenutku j da na stran razliko med ceno vzajemnega sklada S_j in akumulirano vrednostjo $S_0(1 + r)^j$, če je ta razlika pozitivna in 0 v nasprotnem primeru, ali pa ima možnost kupiti neko število opcij z izvršno ceno $k = S_0(1 + r)^N$.

Glede števila opcij bomo obravnavali dva različna primera, ki bosta predstavljena v nadaljevanju.

V oznakah iz razdelka 4.1 bodo deleži, ki jih bo dala zavarovalnica na stran, zmanjšali izgubo in zato definiramo

$$c_j(S_0, S_1, \ldots, S_j) = -m \max\left(S_j - S_0(1+r)^j, 0\right).$$

Označimo ceno nakupne opcije z izvršno ceno $k = S_0(1+r)^N$ v trenutku j s

$$\pi_j(S_j, k, N).$$

Cena je določena po standardnem postopku, opisanem v izreku 2.1.9. Obravnavali bomo dva primera nakupa različnega števila opcij. Prvi bo, da kupimo

$$k_1 = \alpha_j$$

opcij, torej toliko kot je živih zavarovancev v trenutku j. S tem se zavarovalnica popolnoma zavaruje pred tveganjem primanjkljaja za poplačilo obveznosti do zavarovancev, vendar dokaj visoka cena opcij prispeva k izgubi.

V oznakah od prej postavimo

$$g_j(S_0, \ldots, S_j, \alpha_0, \ldots, \alpha_j) = \alpha_j \pi_j(S_j, k, N). \tag{4.2}$$

Drugi obravnavani primer bo, ko gre zavarovalnica v nakup

$$k_2 = E(\alpha_N | \alpha_j)$$

opcij. To zavarovalnico sicer samo delno zavaruje pred tveganjem končnega primanjkljaja, saj se lahko zgodi, da se bo končno število živih zavarovancev razlikovalo od ocenjenega števila, vendar je ta način bolj realističen. Za $j < N$ definiramo

$$g_j(S_0, \ldots, S_j, \alpha_0, \ldots, \alpha_j) = E(\alpha_N | \alpha_j) \pi_j(S_j, k, N). \tag{4.3}$$

in

$$g_N(S_0, \ldots, S_N, \alpha_0, \ldots, \alpha_N) = \alpha_N \pi_N(S_N, k, N). \tag{4.4}$$

V obeh primerih bo

$$L_j = (1+r)^{-j} g_j(S_0, \ldots, S_j, \alpha_0, \ldots, \alpha_j) + \sum_{i=1}^{j-1} (1+r)^{-i} c_i(S_0, \ldots, S_i) \tag{4.5}$$

diskontirana izguba za zavarovalnico, če so opcije kupljene v trenutku j. Čas nakupa ν izberemo tako, da bo pričakovana izguba

$$E(L_\nu) \tag{4.6}$$

minimalna. Opomnimo, da je optimalnost odvisna od verjetnosti p v modelu gibanja cene vzajemnega sklada. Rešitev tega problema ustavljanja je podana v izreku 4.4. Opomnimo še, da $\nu = N$ pomeni, da zavarovalnica ne kupi opcij, temveč pokrije morebitno izgubo iz lastnih sredstev.

4.2.1 Simulacije

Eksplicitni izračuni niso mogoči, zato v tem razdelku predstavljamo rezultate simulacij. Vhodni podatki so naslednji:

S_0	1
u	$1,04$
d	$0,98$
r	$0,01$
N	5
m	1000
x	30
z	5000

kjer z označuje število simulacij. Pri prvem predstavljenem primeru zavarovalnica kupuje $k_1 = \alpha_\nu$ opcij. Za različne vhodne podatke za p, so opisne statistike za porazdelitev končne izgube L_N predstavljene v tabeli 4.1.

V tabeli 4.2 so predstavljeni še rezultati, ko zavarovalnica v optimalnem času ν kupi $k_2 = E(\alpha_T|\alpha_\nu)$ opcij.

p	$E(L_N)$	SD(L_N)	90. centil za L	$E(\nu)$	SD(ν)
0,51	-32,45	134,55	87,54	4,71	0,69
0,50	-21,08	122,52	60,58	3,70	1,57
0,49	-20,45	123,41	42,08	2,85	1,77
0,48	-17,62	117,49	41,72	2,63	1,74

Tabela 4.1: Opisne statistike za različne vrednosti p za primer k_1.

p	$E(L_N)$	SD(L_N)	90. centil za L	E(ν)	SD(ν)
0,51	0,69	165,27	195,57	3,45	1,60
0,50	9,42	160,78	197,46	3,22	1,64
0,49	11,45	158,66	196,50	3,05	1,63
0,48	18,36	152,96	197,24	2,75	1,64

Tabela 4.2: Opisne statistike za različne vrednosti p za primer k_2.

Opazimo, da so časi ustavljanja pri obeh primerih pri različnih gibanjih cen sklada in smrtnosti različni. Iz tabel 4.1 in 4.2 opazimo, da se pričakovana končna izguba z zmanjševanjem verjetnosti p veča, vrednost pričakovanega časa ustavljanja pa se manjša. Torej, manjša kot je verjetnost, da se bo cena vzajemnega sklada gibala gor, prej naj se zavarovalnica odloči za nakup opcij.

Iz tabele 4.1 razberemo, da se s strategijo, predstavljeno v tej doktorski disertaciji, lahko zavarovalnica povsem zavaruje pred tveganjem, saj negativne vrednosti pričakovane izgube predstavljajo dobiček. Vendar še enkrat opomnimo, da je strategija postavljena na predpostavki, da so na trgu na voljo opcije poljubnih izvršnih cen in poljubnih ročnosti.

Rezultate v nadaljevanju predstavljamo še grafično.

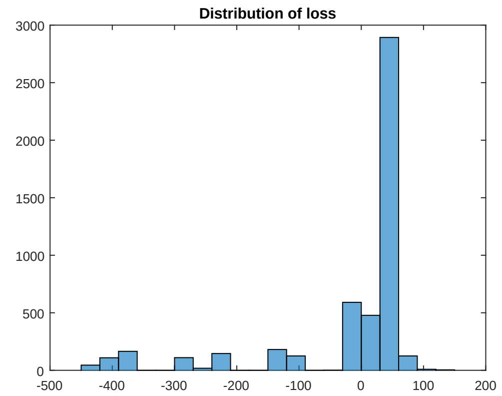
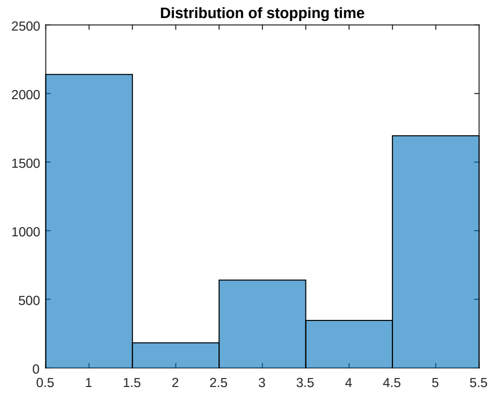
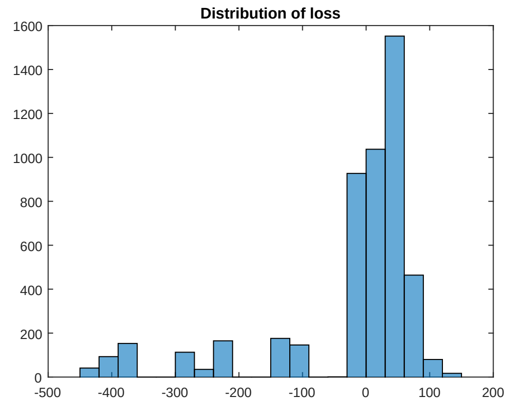
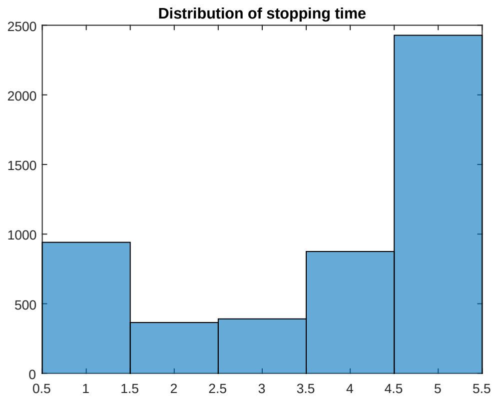
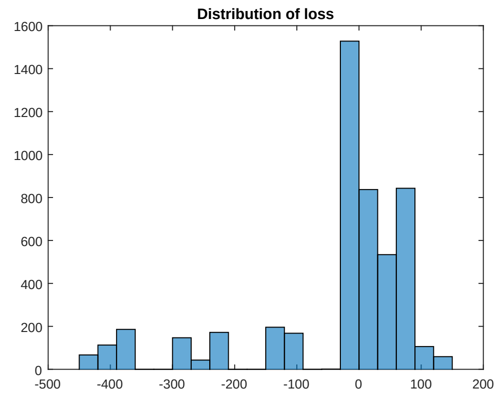
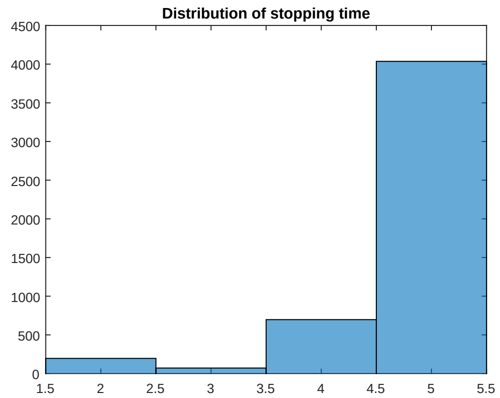
<table>
<tr><th>p</th><th>L_N</th><th>ν</th></tr>
<tr><td>0,49</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>0,51</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabela 4.3: Tabela porazdelitev za različne vrednosti p za primer k_1.

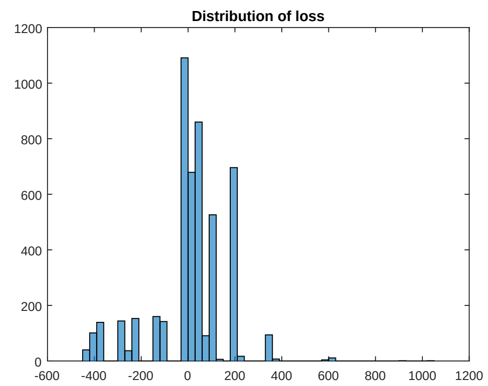
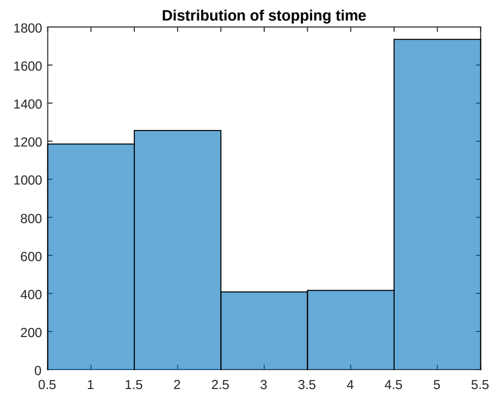
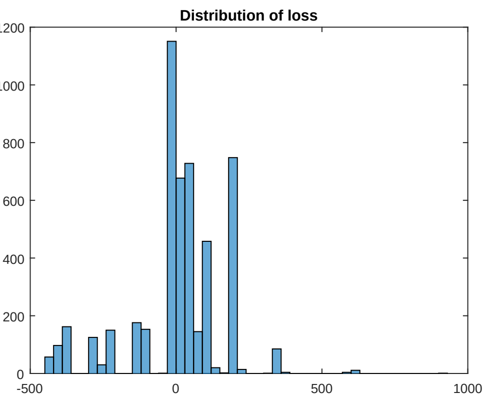
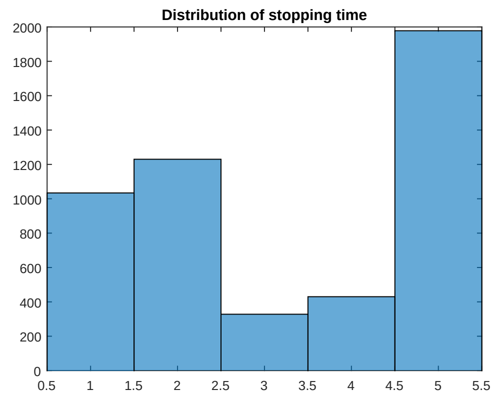
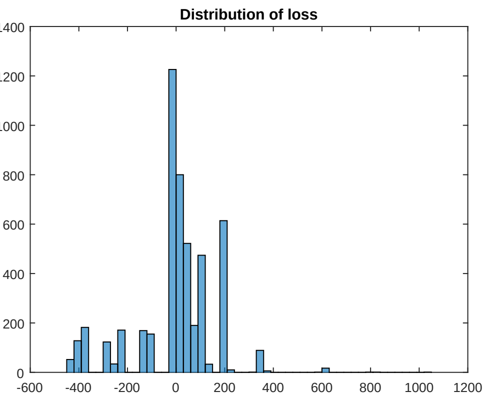
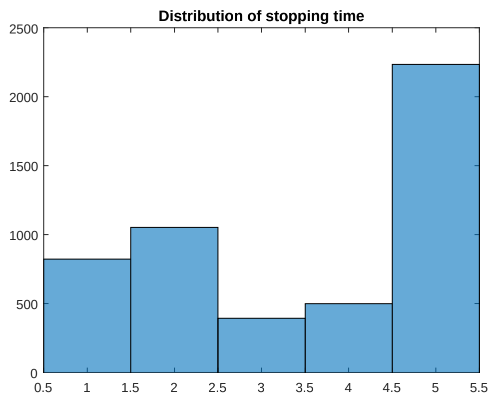
p	L_N	ν
0,49		
0,50		
0,51		

Tabela 4.4: Tabela porazdelitev za različne vrednosti p za primer k_2.

V tabeli 4.5 predstavljamo še primerjavo obeh primerov za nakup različnega števila opcij k_1 in k_2, ko je $p = 0,48$.

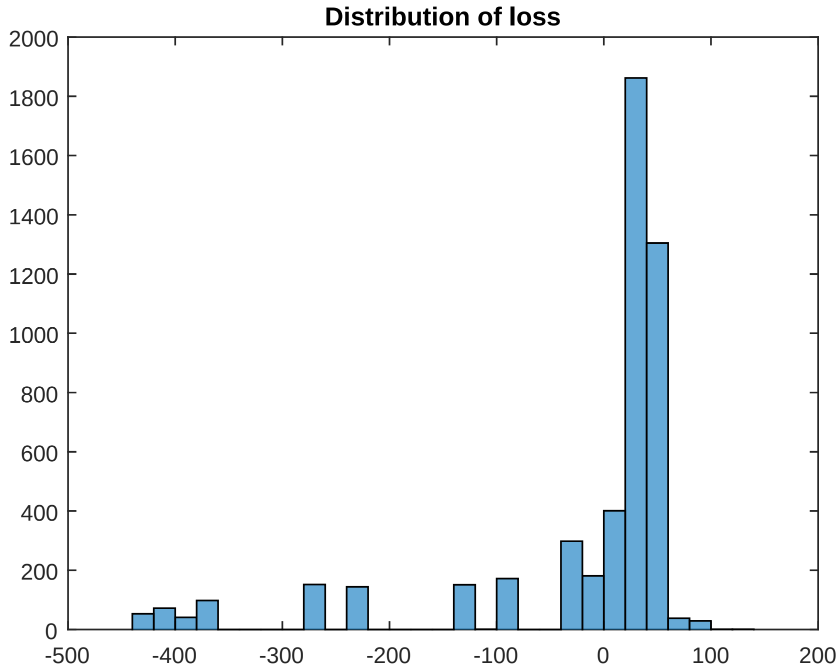
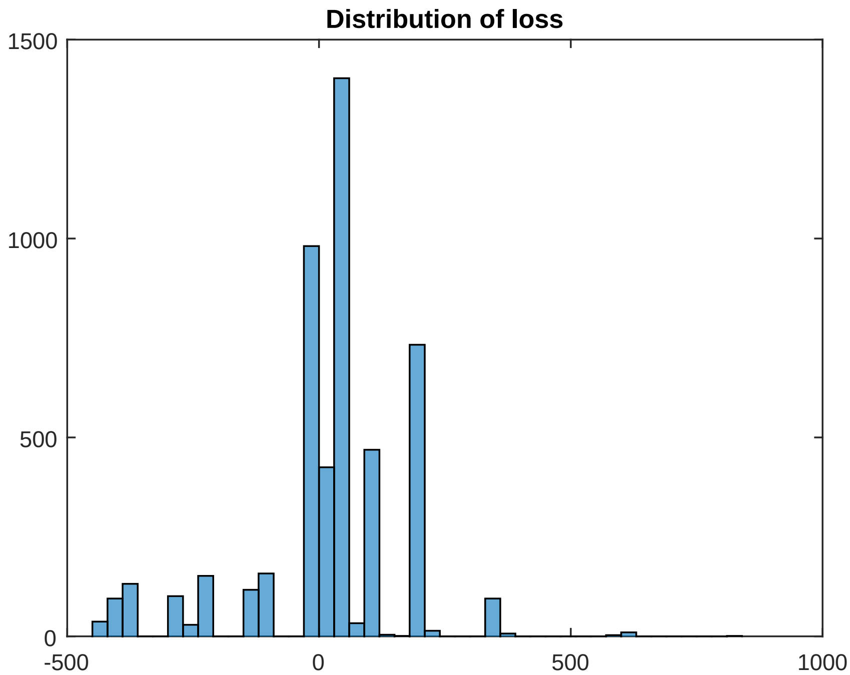
	L_N
k_1	
k_2	

Tabela 4.5: Primerjava porazdelitev izgub med primeroma k_1 in k_2 za $p = 0,48$.

Opazimo lahko, da so vrednosti pričakovane izgube v primeru k_1 nižje kot v primeru k_2. To lahko pripišemo napačni oceni smrtnosti. Ta je lahko v našem primeru posledica nižjega števila simulacij smrtosti, ki je bila v našem primeru 5000. Zavarovalnica namreč kupi toliko opcij, kot je v trenutku j ocenila, da jih bo potrebovala ob izteku pogodbe, glede na podatke, ki jih ima ob času j. V primeru, da je ocenjena vrednost preživelih manjša od dejanskega števila živih v trenutku N, bo zavarovalnica na ta račun utrpela izgubo.

To poglavje zaključujemo z mislijo, da je predstavljena teorija postavljena na precej poenostavljenih teoretičnih predpostavkah, vendar rezultati simulacij kažejo, da ima strategija nekaj dobrih zasnov, ki se jih da prilagoditi realnim razmeram.

Poglavje 5

Sklep

Rezultati, predstavljeni in dokazani v doktorski disertaciji, dodajajo in razširjajo znanje s področja aktuarske matematike, bolj podrobno s področja upravljanja s tveganji pri zavarovalniških produktih z garancijo. Osredotočili smo se na zavarovanja, ki ponujajo garancijo v primeru doživetja.

Glavni rezultat doktorske disertacije sta dve predstavljeni strategiji upravljanja z varovalnim portfeljem pri naložbenih produktih z garancijo. V tretjem poglavju doktorske disertacije je predstavljena strategija z optimalnim preskokom, ki temelji na Snellovi ovojnici. Uporabimo torej že znano teorijo in jo vkomponiramo v finančni model. Privzamemo preprost Cox-Ross-Rubinsteinov model, kjer se vrednost vzajemnega sklada v vsakem časovnem intervalu z verjetnostjo p pomnoži s faktorjem u in z verjetnostjo $1-p$ s faktorjem d. Velja $d < 1 < u$, torej se vzajemni sklad na vsakem koraku premakne bodisi gor bodisi dol. Situacijo postavimo v zavarovalniški kontekst, kjer imamo m enako starih zavarovancev, ki sklenejo naložbeni produkt z garancijo z dobo trajanja T. Znano je, da se z nakupom ustreznih opcij lahko zavarovalnica popolnoma zavaruje pred tveganjem primanjkljaja sredstev za izplačilo obveznosti. Vendar tudi cena izvedenih finančnih instrumentov prispeva k primanjkljaju. Zato smo v naši strategiji iskali optimalni čas nakupa opcij v interakciji s trgom. Ravno slednje omogoča regulativa v prenovljeni evropski zakonodaji Solventnost 2. Na eni strani imamo v strategiji pričakovano vrednost primanjkljaja zavarovalnice, ki je odvisna od trenutne cene vzajemnega sklada, v katerega so bile investirane neto premije zavarovancev in v primeru s smrtnostjo, števila živih zavarovancev v danem trenutku. Na drugi strani imamo ceno opcij, ki naj jih zavarovalnica kupi, da se zavaruje pred tveganjem primanjkljaja. Tudi cena potrebnih opcij je odvisna od trenutne cene vzajemnega sklada in, v primeru s smrtnostjo, števila živih zavarovancev v danem trenutku. Opomnimo, da z vpeljavo smrtnosti, model ni več poln in posledično popolno varovanje pred tveganjem razen z nadzaščito ni več mogoče. Optimalni čas nakupa opcij poiščemo s Snellovo ovojnico za zaporedju slučajnih spremenljivk $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$, ki je definirano kot razlika med pričakovano vrednostjo primanjkljaja za zavarovalnico in ceno opcij. Optimalni čas ustavljanja je tak čas ustavljanja, da je pričakovana vrednost zaporedja ob tem času največja glede na vse čase ustavljanja. Znan izrek nam še pove, da je najmanjši optimalni čas ustavljanja prvi trenutek, ko je pričakovana vrednost Snellove ovojnice manjša od trenutne vrednosti zaporedja Z_t. Finančno si to lahko interpretiramo, da je optimalni čas nakupa opcij v trenutku, ko se zavarovalnici najbolj izplača kupiti opcije. Z numeričnimi simulacijami smo pokazali, da so ob različnih potekih gibanja cen vzajemnega sklada časi ustavljanja različni. Za izbrane vhodne podatke je iz rezultatov tudi razvidno, da se porazdelitev končne izgube v primerjavi s primerom, ko je uporabljeno Δ-varovanje, bistveno spremeni. Pričakovane vrednosti in standardni odkloni končne izgube so v primeru brez smrtnosti in v primeru s smrtnostjo bistveno manjši kot v primeru Δ-varovanja. Hipoteze 1, 2, 3, 4, 5 in 6 iz uvoda smo torej potrdili. Poudariti moramo, da pri izračunu pričakovanega primanjkljaja verjetnost gibanja sklada navzgor p ni enaka martingalski verjetnosti, ampak je postavljena s strani zavarovalnice same. Izkaže se, da je predlagana strategija še posebej uspešna pri neugodnih tržnih pogojih.

V četrtem poglavju doktorske disertacije je predstavljena strategija upravljanja varovalnega portfelja pri naložbenih produktih z garancijo, ki temelji na znanih dognanjih iz teorije optimalnega ustavljanja. Iz aktuarskega vidika definiramo strategijo, kjer zavarovalnica do določenega trenutka shranjuje določen delež vrednosti vzajemnega sklada v poseben rezervni sklad, ki ga lahko uporabi na koncu za pokritje primanjkljaja. Deleže zavarovalnica jemlje samo, če so izpolnjeni neki pogoji. Na primer, če je trenutna vrednost sklada nad diskontirano vrednostjo zajamčene garancije. Poleg zbiranja deležev strategija išče optimalni čas nakupa opcij, ki bi zavarovalnico zavarovale pred tveganjem primanjkljaja, to je čas, ko bo pričakovana vrednost razlike med ceno opcije in shranjenimi deleži najmanjša. Simulacije so pokazale, da so časi ustavljanja pri različnih gibanjih cen sklada različni in da je varovanje pred tveganjem primanjkljaja precej uspešno.

Pri postavljanju obeh strategij smo privzeli kar nekaj predpostavk, ki so model precej poenostavile. Privzeli smo preprost Cox-Ross-Rubinsteinov model, ki je diskreten. Predpostavljali smo, da so na trgu dosegljive opcije s poljubnimi izvršnimi cenami in poljubnimi ročnostmi, kar v realnosti ni mogoče. Predpostavljali smo, da sklenemo zavarovalne pogodbe z m zavarovanci enake starosti, kar je na manjših trgih v realnosti zelo težko mogoče. Privzeta je tudi konstantna tabela smrtnosti. Vendar, kljub vsemu poenostavljanju rezultati kažejo, da predstavljeni strategiji upravljanja s tveganji bistveno spremenita porazdelitvi končnih izgub za zavarovalnico. Rezultati nakazujejo, da sta pristopa v obeh strategijah prava in teoretična izhodišča ustrezna. Za približevanje realnemu stanju se lahko predstavljen koncept razširi na zvezen model, opcije z dolgimi ročnostmi se lahko aproksimirajo z opcijami dosegljivimi na trgu, za zavarovance različnih starosti se lahko uporabijo ustrezne tabele smrtnosti, lahko se v strategijo vključi tudi bodoče spreminjanje tabele smrtnosti.

Rezultati doktorske disertacije imajo posebno uporabno vrednost, saj so pripravljeni nastavki za uporabo predstavljenih strategij pri upravljanju s tveganji pri naložbenih produktih z garancijo, ki se lahko z določenimi nadgraditvami uporabljajo v zavarovalnicah.

Literatura

[1] Slovensko zavarovalno združenje. Statistični zavarovalniški bilten 2017. 2017.

[2] Evropski parlament in Svet Evropske unije. Direktiva 2009/138/es. 2009.

[3] John Cox C., Stephen Ross A., and Mark Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–263, 1979.

[4] Tomas Björk. *Arbitrage theory in continuos time, 2nd Edition.* Oxford University Press, 2004.

[5] Thomas Møller. Hedging equity-linked life insurance contracts. *N. Am. Actuar. J.*, 5(2):79–95, 2001.

[6] M.J. Brennan and E.S. Schwartz. The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. *Journal of Financial Economics*, 3:195–213, 1976.

[7] P.P. Boyle and E.S. Schwartz. Equilibrium prices of guarantees under equity-linked contracts. *Journal of Risk and Insurance*, 44(4):639–660, 1977.

[8] Dirk Jens F. Nonnenmacher. Equity-linked life insurance in Germany: Quantifying the risk of additional policy reserves. pages 719–738. Cairns, Australia, 1997.

[9] Anna Rita Bacinello, Pietro Millossovich, and Ermanno Pitacco. Variable annuities: Risk identification and risk assesment. *CAREFIN Research Paper no. 14/2010*, 2010.

[10] Anna Rita Bacinello, Pietro Millossovich, Annamaria Olivieri, and Ermanno Pitacco. Variable annuities: a unifying valuation approach. *Insurance Math. Econom.*, 49(3):285–297, 2011.

[11] Nteukam T. Oberlain, Frédéric Planchet, and Pierre-E. Thérond. Optimal strategies for hedging portfolios of unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee. *Insurance Math. Econom.*, 48(2):161–175, 2011.

[12] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, London, 1996.

[13] Damien Lamberton. Optimal stopping and american options. 2009. Lecture notes.

[14] Mihael Perman and Ana Zalokar. Optimal hedging strategies in equity-linked products. *Sprejet v objavo pri Journal of Computational and Applied Mathematics.*

[15] Mihael Perman and Ana Zalokar. Some extensions of optimal stopping with financial applications. *Sprejet v objavo pri Ars Mathematica Contemporanea.*

[16] M.and Finkelstein G.and Ritchie A.and Su K.and Wilson D. Ledlie. Variable annuities. *British Actuarial Journal*, 14(Part II-61):327–389, 2008.

[17] E. Pitacco, S. Denuit, M.and Haberman, and A. Olivieri. *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford University Press, 2009.

[18] M. Walden. The whole life insurance policy as an options package: an empirical investigation. *The Journal of Risk and Insurance*, 52(1):44–58, 1985.

[19] M. Smith. The life insurance policy as an options package. *The Journal of Risk and Insurance*, 49(4):583–601, 1982.

[20] Darrell Duffie. *Dynamic Asset Pricing theory, 3rd Edition.* Princeton University Press, 2001.

[21] Dirk Jens F. Nonnenmacher and Jochen Russ. Arithmetic averaging equity-linked life insurance policies in Germany. *Insurance Math. Econom.*, 25(1):23–35, 1999.

[22] Dirk Jens F. Nonnenmacher. Risk models in the context of equity-linked life insurance. pages 560–572. Singapore, 1998.

[23] Dirk Jens F. Nonnenmacher. Guaranteed equity-linked products. pages 413–428. Cambridge, UK, 1998.

[24] Thomas Møller. Risk-minimizing hedging strategies for insurance payment processes. *Finance Stochast.*, 5(2):419–446, 2001.

[25] Thomas Møller. Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts. 28(1):17–47, 1998.

[26] J. Pansera. Discrete-time local risk minimization of payment processes and applications to equity-linked life-insurance contracts. *Insurance Math. Econom.*, 50(2):1–11, 2012.

[27] C. Frantz and J.-F. Chenut, X.and Walhin. Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee. 2003.

[28] Jan Dhaene, Alexander Kukush, Elisa Luciano, Wim Schoutens, and Ben Stassen. On the (in-)dependence between financial and actuarial risks. *Insurance Math. Econom.*, 52(3):522–531, 2013.

[29] Slovenske tablice smrtnosti. *Uradni list Republike Slovenije*, 18:2148–2149, 2016.

[30] A. N. Shiryaev. *Optimal stopping rules.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978. Translated from the Russian by A. B. Aries, Applications of Mathematics, Vol. 8.

[31] A. N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance. Facts, Models, Theory.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999.

Kazalo slik

2.1 Rekombinirano binomsko drevo. 21

2.2 Uporaba binomskega algoritma za izračun cene evropske prodajne opcije s $K = 80$. 27

2.3 Uporaba binomskega algoritma za izračun varovalnega portfelja za evropsko prodajno opcijo s $K = 80$. 28

3.1 Čas ustavljanja na binomskem drevesu, kjer so v vozliščih zapisane vrednosti Z_n. 33

3.2 Čas ustavljanja na binomskem drevesu s prirejenimi vrednostmi. 34

3.3 Čas ustavljanja na binomskem drevesu, kjer "lovimo" enico. 35

3.4 Porazdelitev končne izgube v primeru Δ-varovanja v primeru brez smrtnosti. 40

3.5 Porazdelitev končne izgube v primeru varovanja z opcijami v primeru brez smrtnosti. 41

3.6 Porazdelitev optimalega časa preskoka ν v primeru brez smrtnosti. 42

3.7 Porazdelitev časa ustavljanja ν. 48

3.8 Porazdelitev končne izgube v primeru Δ-varovanja. 49

3.9 Porazdelitev končne izgube v primeru preskoka na varovanje z opcijami. . 49

3.10 Porazdelitev končne izgube v primeru Δ-varovanja. 51

3.11 Porazdelitev časa preskoka v primeru z minimalnimi garancijami v primeru smrti in $u = 1,05$. 58

Kazalo tabel

3.1 Opisne statistike za $p = 0,49$. 41

3.2 Opisne statistike za $p = 0,49$. 50

3.3 Opisne statistike za različne vrednosti p. 50

3.4 Porazdelitvi izgube v primeru preskoka za k_1 (zgoraj) in k_2. 52

3.5 Simulirana porazdelitev končne izgube za primer Δ-varovanja (zgoraj) in za preskok na varovanje z opcijami z vključenimi izplačili v primeru smrti. 55

3.6 Opisne statistike za primer z garantiranimi izplačili v primeru smrti. . . . 56

3.7 Simulirana porazdelitev izgube za primer Δ-varovanja (zgoraj) in za preskok na varovanje z opcijami z vključenimi izplačili v primeru smrti, kjer je $u = 1,05$. 57

3.8 Opisne statistike za primer z garantiranimi izplačili v primeru smrti, kjer je $u = 1,05$. 58

4.1 Opisne statistike za različne vrednosti p za primer k_1. 69

4.2 Opisne statistike za različne vrednosti p za primer k_2. 69

4.3 Tabela porazdelitev za različne vrednosti p za primer k_1. 70

4.4 Tabela porazdelitev za različne vrednosti p za primer k_2. 71

4.5 Primerjava porazdelitev izgub med primeroma k_1 in k_2 za $p = 0,48$. . . . 72