UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Ohranjevalci sosednosti na pravokotnih matrikah

(Adjacency preservers on rectangular matrices)

Ime in priimek: Borut Umer
Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja
Mentor: doc. dr. Marko Orel

Koper, september 2017

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Borut UMER

Naslov magistrskega dela: Ohranjevalci sosednosti na pravokotnih matrikah

Kraj: Koper

Leto: 2017

Število listov: 59 število slik: 4

Število referenc: 35

Mentor: doc. dr. Marko Orel

UDK:

Ključne besede: ohranjevalci sosednosti, jedra

Math. Subj. Class. (2010): 15A86, 15B33

Izvleček:
Magistrska naloga preučuje ohranjevalce sosednosti na pravokotnih matrikah. To so preslikave iz prostora vseh $m \times n$ matrik nad poljubnim obsegom $\mathbb{D}$, ki imajo lastnost, da ohranjajo sosednost. Glavni del naloge je pregled izreka 4.3 in njegovega dokaza, v katerem so klasificirane vse bijektivne preslikave na tovrstnih matrikah, ki ohranjajo sosednost v obe smeri. Začnemo z motivacijo, zakaj je sploh smiselno obravnavati ohranjevalce. V drugem poglavju so obnovljeni osnovni koncepti obsegov in matrik ter nekaj pomembnejših definicij in trditev, potrebnih za razumevanje dokaza izreka 4.3. Tretje poglavje je namenjeno definiranju in dokazovanju manj znanih lastnosti, povezanih s prostorom pravokotnih matrik nad poljubnim obsegom $\mathbb{D}$. Tu tudi omenimo znan koncept razdalje med matrikami. V podpoglavju ponovimo fundamentalni izrek afine geometrije, ki predstavlja enega izmed temeljev pri dokazu izreka 4.3. Slednji se nahaja v četrtem poglavju, ki predstavlja osrednji del naloge. Peto poglavje je namenjeno pregledu sodobnih posplošitev izreka 4.3. Šesto poglavje predstavi grafološki pogled na glavni izrek iz magistrske naloge in na njegove posplošitve.

Key words documentation

Name and SURNAME: Borut UMER

Title of the master thesis: Adjacency preservers on rectangular matrices

Place: Koper

Year: 2017

Number of pages: 59 Number of figures: 4

Number of references: 35

Mentor: Assist. Prof. Marko Orel, PhD

UDC:

Keywords: adjacency preservers, core

Math. Subj. Class. (2010): 15A86, 15B33

Abstract:
This master's thesis studies the adjacency preservers on rectangular matrices. These are maps from the space of all $m \times n$ matrices over a division ring $\mathbb{D}$, with the property of preserving adjacency. The main topic is the study of Theorem 4.3 and the proof that classifies all bijective maps on such matrices that preserve adjacency in both directions. The introductory part explains why we should study the adjacency preservers. In the second chapter, the basic concepts about division rings and matrices are summed up along with some definitions and theorems necessary for understanding the proof of Theorem 4.3. The third chapter is dedicated to the proofs of some lesser known facts about the space of rectangular matrices over a division ring $\mathbb{D}$. In the same chapter the famous concept of distance between matrices is mentioned. In the subsection we recall the fundamental theorem of affine geometry, which represents one of the fundamentals for the proof of Theorem 4.3. This theorem appears in the fourth chapter, which represents the central part of the thesis. The fifth chapter offers some new generalizations of the Theorem 4.3. The sixth chapter represents the meaning of the main theorem and some of its generalizations in the language of graph theory.

Zahvala

Najprej bi se rad zahvalil Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem, ki je omogočala moj študij na omenjeni fakulteti in tudi vsem profesorjem Fakultete za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije v Kopru, ki so mi kadar koli nesebično posredovali znanje in me s tem pripeljali do sedanje točke v mojem življenju.

Posebna zahvala gre mentorju doc. dr. Marku Orlu, ki mi je predlagal širšo podlago za izbor uporabljeno literaturo. Bil je vedno na voljo, ko sem potreboval motivacijo in nasvete.

Na koncu bi se rad iskreno zahvalil tudi staršem in prijateljem, ki so me vzpodbujali in podpirali v času nastajanja te magistrske naloge.

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Seznam kratic

tj.	to je
npr.	na primer

1 Uvod

V magistrski nalogi bomo obravnavali ohranjevalce sosednosti na pravokotnih matrikah. Omenili bomo pomembne definicije, izreke in trditve, ki jih bomo tudi dokazali. Najpomembnejši del naloge je predstavitev izreka 4.3 in njegov dokaz, ki je podan na zelo zahtevni ravni in povzet iz knjige [34].

V teoriji ohranjevalcev se pojavljajo problemi s klasifikacijo vseh preslikav na množici, opremljeni z algebraično strukturo, ki ohranjajo določene lastnosti, kot npr. funkcije, podmnožice, relacije. Za motivacijo si oglejmo naslednja primera.

Primer 1.1 ([4] Ohranjevalci determinant (Frobenius, 1897))**.** Za preslikavo ϕ na množici vseh $n \times n$ kompleksnih matrik pravimo, da ohranja determinanto, če velja $\det \phi(A) = \det A$ za vsako matriko A. Frobenius je leta 1897 dokazal, da bijektivna linearna preslikava ohranja determinanto natanko tedaj, ko je oblike

$$\phi(A) = PAQ \quad \text{ali} \quad \phi(A) = PA^T Q,$$

kjer sta P in Q fiksni matriki, za kateri velja $\det(PQ) = 1$.

Primer 1.2 (Glej npr. [33], ohranjevalci obrnljivosti)**.** Naj bo $\mathbb{F}$ komutativen obseg z vsaj tremi elementi. Za preslikavo ϕ na množici vseh $n \times n$ matrik s koeficienti iz obsega $\mathbb{F}$ pravimo, da ohranja obrnljivost v obe smeri, če velja, da je matrika A obrnljiva natanko tedaj, ko je obrnljiva matrika $\phi(A)$. Izkaže se, da bijektivna linearna preslikava ohranja obrnljivost v obe smeri natanko tedaj, ko je oblike

$$\phi(A) = PA^\sigma Q + B \quad \text{ali} \quad \phi(A) = P(A^\sigma)^T Q + B.$$

Tukaj so P, Q in B fiksne matrike, od katerih sta P in Q obrnljivi. Preslikava $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ je avtomorfizem obsega, matriko A^σ pa dobimo iz matrike A na tak način, da apliciramo avtomorfizem σ po komponentah.

V magistrski nalogi se bomo posvetili ohranjevalcem relacije sosednosti. To so preslikave ϕ, ki zadoščajo implikaciji $\text{rang}(A - B) = 1 \Longrightarrow \text{rang}(\phi(A) - \phi(B)) = 1$. Poudariti je potrebno, da v nalogi ne bomo imeli predpostavke o linearnosti preslikave. Prvi se je preučevanja ohranjevalcev sosednosti matrik lotil L.-K. Hua v 40. in 50. letih dvajsetega stoletja [8–15]. V nalogi se ukvarjamo predvsem s klasifikacijo ohranjevalcev sosednosti pravokotnih matrik. Klasifikacija bijektivnih preslikav, ki ohranjajo sosednost v obe smeri na pravokotnih, hermitskih, alternirajočih oziroma simetričnih matrikah, je povzeta v knjigi [34]. Aplikacije ohranjevalcev sosednosti matrik zasledimo na različnih matematičnih področjih, kar vključuje algebro, geometrijo in teorijo grafov [7, 30, 34].

Znanstveno raziskovanje na tem področju je še vedno zelo aktivno. V zadnjih letih matematiki poskušajo posplošiti izreke iz knjige [34] z opuščanjem predpostavk o bijektivnosti in ohranjanju sosednosti v obe smeri [3, 16–25, 27–29, 32]. En izmed namenov posplošitev je omogočanje novih aplikacij.

V nalogi se bomo omejili na preučevanje ohranjevalcev sosednosti na pravokotnih matrikah. Temelj naloge predstavlja 4. poglavje, kjer klasificiramo vse bijektivne preslikave na pravokotnih matrikah, ki ohranjajo sosednost v obe smeri. Sodobne posplošitve tega izreka so povzete v poglavju 5. Naloga se zaključi s 6. poglavjem, kjer so ohranjevalci sosednosti prikazani v luči teorije grafov.

2 Terminologija

Večino trditev in definicij bomo privzeli iz knjige [34] . V tem poglavju je podanih nekaj osnovnih definicij in trditev, ki jih bomo uporabljali v nalogi. Z $\mathbb{F}_q$ bomo označevali končni obseg s q elementi, kjer je q potenca praštevila. Naj bo $\mathbb{D}$ poljuben obseg in n pozitivno celo število. Naj bo

$$\mathbb{D}^{(n)} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{D},\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

n-dimenzionalni *vrstični vektorski prostor* (ali *levi vektorski prostor*) nad obsegom $\mathbb{D}$. Skozi nalogo bo $\mathbb{D}$ označeval poljuben obseg in m, n bosta celi števili večji ali enaki 2. Množico $m \times n$ matrik nad obsegom $\mathbb{D}$ bomo označevali z $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. V primeru, ko je $m = n$, bomo pisali $\mathcal{M}_n(\mathbb{D})$ namesto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{D})$.

Definicija 2.1. Matrika velikosti $n \times n$, ki ima same enice na glavni diagonali in na vseh ostalih mestih 0, pravimo *identična matrika* in jo označimo z $I^{(n)}$.

Definicija 2.2. Naj bo A $n \times n$ matrika nad obsegom $\mathbb{D}$. V primeru, ko obstaja taka matrika B, ki zadošča enakosti

$$AB = BA = I^{(n)},$$

potem je matrika A *obrnljiva*, matrika B pa je njen *inverz*.

Definicija 2.3. Matriko velikosti $m \times n$ nad poljubnim obsegom $\mathbb{D}$, ki ima na i, j-tem mestu enico in na vseh ostalih mestih ničle, bomo označevali z E_{ij}.

Definicija 2.4. Množici vseh obrnljivih $n \times n$ matrik nad obsegom $\mathbb{D}$, ki je opremljen z operacijo matričnega množenja, pravimo *splošna linearna grupa* in jo označimo z $GL_n(\mathbb{D})$.

Definicija 2.5. Grupo permutacij na n elementih označimo z $\mathcal{S}_n$ in identično permutacijo označimo z *id*.

Definicija 2.6. Naj bo A $m \times n$ matrika nad obsegom $\mathbb{D}$, naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_m$ vrstični vektorji matrike A ter $b_1, b_2, \dots b_n$ stolpični vektorji matrike A. Pravimo, da ima matrika A *vrstični rang* r, če je $\dim < a_1, a_2, \dots, a_m >= r$ ter *stolpični rang* s, če je $\dim < b_1, b_2, \dots, b_n >= s$.

Trditev 2.7. *(i) Za poljubno $m \times n$ matriko A vrstičnega ranga r in $n \times l$ matriko B vrstičnega ranga n nad obsegom $\mathbb{D}$ velja, da ima matrika AB vrstični rang r.*
(ii) Za poljubno $m \times n$ matriko A stolpičnega ranga n in $n \times l$ matriko B stolpičnega ranga s nad obsegom $\mathbb{D}$ velja, da ima matrika AB stolpični rang s.

Dokaz. Dovolj je pokazati trditev (i). Ker je $n \times l$ matrika B vrstičnega ranga n, to pomeni, da ima B n linearno neodvisnih vrstic. Vzemimo $s \times n$ matriko A_1, ki jo dobimo tako, da matriki A izbrišemo $m - s$ vrstic. Naj bo $b \in \mathbb{D}^{(s)}$, potem je $bA_1B = 0$ natanko tedaj, ko je $bA_1 = 0$. Od tod sledi, da je r linearno neodvisnih vrstic A tudi maksimalno število linearno neodvisnih vrstic AB. □

Definicija 2.8. Za poljubni matriki A in B velikosti $m \times n$ nad obsegom $\mathbb{D}$ pravimo, da sta *ekvivalentni*, če obstaja obrnljiva $m \times m$ matrika P in obrnljiva $n \times n$ matrika Q, da velja $A = PBQ$.

Trditev 2.9. *Naj bo $m \leq n$ in naj bo A matrika velikosti $m \times n$ in vrstičnega ranga m nad obsegom $\mathbb{D}$. Tedaj obstaja taka $(n-m) \times m$ matrika B, da je matrika*

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

obrnljiva.

Dokaz. Označimo vrstice matrike A z $v_1, v_2, \dots, v_m$. Ker so vrstice matrike A linearno neodvisne, lahko dodamo $n-m$ vrstičnih vektorjev $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n$ tako, da vektorji

$$v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n$$

tvorijo bazo prostora $\mathbb{D}^{(n)}$. Naj bo

$$B = \begin{bmatrix} v_{m+1} \\ v_{m+2} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

potem je matrika

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

obrnljiva. □

Trditev 2.10. *Ekvivalentni matriki imata enak stolpični in vrstični rang.*

Dokaz. Naj bosta $m \times n$ matriki A in B ekvivalentni nad obsegom $\mathbb{D}$. To pomeni, da obstajata obrnljivi $m \times m$ in $n \times n$ matriki P in Q, da velja $A = PBQ$. Torej velja $P^{-1}A = BQ$. Po trditvi 2.7 imata B in BQ enak vrstični rang. Podobno, ker velja, da je m-vrstični rang matrike A enak $\dim\{[x_1, x_2, \dots, x_m]\,; [x_1, x_2, \dots, x_m]\, A = 0\}$, kar je enako $\dim\{[x_1, x_2, \dots, x_m]\,; [x_1, x_2, \dots, x_m]\, P^{-1}A = 0\}$, kar pomeni, da imata A in $P^{-1}A$ enak vrstični rang. Od tod sledi, da imata matriki A in B enak vrstični rang. Podobno pokažemo, da imata matriki A in B enak stolpični rang. □

Definicija 2.11. Matriki P velikosti $m \times m$ pravimo *permutacijska matrika*, če ima vsak stolpec in vsaka vrstica matrike P samo en element enak 1 in $m - 1$ elementov enakih 0.

Posledica 2.12. *Za permutacijsko matriko P velja $P^T P = I$, kar pomeni, da je matrika P obrnljiva. Za poljubno matriko A je matrika PA dobljena s permutacijo vrstic matrike A.*

Trditev 2.13. *Matrika velikosti $m \times n$ vrstičnega ranga r nad poljubnim obsegom je ekvivalentna matriki*

$$\begin{bmatrix} I^{(r)} & \\ & 0^{(m-r,n-r)} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Naj bo A $m \times n$ matrika nad obsegom $\mathbb{D}$ vrstičnega ranga r. Izberimo tako $m \times m$ permutacijsko matriko P, da bo prvih r vrstic matrike PA linearno neodvisnih in ostalih $m - r$ vrstic linearna kombinacija prvih r vrstic. Naj bo

$$PA = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix},$$

potem velja

$$v_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} v_j, \text{ za } i = r+1, r+2, \dots, m,$$

za neke koeficiente $b_{r+1,1}, b_{r+1,2}, \dots, b_{mr} \in \mathbb{D}$. Definirajmo

$$B = (b_{ij})_{r+1 \le i \le m, 1 \le j \le r}$$

in

$$P_1 = \begin{bmatrix} I^{(r)} & \\ -B & I^{(m-r)} \end{bmatrix}.$$

Potem je $m \times m$ matrika P_1 obrnljiva in velja

$$P_1 PA = \begin{bmatrix} R \\ 0^{(m-r,n)} \end{bmatrix},$$

kjer je R matrika oblike

$$R = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix}.$$

Ker je matrika R vrstičnega ranga r, po trditvi 2.9 obstaja taka $(n-r) \times r$ matrika S, da je

$$Q = \begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix}$$

obrnljiva matrika velikosti $n \times n$. Torej je

$$\begin{bmatrix} I^{(r)} & \\ & 0^{(m-r,n-r)} \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} R \\ 0^{(m-r,n)} \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi

$$P_1 PAQ^{-1} = \begin{bmatrix} I^{(r)} & \\ & 0^{(m-r,n-r)} \end{bmatrix}.$$

□

Posledica 2.14. *Stolpični in vrstični rang poljubne $m \times n$ matrike nad poljubnim obsegom sta enaka.*

Definicija 2.15. Za poljubno matriko A označimo

$$\mathrm{rang}(A) := \text{vrstični rang}(A) = \text{stolpični rang}(A).$$

Trditev 2.16. *Naj bosta A in B poljubni $m \times n$ matriki nad obsegom $\mathbb{D}$. Potem velja*

$$\mathrm{rang}(A + B) \leq \mathrm{rang}A + \mathrm{rang}B.$$

Dokaz. Za poljubno $m \times n$ matriko X in ekvivalenčno preslikavo oblike $X \mapsto PXQ$, kjer so $P \in GL_m(\mathbb{D})$ in $Q \in GL_n(\mathbb{D})$, je po trditvi 2.10 in posledici 2.14 njen rang invarianten. Po izreku 2.13 lahko dosežemo, da je matrika A oblike

$$A = \begin{bmatrix} I^{(r)} & \\ & 0^{(m-r,n-r)} \end{bmatrix},$$

kjer je $r = \text{rang}(A)$. Naj bo

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

kjer je B_1 matrika velikosti $r \times n$ in B_2 matrika velikosti $(m-r) \times n$. Potem velja

$$\begin{aligned} \text{rang}(A+B) &\leq \text{rang}(\begin{bmatrix} I^{(r)} & 0 \end{bmatrix} + B_1) + \text{rang}B_2 \\ &\leq \text{rang}A + \text{rang}B. \end{aligned}$$

□

3 Pomožne trditve

Množica $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ skupaj z operacijami seštevanja matrik in množenja matrik s skalarjem tvori vektorski prostor. S prostorom matrik $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ naravno asociramo grupo sestavljeno iz preslikav

$$X \longmapsto PXQ + R \qquad \text{za vse} \quad X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}), \tag{3.1}$$

kjer je $P \in GL_m(\mathbb{D})$, $Q \in GL_n(\mathbb{D})$ in $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. Očitno so preslikave tipa (3.1) bijekcije. Označimo grupo teh bijekcij z $G_{m\times n}(\mathbb{D})$. Za začetek si oglejmo, kako deluje grupa $G_{m\times n}(\mathbb{D})$ na prostoru $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$.

Trditev 3.1. *Grupa $G_{m\times n}(\mathbb{D})$ deluje tranzitivno na $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$.*

Dokaz. Naj bosta X_1 in X_2 poljubni $m \times n$ matriki nad $\mathbb{D}$. Potem preslikava oblike $X \mapsto X + (X_2 - X_1)$ preslika X_1 v X_2. □

Definicija 3.2. Za poljubni matriki X_1 in X_2 v $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ pravimo, da sta na *aritmetični razdalji* r, če velja $\operatorname{rang}(X_1 - X_2) = r$. Aritmetično razdaljo označimo z $ad(X_1, X_2) = r$. V primeru, ko je $r = 1$, pravimo, da sta matriki *sosedni*.

Trditev 3.3. *Naj bodo $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ poljubne. Tedaj je preslikava*

$$ad : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

metrika, tj. velja:

1. *$ad(X_1, X_2) \geq 0$; $ad(X_1, X_2) = 0$ natanko tedaj, ko je $X_1 = X_2$,*
2. *$ad(X_1, X_2) = ad(X_2, X_1)$,*
3. *$ad(X_1, X_2) + ad(X_2, X_3) \geq ad(X_1, X_3)$.*

Dokaz. Dokaz za *1.* in *2.* sledi neposredno iz definicije. Naj bodo $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ poljubne. Tedaj velja

$$\begin{aligned} ad(X_1, X_3) &= \operatorname{rang}(X_1 - X_3) = \operatorname{rang}(X_1 - X_2 + X_2 - X_3) \leq \\ &\leq \operatorname{rang}(X_1 - X_2) + \operatorname{rang}(X_2 - X_3) = ad(X_1, X_2) + ad(X_2, X_3). \end{aligned}$$

□

Trditev 3.4. *Elementi grupe $G_{m\times n}(\mathbb{D})$ pustijo aritmetično razdaljo med parom točk iz $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ invariantno. Poleg tega, za poljuben r, kjer je $1 \leq r \leq \min\{m,n\}$, množica parov $m \times n$ matrik nad obsegom $\mathbb{D}$ aritmetične razdalje r, tvori orbito v $G_{m\times n}(\mathbb{D})$.*

Dokaz. Naj bo X_1 in X_2 poljuben par $m \times n$ matrik nad $\mathbb{D}$ na aritmetični razdalji r. Naj bo preslikava $\phi \in G_{m\times n}(\mathbb{D})$ poljubna.

$$\begin{aligned} ad(\phi(X_1),\phi(X_2)) &= \operatorname{rang}(PX_1Q + R - PX_2Q - R) \\ = \operatorname{rang}(P(X_1 - X_2)Q) &= \operatorname{rang}(X_1 - X_2) = r \end{aligned}$$

Naj bo R $m\times n$ matrika ranga r. Dovolj je pokazati, da obstaja tak element v $G_{m\times n}(\mathbb{D})$, ki slika X_1 v 0 in X_2 v R. Preslikava oblike $X \mapsto X - X_1$ preslika X_1 v 0 in X_2 v $X_2 - X_1$. Iz trditve 2.13 sledi, da preslikava $X \mapsto PXQ$ pusti 0 invariantno in preslika $X_2 - X_1$ v R. Torej ima njun kompozitum želeno lastnost. □

Definicija 3.5. Naj bosta X in $X' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. V primeru, ko velja $X \neq X'$, je med X in X' *razdalja* r, če je r najmanjše pozitivno celo število, za katerega obstaja zaporedje $r+1$ matrik $X = X_0, X_1, \ldots, X_r = X'$, kjer sta matriki X_i in X_{i+1} sosedni, za $i = 0, 1, \ldots, r-1$. V tem primeru pišemo $d(X,X') = r$. V primeru, ko je $X = X'$, definiramo $d(X,X') = 0$.

Trditev 3.6. *Za poljubni dve matriki X in $X' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$, velja*

$$ad(X,X') = d(X,X')$$

Dokaz. V primeru, ko je $X = X'$, enakost velja, saj je $ad(X,X') = d(X,X') = 0$. Predpostavimo, da je $X \neq X'$. Naj bo $ad(X,X') = r$, tj. $\operatorname{rang}(X - X') = r$. Po trditvi 2.13 obstajata taka elementa $P \in GL_m(\mathbb{D})$ in $Q \in GL_n(\mathbb{D})$, da velja

$$P(X - X')Q = \begin{bmatrix} I^{(r)} & \\ & 0^{(m-r,n-r)} \end{bmatrix}.$$

Naj bo

$$R_i = P^{-1} \begin{bmatrix} I^{(i)} & \\ & 0^{(m-i,n-i)} \end{bmatrix} Q^{-1}, \text{ za } i = 1, 2, \ldots, r.$$

Za zaporedje $r+1$ točk iz $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ oblike

$$X_0 = X, X_1 = X - R_1, X_2 = X - R_2, \ldots, X_r = X - R_r = X',$$

velja, da sta X_i in X_{i+1} sosednji za $i = 0, 1, 2 \ldots, r-1$. Torej velja $d(X,X') \leq r = ad(X,X')$.

Naj bo $d(X, X') = r'$. Potem obstaja zaporedje $r' + 1$ točk $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{r'}$, kjer sta X_i in X_{i+1} sosednji za $I = 0, 1, 2 \ldots, r' - 1$ tedaj velja $X_0 = X$ in $X_{r'} = X'$. Po trditvi 2.16 velja

$$\begin{aligned} d(X, X') &= r' = \sum_{i=0}^{r'-1} \mathrm{rang}(X_i - X_{i+1}) \\ &\geq \mathrm{rang}(X_0 - X_{r'}) = \mathrm{rang}(X - X') = ad(X, X'). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$ad(X, X') = d(X, X').$$

□

Posledica 3.7. *Naj bo $\mathcal{A}$ bijektivna preslikava na $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. Predpostavimo, da tako $\mathcal{A}$ kot $\mathcal{A}^{-1}$ ohranjata sosednost matrik. Potem velja, da $\mathcal{A}$ ohranja aritmetično razdaljo med parom matrik, tj. za poljubne $X, X' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ velja $ad(X, X') = ad(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(X'))$.*

Dokaz. Predpostavimo, da $\mathcal{A}$ ohranja sosednost para $m \times n$ matrik, tj. za poljubna $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$, sosednost X_1 in X_2 implicira sosednost matrik $\mathcal{A}(X_1)$ in $\mathcal{A}(X_2)$. Torej za poljubna X in $X' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ velja

$$d(X, X') \geq d(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(X')).$$

Po trditvi 3.6 velja

$$ad(X, X') \geq ad(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(X')).$$

Podobno, ker $\mathcal{A}^{-1}$ ohranja sosednost velja

$$ad(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(X')) \geq ad(X, X').$$

Od tod sledi naslednje, če tako $\mathcal{A}$ kot $\mathcal{A}^{-1}$ ohranjata sosednost matrik, za poljubni matriki X in $X' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ velja

$$ad(X, X') = ad(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(X')).$$

□

3.1 Afina Geometrija

Za potrebe naloge se bomo ukvarjali z naslednjo vrsto geometrijskih prostorov. Za poljuben obseg $\mathbb{D}$ vzamemo vektorski prostor $\mathbb{D}^{(n)}$. Vektorje prostora $\mathbb{D}^{(n)}$ bomo poimenovali *točke*, odsekom prostora $\mathbb{D}^{(n)}$, ki tvorijo 1-dimenzionalne podprostore *premice*, odsekom prostora $\mathbb{D}^{(n)}$, ki tvorijo 2-dimenzionalne podprostore *ravnine* in odsekom prostora $\mathbb{D}^{(n)}$, ki tvorijo $(n-1)$-dimenzionalne podprostore *hiperravnine*.

Vektorski prostor $\mathbb{D}^{(n)}$ skupaj z incidenčno relacijo med vsemi odseki različnih dimenzij, poimenujemo *levi n-dimenzionalni afin prostor* nad obsegom $\mathbb{D}$ in ga označimo z $AG^l(n,\mathbb{D})$. Poleg tega za točko $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in AG^l(n,\mathbb{D})$ pravimo, da ima koordinate $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Izrek 3.8 (Fundamentalni izrek afine geometrije)**.** *Naj bo $\mathbb{D}$ poljuben obseg, $n\geq 2$ celo število in $\mathcal{A}$ bijektivna preslikava n-dimenzionalnega levega afinega prostora $AG^l(n,\mathbb{D})$ samega vase, ki slika premice v premice. V primeru, ko je $n\geq 3$ in $\mathbb{D}=\mathbb{F}_2$, zahtevamo še, da $\mathcal{A}$ slika ravnine v ravnine. Potem je $\mathcal{A}$ oblike*

$$\mathcal{A}(x_1,x_2,\dots,x_n) \quad = \quad (x_1,x_2,\dots,x_n)^\sigma Q + (a_1,a_2,\dots,a_n) \tag{3.2}$$

za vse $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in AG^l(n,\mathbb{D})$, kjer je σ avtomorfizem obsega $\mathbb{D}$, $(x_1,x_2,\dots,x_n)^\sigma = (x_1^\sigma,x_2^\sigma,\dots,x_n^\sigma)$, $Q\in GL_n(\mathbb{D})$ in $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{D}^{(n)}$. Velja tudi obrat, tj. poljubna preslikava oblike (3.2) na $AG^l(n,\mathbb{D})$, je bijekcija in slika premice v premice in ravnine v ravnine.

Izrek 3.8 lahko tudi posplošimo v naslednji izrek.

Izrek 3.9. *Naj bosta n in n' celi števili ≥ 2, $\mathbb{D}$ in $\mathbb{D}'$ poljubna obsega. Naj bo $\mathcal{A}$ bijektivna presllikava n-dimenzionalnega levega ali desnega afinega prostora $A_n = AG^l(n,\mathbb{D})$ ali $AG^r(n,\mathbb{D})$ v $A_{n'} = AG^l(n',\mathbb{D}')$ ali $AG^r(n',\mathbb{D}')$, ki slika premice v premice. V primeru, ko je $n\geq 3$ in $\mathbb{D}=\mathbb{F}_2$, zahtevamo še, da $\mathcal{A}$ slika ravnine v ravnine. Potem je $n=n'$ in je $\mathbb{D}$ izomorfen $\mathbb{D}'$ ali anti-izomorfen $\mathbb{D}'$. V prvem primeru sta tako A_n, kot $A_{n'}$ oba leva afina prostora ali oba desna afina prostora. V primeru, ko je $A_n = AG^l(n,\mathbb{D})$ in $A_{n'} = AG^l(n,\mathbb{D}')$, je $\mathcal{A}$ oblike*

$$\mathcal{A}(x_1,x_2,\dots,x_n) = (x_1,x_2,\dots,x_n)^\sigma Q + (a_1,a_2,\dots,a_n),$$

za vse $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in AG^l(n,\mathbb{D})$. V primeru, ko je $A_n = AG^r(n,\mathbb{D})$ in $A_{n'} = AG^r(n,\mathbb{D}')$, je $\mathcal{A}$ oblike

$$\mathcal{A}(x_1,x_2,\dots,x_n)^T = Q\left[(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\right]^\sigma + (a_1,a_2,\dots,a_n)^T,$$

za vse $(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in AG^r(n,\mathbb{D})$. V zgornjih dveh primerih je σ izomorfizem iz $\mathbb{D}$ v $\mathbb{D}'$, $Q\in GL_n(\mathbb{D}')$ in $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{D}'$. V primeru, ko je $A_n = AG^l(n,\mathbb{D})$ in $A_{n'} = AG^r(n,\mathbb{D}')$, je preslikava $\mathcal{A}$ oblike

$$\mathcal{A}(x_1,x_2,\dots,x_n) = Q\left[(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\right]^\tau + (a_1,a_2,\dots,a_n)^T,$$

za vse $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in AG^l(n, \mathbb{D})$. *V primeru, ko je* $A_n = AG^r(n, \mathbb{D})$ *in* $A_{n'} = AG^l(n, \mathbb{D}')$, *je preslikava* $\mathcal{A}$ *oblike*

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau Q + (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

za vse $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in AG^r(n, \mathbb{D})$. *V zadnjih dveh primerih je* τ *anti-izomorfizem iz* $\mathbb{D}$ *v* $\mathbb{D}'$, $Q \in GL_n(\mathbb{D})$ *in* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{D}'$.

Definicija 3.10. Naj bo $\mathcal{M}$ neprazna množica točk iz prostora $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. Za množico $\mathcal{M}$ pravimo, da je *maksimalna množica ranga* 1, če sta poljubni dve točki iz $\mathcal{M}$ sosedni in v množici $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) - \mathcal{M}$ ni nobene točke, ki bi bila sosedna vsem točkam iz $\mathcal{M}$.

Posledica 3.11. *Maksimalna množica ranga* 1 *iz* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ *se s poljubno preslikavo oblike (3.1) preslika v maksimalno množico ranga* 1.

Dokaz. Sledi neposredno iz trditve 3.4

□

Trditev 3.12. *Tako*

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \in \mathbb{D} \right\} \tag{3.3}$$

kot

$$\mathcal{M}_1' = \left\{ \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1} \in \mathbb{D} \right\} \tag{3.4}$$

sta maksimalni množici ranga 1. *Vsako maksimalno množico ranga* 1 *je mogoče s preslikavo oblike (3.1) preslikati v* $\mathcal{M}_1$ *ali* $\mathcal{M}_1'$.

Dokaz. Očitno sta poljubni dve različni točki iz $\mathcal{M}_1$ ali $\mathcal{M}_1'$ sosedni. Pokazati je potrebno še, da izven množice $\mathcal{M}_1$ oziroma $\mathcal{M}_1'$ ne obstaja nobena točka, ki bi bila sosedna vsem točkam iz $\mathcal{M}_1$ oziroma $\mathcal{M}_1'$.

Naj bo $\mathcal{M}$ maksimalna množica ranga 1 vsebovana v $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. Očitno sta v $\mathcal{M}$ vsaj dve točki. Naj bosta X in X' poljubni sosedni točki iz $\mathcal{M}$. Po trditvi 3.4 obstaja preslikava oblike (3.1), ki preslika X v 0 in X' v E_{11}. Taka preslikava bo slikala $\mathcal{M}$ v maksimalno množico ranga 1, ki vsebuje 0 in E_{11}. Od tod predpostavimo, brez škode za splošnost, da $\mathcal{M}$ vsebuje tako 0 kot E_{11}. Naj bo X_1 taka točka vsebovana v $\mathcal{M}$, da velja $X_1 \neq 0$ in $X_1 \neq E_{11}$. Ker sta X_1 in 0 sosedni točki, je torej X_1 ranga 1. Torej lahko zapišemo

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix},$$

kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{D}$ in niso vsi enaki 0. Prav tako so $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{D}$ in niso vsi enaki 0. Ker sta tudi X_1 in E_{11} sosedni, je matrika $X_1 - E_{11}$ ranga 1. Torej velja

$$a_ib_j = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, m; \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

V primeru, ko niso vsi od $b_2, b_3, \ldots, b_n$ enaki 0, velja $a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$ in $a_1 \neq 0$, torej velja

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Sicer imamo

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

kjer je $b_1 \neq 0$ in med $a_2, a_3, \ldots, a_m$ niso vsi enaki 0. Oglejmo si množico

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_1' = \{xE_{11}; x \in \mathbb{D}\}. \tag{3.7}$$

Presek množic $\mathcal{M}_1$ in $\mathcal{M}_1'$ očitno ni maksimalna množica. Če $\mathcal{M}$ vsebuje točko izven preseka (3.7), recimo točko oblike (3.5) z $a_1 \neq 0$. Ker niso vsi skalarji $b_2, b_3, \ldots, b_n$ enaki 0, potem nobena od točk v $\mathcal{M}$ ne more biti oblike (3.6) z $b_1 \neq 0$ in ne vsemi skalarji $a_2, a_3, \ldots, a_m$ enakimi 0. Podobno, če $\mathcal{M}$ vsebuje točko oblike (3.6) z $b_1 \neq 0$ in ne vsemi od $a_2, a_3, \ldots, a_m$ enakimi 0. Potem ni nobena točka v $\mathcal{M}$ oblike (3.5) z $a_1 \neq 0$ in ne vsi od $b_2, b_3, \ldots, b_n$ enaki 0. Očitno so vse točke iz $\mathcal{M}_1$ med seboj sosedne. Enako velja za $\mathcal{M}_1'$. Torej smemo sklepati, da je $\mathcal{M}$ enak $\mathcal{M}_1$ ali $\mathcal{M}_1'$. □

Posledica 3.13. *Maksimalna množica ranga* 1 *je oblike*

$$\left\{ P \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q + R \ ; \ x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \in \mathbb{D} \right\} \tag{3.8}$$

ali

$$\left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q + R \ ; \ y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1} \in \mathbb{D} \right\}, \tag{3.9}$$

kjer so $P \in GL_m(\mathbb{D})$, $Q \in GL_n(\mathbb{D})$ *in* $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ *fiksne matrike.*

Posledica 3.14. *Za poljuben par sosednih točk v* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ *obstajata natanko dve maksimalni množici ranga* 1*, ki ju vsebujeta.*

Posledica 3.15. *Presek dveh poljubnih različnih maksimalnih množic ranga* 1*, ki ima več kot eno skupno točko, lahko s preslikavo oblike (3.1) spremenimo v množico oblike (3.7).*

Definicija 3.16. V primeru, ko presek dveh disjunktnih maksimalnih množic ranga 1 vsebuje več kot eno skupno točko, potem preseku pravimo *premica*.

Posledica 3.17. *Obstaja natanko ena premica, ki gre skozi par sosednih točk.*

Posledica 3.18. *Parametrična enačba premice v* $\mathcal{M}_{m\times n}$*, je oblike*

$$\{p^T xq + R; x \in \mathbb{D}\},$$

kjer so p *neničelni* m*-dimenzionalni vrstični vektor nad* $\mathbb{D}$, q *neničelni* n*-dimenzionalni vrstični vektor nad* $\mathbb{D}$ *in* $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. *Parametrična enačba premic v maksimalnih množicah ranga* 1 *oblike (3.3) je*

$$\left\{ x \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer je $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \neq 0$. *Parametrična enačba premic v maksimalnih množicah ranga* 1 *oblike (3.4) je*

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer je $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})^T \neq 0$.

Trditev 3.19. *Dve maksimalni množici ranga* 1*, ki imata natanko eno skupno točko, lahko istočasno s preslikavami iz množice* $G_{m\times n}(\mathbb{D})$ *preslikamo v (3.3) in*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{D} \right\}, \tag{3.10}$$

ali v (3.4) in

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & y_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & y_{m2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in \mathbb{D} \right\}. \tag{3.11}$$

Dokaz. Naj bosta $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$ maksimalni množici ranga 1, ki imata eno skupno točko. Po trditvi 3.1 in trditvi 3.12 smemo sklepati, da se skupna točka z elementom iz množice $G_{m\times n}(\mathbb{D})$ slika v 0 in $\mathcal{M}$ v (3.3) ali (3.4). Oglejmo si primer, ko se $\mathcal{M}$ slika v (3.3). Naj se $\mathcal{M}'$ preslika v $\mathcal{M}''$ in naj bo X_2 neničelen element iz $\mathcal{M}''$ oblike

$$X_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ker X_2 ni element množice (3.3), je podmatrika zadnjih $m-1$ vrstic matrike X_2 matrika ranga 1. To pomeni, da obstajata elementa $P \in GL_{m-1}(\mathbb{D})$ in $Q \in GL_n(\mathbb{D})$, da velja

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & P \end{bmatrix} X_2 Q \;=\; \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Ker je zgornja matrika ranga 1, velja $c_{12} = c_{13} = \cdots = c_{1n} = 0$. Opazimo, da preslikava oblike

$$X \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & \\ & P \end{bmatrix} XQ$$

pusti 0 in maksimalno množico ranga 1 oblike (3.3) invariantno. Torej preslikava oblike

$$X \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & -c_{11} & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} X$$

deluje invariantno na (3.3) in preslika (3.12) v E_{21}. Po posledici 3.15 obstajata natanko dve maksimalni množici ranga 1, ki vsebujeta tako 0 kot E_{21}. Množici (3.10) in (3.4) sta maksimalni množici ranga 1, ki vsebujeta tako 0 kot E_{21}. Ker imata (3.3) in (3.4) več kot eno skupno točko, se $\mathcal{M}'$ ne more slikati v množico oblike (3.4). Od tod sledi, da mora njena slika biti oblike (3.10). Na podoben način obravnavamo primer, ko se $\mathcal{M}$ slika v množico oblike (3.4). □

Definicija 3.20. Naj bo $\mathcal{L}$ množica $m \times n$ matrik nad obsegom $\mathbb{D}$. Za množico $\mathcal{L}$ pravimo, da je *maksimalna množica ranga* 2, če zadošča naslednjim pogojem:

(i) $\mathcal{L}$ vsebuje dve maksimalni množici ranga 1, z natanko eno skupno točko. Označimo ti dve množici z $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$ ter skupno točko z A.

(ii) $\mathcal{L}$ vsebuje vse točke, za katere velja:

- so na aritmetični razdalji 2 od točke A,
- so na aritmetični razdalji ≤ 2 od vseh točk iz $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$,
- obstajata točki $B \in \mathcal{M}$ in $C \in \mathcal{M}'$,da velja $ad(A, B) < 2$ in $ad(A, C) < 2$.

Množico točk, ki zadošča zgornjim pogojem, označimo z $\mathcal{N}$.

(iii) $\mathcal{L}$ vsebuje vse točke, za katere velja:

- so na aritmetični razdalji 1 od A,
- so na aritmetični razdalji ≤ 2 od vsake točke iz $\mathcal{N}$,
- obstaja točka $B \in \mathcal{N}$, za katero velja $ad(A, B) < 2$.

(iv) $\mathcal{L}$ ne vsebuje nobene druge točke.

Trditev 3.21. *Poljubna maksimalna množica ranga* 2 *iz* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ *se z preslikavo oblike (3.1) preslika v maksimalno množico ranga* 2*.*

Dokaz. Sledi iz definicije. □

Trditev 3.22. *Množici*

$$\left\{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; \quad x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{D}\right\} \tag{3.13}$$

in

$$\left\{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in \mathbb{D}\right\} \tag{3.14}$$

sta maksimalni množici ranga 2*. Poljubno maksimalno množico ranga* 2 *lahko s preslikavami iz* $G_{m\times n}(\mathbb{D})$ *preslikamo v (3.13) ali (3.14).*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{L}$ maksimalna množica ranga 2. Po definiciji 3.20 $\mathcal{L}$ vsebuje dve maksimalni množici ranga 1, ki imata natanko eno skupno točko. Označimo ti dve množici z $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$. Po trditvi 3.19 smemo sklepati, da je množica $\mathcal{M}$ oblike (3.3) oziroma (3.4) in $\mathcal{M}'$ oblike (3.10) oziroma (3.11). Obravnavajmo najprej primer, ko je množica $\mathcal{M}$ oblike (3.3), množica $\mathcal{M}'$ pa oblike (3.10).

V primeru, ko je $m = 2$, trditvi očitno držita. Oglejmo si še primere, ko je $m \geq 3$. Očitno je $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \{0\}$, kar pomeni, da je skupna točka $A = 0$. Naj bo

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

poljubna točka iz $\mathcal{N}$. Od tod sledi $ad(X, 0) = 2$, tj. $\text{rang}X = 2$. Označimo vrstice matrike X z

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}), \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Ker je X na aritmetični razdalji ≤ 2 od vsake točke iz $\mathcal{M}$ in ni na aritmetični razdalji 2 od vseh točk iz $\mathcal{M}$, velja naslednje

$$\text{rang}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = 1.$$

Podobno,

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = 1.$$

Če obstaja tak i, da je $x_i \neq 0$ za $3 \leq i \leq m$, potem obstajajo taki $l_1, l_2, \dots, l_m \in \mathbb{D}$, da velja

$$x_k = l_k x_i \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, m,$$

to pomeni, da je rang$X = 1$, kar je protislovje. Torej je $x_i = 0$ za vse $i = 3, 4, \dots, m$, in matrika X je ranga 2 ter oblike

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Množica $\mathcal{N}$ je torej sestavljena iz matrik zgornje oblike, ki so ranga 2. Naj bo

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}$$

točka na aritmetični razdalji 1 od 0, na aritmetični razdalji ≤ 2 od vseh točk iz $\mathcal{N}$ in na aritmetični razdalji različni od 2 za vsaj eno točko iz $\mathcal{N}$. Potem je rang$Y = 1$. Označimo vrstice matrike Y z

$$y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}), \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m.$$

Če je $y_3 \neq 0$ potem obstajajao taki $l_1, l_2, \dots l_m \in \mathbb{D}$, da velja

$$y_k = l_k y_3 \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, m.$$

Torej preslikava oblike

$$X \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & & -l_1 & & & \\ & 1 & -l_2 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_4 & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_m & & & 1 \end{bmatrix} X,$$

preslika $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ in $\mathcal{N}$ same vase in Y v

$$Y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

To pomeni, da je matrika Y^* na aritmetični razdalji ≥ 2 od vseh točk iz $\mathcal{N}$, kar je protislovje. Torej je $y_3 = 0$. Podobno pokažemo, da je $y_4 = y_5 = \ldots = y_m = 0$. Od tod sledi, da je matrika Y ranga 1 in oblike

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

To pomeni, da je množica $\mathcal{L}$ oblike (3.13). Podobno pokažemo za primer, ko je množica $\mathcal{M}$ oblike (3.4) in $\mathcal{M}'$ oblike (3.11). $\square$

Posledica 3.23. *Maksimalna množica ranga* 2 *je ena od naslednjih oblik,*

$$\left\{ P \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q + R; \quad x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots x_{2n} \in \mathbb{D} \right\},$$

ali

$$\left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q + R; \quad y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer so $P \in GL_m(\mathbb{D})$, $Q \in GL_n(\mathbb{D})$ *in* $R \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{D})$.

Oglejmo si sedaj, kaj se zgodi v primeru, ko je presek med maksimalno množico ranga 1 in maksimalno množico ranga 2 neprazen. Brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da je element 0 vsebovan v obeh množicah. Po posledici 3.13 je maksimalna množica ranga 1, ki vsebuje 0 oblike

$$\left\{ P \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q; \quad x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \in \mathbb{D} \right\}$$

ali oblike

$$\left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q; \quad y_{11}, y_{21}, \dots, y_{m1} \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer sta $P \in GL_m(\mathbb{D})$ in $Q \in GL_n(\mathbb{D})$. Maksimalna množica ranga 2 je po posledici 3.23 oblike

$$\left\{ P \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q; \quad x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n} \in \mathbb{D} \right\}$$

ali oblike

$$\left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q; \quad y_{11}, y_{21}, \dots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \dots, y_{m2} \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer sta $P \in GL_m(\mathbb{D})$ in $Q \in GL_n(\mathbb{D})$. Od tod smemo sklepati, da se maksimalna množica ranga 1 in maksimalna množica ranga 2, ki vsebuje element 0 z preslikavo oblike (3.1) preslikata v eno od naslednjih štirih možnosti

(a)

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \in \mathbb{D} \right\}, \tag{3.15}$$

$$\left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q; \quad y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n} \in \mathbb{D} \right\}; \tag{3.16}$$

(b)

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \in \mathbb{D} \right\},$$

$$\left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q; \quad y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in \mathbb{D} \right\};$$

(c)

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{m1} \in \mathbb{D} \right\},$$

$$\left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q; \quad y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n} \in \mathbb{D} \right\};$$

(d)

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{m1} \in \mathbb{D} \right\},$$

$$\left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q; \quad y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in \mathbb{D} \right\};$$

kjer sta $P \in GL_m(\mathbb{D})$ in $Q \in GL_n(\mathbb{D})$.

Oglejmo si najprej primer (a). Brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da je $Q = I^{(n)}$. Naj bo matrika P naslednje oblike

$$P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}.$$

Potem je presek oblike

$$\left\{ P\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} p_{21} & p_{22} \\ \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Označimo

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_{21} & p_{22} \\ \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} \end{bmatrix}.$$

Ker je $P \in GL_m(\mathcal{D})$, velja $P_2 \neq 0$. V primeru, ko je P_2 ranga 1, je presek maksimalna množica ranga 1, kar pomeni, da maksimalna množica (3.16) ranga 2 vsebuje maksimalno množico (3.15) ranga 1. V primeru, ko je P_2 ranga 2, je presek množic enak $\{0\}$. Primer (d) obravnavamo na podoben način kot primer (a).
Oglejmo si sedaj še primer (b). Podobno smemo brez škode za splošnost predpostaviti, da je $P = I^{(m)}$. Preslikava oblike

$$X \longmapsto XQ^{-1}$$

pusti maksimalno množico ranga 1 invariantno in preslika maksimalno množico ranga 2 v

$$\left\{ \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in \mathbb{D} \right\}.$$

Presek množic, je torej oblike

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad x, y \in \mathbb{D} \right\} \tag{3.17}$$

Za primer (c), podobno kot v primeru (b), uporabimo preslikavo oblike

$$X \longmapsto P^{-1}X,$$

ki presek preslika v množico oblike

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad x, y \in \mathbb{D} \right\} \tag{3.18}$$

Zgornje ugotovitve lahko posplošimo v naslednjo trditev.

Trditev 3.24. *Predpostavimo, da imata maksimalna množica ranga* 1 *in maksimalna množica ranga* 2 *neprazen presek. Njun presek je lahko enak eni sami točki, dani maksimalni množici ranga* 1 *ali pa je ekvivalenten (3.17) ali (3.18) glede na preslikavo iz* $G_{m\times n}(\mathbb{D})$.

Definicija 3.25. Preseku maksimalne množice ranga 1 in maksimalne množice ranga 2, ki je neprazna množica in ne vsebuje samo ene točke ali celotne maksimalne množice ranga 1, pravimo *ravnina*.

Posledica 3.26. *Parametrična enačba ravnine v* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ *je ene od naslednjih oblik:*

$$\left\{ P \begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q + R; \quad x, y \in \mathbb{D} \right\}$$

$$\left\{ P \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q + R; \quad x, y \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer so $P \in GL_m(\mathbb{D})$, $Q \in GL_n(\mathbb{D})$ *in* $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. *Parametrična enačba ravnine v maksimalni množici ranga* 1 *oblike (3.3) je*

$$\left\{ \begin{bmatrix} x(q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1n}) + y(q_{21}, q_{22}, \ldots, q_{2n}) + (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}) \\ 0^{(m-1,n)} \end{bmatrix}; \quad x, y \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer sta $(q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1n})$ *in* $(q_{21}, q_{22}, \ldots, q_{2n})$ *linearno neodvisna. Parametrična enačba maksimalne množice ranga* 1 *oblike (3.4) je*

$$\left\{ \left[\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{m2} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} \quad 0^{m,n-1} \right]; \quad x, y \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer sta $(p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{n1})^T$ *in* $(p_{12}, p_{22}, \ldots, p_{m2})^T$ *linearno neodvisna.*

Trditev 3.27. *Označimo z* $\mathcal{M}$ *in* $\mathcal{M}'$ *maksimalni množici ranga* 1 *oblike (3.8) in (3.9).*

Preslikava

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\longrightarrow AG^l(n,\mathbb{D}) \\ P\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q + R &\longmapsto (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}) \end{aligned}$$

je bijekcija, ki slika premice in ravnine iz $\mathcal{M}$ *v premice in ravnine v* $AG^l(n,\mathbb{D})$*. Podobno je preslikava oblike*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\longrightarrow AG^r(n,\mathbb{D}) \\ P\begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q + R &\longmapsto \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bijekcija, ki slika premice in ravnine iz $\mathcal{M}'$ *v premice in ravnine iz* $AG^r(m,\mathbb{D})$

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz posledic 3.18 in 3.26. □

4 Bijektivni ohranjevalci sosednosti v obe smeri

Definicija 4.1. Za preslikavo $\mathcal{A}$ iz $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}_1)$ v $\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D}_2)$ pravimo, da *ohranja sosednost*, če zadošča implikaciji

$$\text{rang}(A-B)=1 \Longrightarrow \text{rang}(\mathcal{A}(A)-\mathcal{A}(B))=1,$$

kjer sta A in B matriki iz množice $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}_1)$.

Definicija 4.2. Za preslikavo $\mathcal{A}$ iz $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}_1)$ v $\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D}_2)$ pravimo, da *ohranja sosednost v obe smeri*, če zadošča ekvivalenci

$$\text{rang}(A-B)=1 \Longleftrightarrow \text{rang}(\mathcal{A}(A)-\mathcal{A}(B))=1,$$

kjer sta A in B matriki iz množice $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}_1)$.

Koncept sosednosti para $m\times n$ matrik je bil prvič obravnavan s strani L.K. Hua [8]. Naslednji izrek je obravnaval L.K. Hua [8] za $\mathbb{D}\neq\mathbb{F}_2$, kasneje pa sta ga dopolnila Z. Wan in Y. Wang [35] še za primer $\mathbb{D}=\mathbb{F}_2$. Formulacija naslednjega izreka in njegov dokaz sta povzeta iz knjige [34].

Izrek 4.3 ([34] izrek 3.4)**.** *Naj bodo obseg $\mathbb{D}$ ter celi števili $m,n\geq 2$ poljubni. Bijekcija $\mathcal{A}:\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})\to\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ ohranja sosednost v obe smeri, če in samo če za $m\neq n$ je $\mathcal{A}$ oblike*

$$\mathcal{A}(X) \;=\; PX^{\sigma}Q+R \quad \text{za vse } X\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}), \tag{4.1}$$

kjer so $P\in GL_m(\mathbb{D})$, $Q\in GL_n(\mathbb{D})$ in $R\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ in je σ avtomorfizem obsega $\mathbb{D}$. V primeru, ko velja $m=n$, je $\mathcal{A}$ oblike (4.1) ali pa oblike

$$\mathcal{A}(X) \;=\; P(X^{\tau})^{T}Q+R \text{ za vse } X\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}), \tag{4.2}$$

kjer je τ anti-avtomorfizem obsega $\mathbb{D}$.

Dokaz. Očitno sta (4.1) in (4.2) bijekciji, ki ohranjata sosednost v obe smeri. Naj bo obseg $\mathbb{D}$ poljuben in m, n celi števili ≥ 2. Naj bo $\mathcal{A}$ bijektivna preslikava na $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. Predpostavimo še, da tako $\mathcal{A}$ kot $\mathcal{A}^{-1}$ ohranjata sosednost točk iz $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. Potem $\mathcal{A}$ preslika maksimalne množice ranga 1 v maksimalne množice ranga 1 in maksimalne množice ranga 2 v maksimalne množice ranga 2. Dokaz nadaljujemo po korakih.

(i) Na $\mathcal{A}$ lahko delujemo z bijekcijo oblike (3.1)

$$X \longmapsto X - \mathcal{A}(0) \quad \text{za vse } X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{D}).$$

Zato smemo sklepati brez škode za splošnost, da je

$$\mathcal{A}(0) \;=\; 0. \tag{4.3}$$

(ii) Naj bo $\mathcal{M}_1$ definiran kot v (3.3). Vemo, da je $\mathcal{M}_1$ maksimalna množica ranga 1, torej je tudi $\mathcal{A}(\mathcal{M}_1)$ maksimalna množica ranga 1. Ker je $0 \in \mathcal{M}_1$, lahko po enačbi (4.3) sklepamo, da je $0 \in \mathcal{A}(\mathcal{M}_1)$. Po posledici 3.13 vemo, da je

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}_1) \;=\; \left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q \;;\; y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n} \in \mathbb{D} \right\}$$

ali

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}_1) \;=\; \left\{ P \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q \;;\; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1} \in \mathbb{D} \right\},$$

kjer sta $P \in GL_m(\mathbb{D})$ in $Q \in GL_n(\mathbb{D})$. Nato na $\mathcal{A}$ delujemo z bijekcijo

$$X \longmapsto P^{-1} X Q^{-1} \quad \text{za vse } X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{D})$$

in lahko predpostavimo brez škode za splošnost, da je

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}_1) \;=\; \mathcal{M}_1 \tag{4.4}$$

ali

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}_1) \;=\; \mathcal{M}_1', \tag{4.5}$$

kjer sta $\mathcal{M}_1$ in $\mathcal{M}_1'$ definirani z (3.3) in (3.4). Opazimo, da preslikava $\mathcal{A}$ slika premice in ravnine iz $\mathcal{M}_1$ v premice in ravnine v $\mathcal{A}(\mathcal{M}_1)$. Bijektivna preslikava oblike

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &\longrightarrow AG^l(n, \mathbb{D}) \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} &\longmapsto (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}) \end{aligned}$$

slika premice in ravnine iz $\mathcal{M}_1$ v premice in ravnine iz $AG^l(n, \mathbb{D})$ in bijekcija

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1' & \longrightarrow & AG^r(n, \mathbb{D}) \\ \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix} \end{array}$$

preslika premice in ravnine iz $\mathcal{M}_1'$ v premice in ravnine iz $AG^r(m, \mathbb{D})$. V primeru, ko se zgodi (4.4), $\mathcal{A}$ inducira bijektivno preslikavo iz $AG^l(n, \mathbb{D})$ nazaj vase, ki preslika premice v premice in ravnine v ravnine. Označimo

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Po izreku 3.8 lahko sklepamo, da velja

$$(x_{11}^*, x_{12}^*, \ldots, x_{1n}^*) = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})^\sigma T + (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

kjer je σ avtomorfizem obsega $\mathbb{D}$, $T \in GL_n(\mathbb{D})$ in $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{D}^{(n)}$. Ker je $\mathcal{A}(0) = 0$, velja $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Če na $\mathcal{A}$ uporabimo bijekcijo oblike

$$X \longmapsto (XT^{-1})^{\sigma^{-1}} \quad \text{za vse } X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{D}),$$

ki je oblike (4.1), lahko predpostavimo, da velja

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

za vse $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \in \mathbb{D}$. To pomeni, da $\mathcal{A}$ deluje na vseh elementih iz $\mathcal{M}_1$ invariantno. V primeru, ko se zgodi (4.5), preslikava $\mathcal{A}$ inducira bijekcijo iz $AG^l(n, \mathbb{D})$ v $AG^r(m, \mathbb{D})$, ki slika premice v premice in ravnine v ravnine. Po izreku 3.9 velja $m = n$. Če označimo

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

potem velja

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix}^{\tau} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

kjer je τ anti-automorfizem obsega $\mathbb{D}$, $T \in GL_n(\mathbb{D})$ in $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{D}^{(n)}$. Ker je $\mathcal{A}(0) = 0$, sledi $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Ponovno uporabimo na $\mathcal{A}$ bijekcijo oblike

$$X \longmapsto ((T^{-1}X)^{\tau^{-1}})^T \quad \text{za vse } X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{D}),$$

ki je oblike (4.2). Od tod lahko vedno predpostavimo, da (4.6) drži.

(iii) Množici $\mathcal{M}_1$ in $\mathcal{M}_1'$ sta očitno maksimalni množici ranga 1, ki vsebujeta tako 0 kot E_{11}. Po posledici 3.14 obstajata samo dve maksimalni množici ranga 1, ki vsebujeta dve sosedni točki. Ker je $\mathcal{A}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_1$, velja da je tudi $\mathcal{A}(\mathcal{M}_1') = \mathcal{M}_1'$. Označimo

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_{11}^* & 0 & \dots & 0 \\ y_{21}^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1}^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Po fundamentalnem izreku afine geometrije velja

$$\begin{bmatrix} y_{11}^* \\ y_{21}^* \\ \vdots \\ y_{m1}^* \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix}^{\tau_1},$$

kjer je $P \in GL_m(\mathbb{D})$ in je τ_1 avtomorfizem obsega $\mathbb{D}$. Naj bo

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}.$$

Vstavimo xE_{11} v (4.6) in (4.7). Z enačenjem rezultatov dobimo

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{\tau_1}.$$

Zamenjajmo x_{11} v zgornji enačbi z 1 in dobimo

$$p_{11} = 1, p_{21} = p_{31} = \cdots = p_{m1} = 0.$$

Od tod sledi, da je $x_{11} = x_{11}^{\tau_1}$ za vse $x_{11} \in \mathbb{D}$, kar pomeni, da je avtomorfizem $\tau_1 = id$. Podredimo preslikavo $\mathcal{A}$ bijekciji oblike

$$X \longmapsto P^{-1}X \quad \text{za vse } X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{D}),$$

ki pusti vse elemente $\mathcal{M}_1$ invariantne. Poleg enakosti (4.6) velja tudi

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

za vse $y_{11}, y_{21}, \dots, y_{m1} \in \mathbb{D}$.

(iv) Označimo

$$\mathcal{M}_i = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in} \in \mathbb{D} \right\}$$

in

$$\mathcal{M}'_j = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & y_{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & y_{mj} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ; y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj} \in \mathbb{D} \right\}$$

za $i = 1, 2, \dots, m$ in $j = 1, 2, \dots, n$. $\mathcal{M}_i$ je maksimalna množica ranga 1, ki vsebuje tako 0 kot E_{i1}, ki ju preslikava $\mathcal{A}$ fiksira zaradi enačbe (4.8). Po posledici 3.14 je $\mathcal{A}(\mathcal{M}_i) = \mathcal{M}_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Prav tako je $\mathcal{M}'_j$ maksimalna množica ranga 1, ki vsebuje tako 0 kot E_{1j}. Po posledici 3.14 podobno velja $\mathcal{A}(\mathcal{M}'_j) = \mathcal{M}'_j$

za $j = 1, 2, \ldots, m$. Zapišimo

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{in} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x^*_{i1} & x^*_{i2} & \ldots & x^*_{in} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

in

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & y_{1j} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & y_{2j} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & y_{mj} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & y^*_{1j} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & y^*_{2j} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & y^*_{mj} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Po osnovnem izreku iz afine geometrije lahko predpostavimo, da je

$$(x^*_{i1}, x^*_{i2}, \ldots, x^*_{in}) \quad = \quad (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})^{\sigma_i} Q_i \tag{4.9}$$

in

$$\begin{bmatrix} y^*_{1j} \\ y^*_{2j} \\ \vdots \\ y^*_{mj} \end{bmatrix} \quad = \quad P_j \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

kjer so $Q_1 = I^{(n)},\ Q_i \in GL_n(\mathbb{D}), P_1 = I^{(m)}, P_j \in GL_m(\mathbb{D}),\ \sigma_1 = \tau_1 = id$ in σ_i ter τ_j so avtomorfizmi obsega $\mathbb{D}$ za vse $i = 1, 2, \ldots, m$ in $j = 1, 2, \ \ldots, n$. Ker velja $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}'_j = \{x_{ij}E_{ij}; x_{ij} \in \mathbb{D}\}$, je tudi

$$\mathcal{A}(x_{ij}E_{ij}) = x^*_{ij}E_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Od tod sledi, da so matrike $Q_i (i = 2, 3, \ldots, m)$ in $P_j (j = 2, 3, \ldots, n)$ diagonalne. Označimo

$$Q_i = \begin{bmatrix} q_{i1} & & & \\ & q_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_{in} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P_j = \begin{bmatrix} p_{1j1} & & & \\ & p_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_{mj} \end{bmatrix}.$$

Z primerjavo enakosti (4.9) in (4.10) dobimo

$$x_{ij}^{\sigma_i} q_{ij} = p_{ij} x_{ij}^{\tau_j} \quad \text{za vse } x_{ij} \in \mathbb{D}.$$

Ko zamenjamo x_{ij} v zgornji enačbi z 1, dobimo $q_{ij} = p_{ij}$. V primeru, ko je $i = 1$, imamo $\sigma_1 = 1$ in $q_{1j} = 1$ za vse $j = 1, 2, \ldots, n$, kar pomeni, da je $\tau_j = id$ in $p_{1j} = 1$ za vse $j = 1, 2, \ldots, m$. Podobno v primeru, ko je $j = 1$, sklepamo, da je $\sigma_i = 1$ in $q_{i1} = 1$ za vse $i = 1, 2, \ldots, m$. Za poljuben $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) \neq 0$, sta točki

$$\begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{in} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{in} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

sosedni, torej sta tudi njuni sliki s preslikavo $\mathcal{A}$

$$\begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{in} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{in} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} Q_i$$

sosedni. Torej sta vektorja $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ in $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})Q_i$ linearno odvisna, tj.

$$(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})Q_i = \mu_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$$

za nek $\mu_i \in \mathbb{D}^*$. Če vstavimo $x_{i1} = x_{i2} = \ldots = x_{in} = 1$ v zgornjo enačbo, dobimo $q_{i1} = q_{i2} = \ldots = q_{in} = \mu_i$. Ampak $q_{i1} = 1$, kar pomeni, da je $Q_i = I^{(n)}$ za vse $i = 1, 2, \ldots, m$. Podobno dobimo $P_j = I^{(m)}$ za vse $j = 1, 2, \ldots, n$. Od tod sledi, da je

$$\mathcal{A}(X) = X \qquad \text{za vse} \quad X \in \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_m, \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \ldots, \mathcal{M}'_n. \tag{4.11}$$

(v) Sedaj bomo pokazali, da je $\mathcal{A}(X) = X$ za vse $X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$. V nadaljevanju dokaza bomo privzeli, da je $m \leq n$. V primeru, ko je $m > n$, postopamo kot v opombi 4.4. Najprej si oglejmo primer, ko je X ranga m. Označimo $\mathcal{A}(X) = X^*$. Ker $\mathcal{A}$ ohranja aritmetično razdaljo med točkami iz $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ in ker je $\mathcal{A}(0) = 0$, je tudi X^* ranga m. Označimo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{bmatrix},$$

kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$ n-dimenzionalni vrstični vektorji nad $\mathbb{D}$. Zaradi enakosti (4.11), za poljubne $\lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{D}$, velja

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots \lambda_m x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots - \lambda_m x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$X - \begin{bmatrix} x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots - \lambda_m x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

ranga $m-1$, je tudi

$$X^* - \begin{bmatrix} x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots - \lambda_m x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* - x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{bmatrix}$$

po posledici 3.7 ranga $m-1$ za vse $\lambda_2, \ldots \lambda_m \in \mathbb{D}$. Torej je

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* + \sum_{j=2}^{m} \mu_j x_j^*, \\ x_k &= \sum_{j=2}^{m} \mu_{kj} x_j^*, \quad k = 2, 3, \ldots, m, \end{aligned}$$

kjer so μ_j in μ_{kj} za $k, j = 2, 3, \ldots, m$ elementi iz $\mathbb{D}$. Z aplikacijo enakega argumenta na i-ti vrstici (za $i = 2, 3, \ldots, m$), dobimo

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^* + \sum_{j \neq i} \mu_j^{(i)} x_j^*, \\ x_k &= \sum_{j \neq i} \mu_{kj}^{(i)} x_j^*, \quad k = 2, 3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m, \end{aligned}$$

kjer so $\mu_j^{(i)}$ in $\mu_{kj}^{(i)}$ (za $k, j = 1, 2, \ldots, i-1, i+2, \ldots, m$) elementi obsega $\mathbb{D}$. S kombinacijo formul dobimo

$$x_1^* = \sum_{j \neq i} \mu_{1j}^{(i)} x_j^* - \sum_{j=2}^{m} \mu_j x_j^*.$$

Ker je rang matrike X^* enak m, so vektorji $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$ linearno neodvisni, kar pomeni, da je

$$\mu_i = 0 \quad \text{za} \quad i = 2, 3, \ldots, m.$$

Torej je $x_1^* = x_1$. Na podoben način pokažemo, da je tudi $x_i^* = x_i$ za $i = 2, 3, \ldots, m$. Od tod sledi, da je $\mathcal{A}(X) = X$ za matrike X ranga m.

(vi) Oglejmo si še primer, ko je matrika X ranga $< m$. Ločiti moramo naslednja dva primera.

(a) Naj bo $\mathbb{D} \neq \mathbb{F}_2$. Naj bo $\mathcal{A}(X) = X^*$, kjer sta

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad X^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \ldots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \ldots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}^* & x_{m2}^* & \ldots & x_{mn}^* \end{bmatrix}.$$

V primeru, ko je $x_{11} \neq 0$, po koraku (v) za poljubne $\lambda_2, \ldots \lambda_m \neq 0$, velja

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} & x_{1,m+1} & \ldots & x_{1n} \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_m & & & \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} & x_{1,m+1} & \ldots & x_{1n} \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_m & & & \end{bmatrix}.$$

Ker sta X in

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} & x_{1,m+1} & \ldots & x_{1n} \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_m & & & \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

na aritmetični razdalji $< m$, sta tudi X^* in (4.12) na aritmetični razdalji $< m$, tj.

$$\begin{bmatrix} x_{11}^* - x_{11} & x_{12}^* - x_{12} & \cdots & x_{1m}^* - x_{1m} & x_{1,m+1}^* - x_{1,m+1} & \cdots & x_{1n}^* - x_{1n} \\ x_{21}^* & x_{22}^* - \lambda_2 & \cdots & x_{2m}^* & x_{2,m+1}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}^* & x_{m2}^* & \cdots & x_{mm}^* - \lambda_m & x_{m,m+1}^* & \cdots & x_{mn}^* \end{bmatrix}$$

je ranga $< m$ za poljubne $\lambda_2, \ldots, \lambda_m \neq 0$. Ker velja $\mathbb{D} \neq \mathbb{F}_2$, mora veljati $x_{11}^* = x_{11}$. V primeru, ko je $x_{11}^* \neq 0$, si oglejmo $\mathcal{A}^{-1}$ in podobno dobimo, da je $x_{11}^* = x_{11}$. To pomeni, da vedno velja $x_{11}^* = x_{11}$. Na podoben način pokažemo, da velja $x_{ij}^* = x_{ij}$ za vse $i = 1, 2, \ldots, m$ in $j = 1, 2, \ldots, n$. Od tod sledi, da vedno velja $\mathcal{A}(X) = X$ za matrike X ranga $< m$.

(b) Naj bo $\mathbb{D} = \mathbb{F}_2$. Oglejmo si najprej primer, ko je $m = n = 2$. Vemo že, da je $\mathcal{A}(X) = X$ za $X \in \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2$ in za matrike X ranga 2. Če je matrika X ranga 1 in $X \notin \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2$, potem mora X biti oblike

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker gredo matrike ranga 1 v matrike ranga 1 in je preslikava $\mathcal{A}$ bijekcija, velja

$$\mathcal{A}(X) = X \quad \text{za vse } X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{D}).$$

Oglejmo si še primer, ko je $n \geq 3$. Naj bo $\mathcal{A}(X) = X^*$ in označimo z

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{bmatrix},$$

kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$ n-dimenzionalni vrstični vektorji nad $\mathbb{F}_2^{(n)}$. Začnimo z matrikami X ranga $m-1$. To pomeni, da imamo $m-1$ linearno neodvisnih vektorjev med $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Predpostavimo, da so vektorji $x_2, x_3, \ldots, x_m$ linearno neodvisni. Izbira takih vektorjev oblike $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{F}_2^{(n)}$, da je matrika

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \ \ldots \ \lambda_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

ranga m, je $2^n - 2^{m-1}$. Za poljubno tako matriko po koraku (v) velja $\mathcal{A}(\tilde{X}) = \tilde{X}$. Naj bo $x_1^* = (x_{11}^*, x_{12}^*, \ldots, x_{1n}^*)$. Ker sta matriki X in $\tilde{X}$ sosedni, je matrika

$$\begin{bmatrix} x_{11}^* - \lambda_1 \ x_{12}^* - \lambda_2 \ \ldots \ x_{1n}^* - \lambda_n \\ x_2^* - x_2 \\ \vdots \\ x_m^* - x_m \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

ranga 1. Če je $x_2^* \neq x_2$, potem obstajata samo dve izbiri za vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{F}_2^{(n)}$, da sta prvi dve vrstici iz (4.13) linearno odvisni. Zaradi predpostavk, da je

$n \geq m$ in $n \geq 3$, velja $2^n - 2^{m-1} \geq 4$. Torej obstaja vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{F}_2^{(n)}$, tak da je $\tilde{X}$ ranga m in da sta prvi dve vrstici iz (4.13) linearno neodvisni, kar je v protislovju z zgornjo predpostavko. Torej velja $x_2^* = x_2$. Podobno imamo $x_i^* = x_i$ za $i = 3, 4, \ldots, m$. S tem smo dokazali enakost

$$\mathcal{A}(X) = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Če je $x_1 \neq 0$, potem obstajajo taki indeksi $1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{m-1} \leq m$, da so vektorji $x_1, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_{m-1}}$ linearno neodvisni. Na enak način, kot v zgornjem delu dokaza, pokažemo, da je $x_1^* = x_1$. V primeru, ko je $x_1 = 0$, mora veljati, da je $x_1^* = 0$, sicer bi z $\mathcal{A}^{-1}$ dobili, da je $x_1 \neq 0$, kar je v protislovju s predpostavko, da je $x_1 = 0$. Od tod sledi, da je

$$\mathcal{A}(X) = X \quad \text{za vse } X \text{ ranga } m-1.$$

Nadaljujmo z matrikami X ranga $m-2$. Brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da so $x_3, x_4, \ldots, x_m$ linearno neodvisni. Torej obstaja $2^n - 2^{m-2}$ izbir $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{F}_2^{(n)}$, takih, da je

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \ \ldots \ \lambda_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

ranga $m-1$. Po zgornji ugotovitvi imamo $\mathcal{A}(\tilde{X}) = \tilde{X}$. Ker sta X in $\tilde{X}$ sosedni matriki, je

$$\begin{bmatrix} x_{11}^* - \lambda_1 \ x_{12}^* - \lambda_2 \ \ldots \ x_{1n}^* - \lambda_n \\ x_2^* - x_2 \\ \vdots \\ x_m^* - x_m \end{bmatrix}$$

matrika ranga 1. Na podoben način, kot v primeru, ko je bila matrika X ranga $m-1$, pokažemo, da je $x_i^* = x_i$ za vse $i = 2, 3, \ldots, m$. Podobno kot prej sklepamo tudi, da je $x_1^* = x_1$. Torej velja

$$\mathcal{A}(X) = X, \quad \text{za vse } X \text{ ranga } m-2.$$

Postopek nadaljujemo in tako dobimo

$$\mathcal{A}(X) = X, \quad \text{za vse } X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_2).$$

□

Opomba 4.4. Denimo, da želimo karakterizirati vse bijekcije $\mathcal{A}$ na $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$, ki ohranjajo sosednost v obe smeri, kjer je $m \geq n$. Oglejmo si preslikavo $\mathcal{B}$ na $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{D})$ oblike

$$\mathcal{B}(X) \;=\; (\mathcal{A}(X^T))^T.$$

Ker je $n \leq m$, po dokazanem izreku 4.3 velja

$$\mathcal{B} \;=\; PX^{\sigma}Q + R$$

ali

$$\mathcal{B} \;=\; P(X^{\tau})^T Q + R$$

v primeru, ko je $m = n$. Ker je

$$\mathcal{A}(Y) \;=\; (\mathcal{B}(Y^T))^T,$$

velja naslednje:

$$\mathcal{A}(Y) = (P(Y^T)^{\sigma}Q + R)^T = Q^T Y^{\sigma} P^T + R^T$$

ali

$$\mathcal{A}(Y) = (P((Y^T)\tau)^T Q + R)^T = Q^T (Y^{\tau})^T P^T + R^T.$$

5 Posplošitve

V tem poglavju si bomo ogledali nekaj posplošitev izreka 4.3. Posplošitve dobimo z omilitvijo zahtevanih pogojev oziroma celo z izpustitvijo nekaterih predpostavk, kot je zahteva za ohranjanje sosednosti v obe smeri, ter zahteva o bijektivnosti preslikave.

Izrek 5.4 je povzet iz članka [32]. Pred formulacijo izreka potrebujemo še definicijo degeneriranosti iz konteksta tega članka. Predpostavimo, da preslikava ϕ : $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$ ohranja sosednost in zadošča pogojem

$$\phi(0) = 0 \quad \text{in} \quad \phi(E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}.$$

Potem se izkaže (glej [32]), da ϕ slika množico $\mathcal{Q}$ vseh matrik oblike

$$R = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

kjer je matrika Q idempotent velikosti $n \times n$, v množico $\mathcal{P}$ vseh matrik oblike

$$S = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je matrika P idempotent velikosti $n \times n$.

Primer 5.1. Naj bodo $m, p, q \geq n \geq 3$ in $\mathbb{D}$ neskončen obseg. Definirajmo preslikavo $\Delta : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ na naslednji način. Postavimo $\Delta(0) = 0$. Naj bo j celo število, za katerega velja $1 < j < n$ in φ_j preslikava iz množice vseh $n \times n$ idempotentov ranga j na $\mathbb{D}$, z lastnostijo, da velja $\varphi(Q_1) \neq \varphi(Q_2)$, če sta Q_1 in Q_2 sosedni idempotentni matriki ranga j. Opazimo, da je R iz enačbe (5.1) ranga j, če in samo če, je Q ranga j. Za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ ranga 1 oblike (5.1) definiramo

$$\Delta(R) = E_{11} + \varphi_1(Q)E_{12},$$

za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ ranga 2 oblike (5.1) definiramo

$$\Delta(R) = E_{11} + E_{22} + \varphi_2(Q)E_{32},$$

in za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ ranga 3 oblike (5.1) definiramo

$$\Delta(R) = E_{11} + E_{22} + E_{33} + \varphi_3(Q)E_{34}.$$

Na podoben način definiramo Δ na matrikah ranga $4, 5, \ldots, n-2$ iz $\mathcal{Q}$. V primeru, ko je n sodo število, imamo za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ oblike (5.1) ranga $n-1$

$$\Delta(R) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{n-1,n-1} + \varphi_{n-1}(Q)E_{n-1,n}.$$

V primeru, ko je n liho število, imamo za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ oblike (5.1) ranga $n-1$

$$\Delta(R) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{n-1,n-1} + \varphi_{n-1}(Q)E_{n,n-1}.$$

Za konec definiramo še

$$\Delta(E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}.$$

Zgornjo konstrukcijo preslikave Δ lahko malo spremenimo in jo definiramo na naslednji način.

Primer 5.2. Za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ ranga 1 kot v (5.1) definiramo

$$\Delta(R) = E_{11} + \varphi_1(Q)E_{21},$$

za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ ranga 2 kot v (5.1) definiramo

$$\Delta(R) = E_{11} + E_{22} + \varphi_2(Q)E_{23},$$

in za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ ranga 3 kot v (5.1) definiramo

$$\Delta(R) = E_{11} + E_{22} + E_{33} + \varphi_3(Q)E_{43}.$$

Na podoben način nadaljujemo in definiramo, kako Δ deluje na matrikah ranga $4, 5, \ldots, n-2$ iz $\mathcal{Q}$. V primeru, ko je n sodo število, imamo za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ oblike (5.1) ranga $n-1$

$$\Delta(R) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{n-1,n-1} + \varphi_{n-1}(Q)E_{n,n-1}.$$

V primeru, ko je n liho število, imamo za vsako matriko $R \in \mathcal{Q}$ oblike (5.1) ranga $n-1$

$$\Delta(R) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{n-1,n-1} + \varphi_{n-1}(Q)E_{n-1,n}.$$

Za konec definiramo še

$$\Delta(E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}.$$

S pomočjo zgornjih dveh primerov lahko sedaj definiramo degenerirane preslikave, ki ohranjajo sosednost.

Definicija 5.3. Za vsako preslikavo $\phi : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$, ki ohranja sosednost, in za katero je njena zožitev na $\mathcal{Q}$ enaka preslikavi Δ, iz primera 5.1 ali primera 5.2, bomo rekli, da je degenerirana preslikava, ki ohranja sosednost. Poleg tega je za tako preslikavo ϕ in za obrnljive matrike $T_1 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{D})$, $S_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D})$, $T_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$ in $S_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$, tudi preslikava

$$A \mapsto T_2\phi(T_1AS_1)S_2 \quad (A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})),$$

degenerirana preslikava, ki ohranja sosednost.

Tovrstne degenerirane preslikave, ki ohranjajto sosednost najdemo v primerih 3.7 in 3.8 iz članka [32].

Izrek 5.4 ([32] izrek 4.1)**.** *Naj bo $\mathbb{D}$ poljuben obseg različen od $\mathbb{F}_2$ in $\mathbb{F}_3$ in n, p, q cela števila, za katera velja $p, q \geq n \geq 3$. Predpostavimo, da preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{M}_n(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$ ohranja sosednost, $\mathcal{A}(0) = 0$ in obstaja tak $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D})$, da velja rang$\mathcal{A}(X_0) = n$.*

Potem obstajata obrnljivi matriki $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$ in $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$, neničelen endomorfizem $\tau : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ in matrika $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D})$ z lastnostjo, da je $I + X^\tau L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D})$ obrnljiva za vsak $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D})$, tako da je

$$\mathcal{A}(X) = T \begin{bmatrix} (I + X^\tau L)^{-1}X^\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \quad X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D});$$

ali obstajata obrnljivi matriki $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$ in $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$, neničelen anti-endomorfizem $\sigma : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ in matrika $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D})$ z lastnostjo, da je $I + (X^\sigma)^T L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D})$ obrnljiva za vsak $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D})$, tako da je

$$\mathcal{A}(X) = T \begin{bmatrix} (I + (X^\sigma)^T L)^{-1}(X^\sigma)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \quad X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{D});$$

ali pa preslikava $\mathcal{A}$ degenerirana.

Za potrebe naslednjega izreka je potrebno definirati EAS obseg.

Definicija 5.5. Obsegu $\mathbb{D}$ pravimo, da je *EAS obseg*, če je vsak neničelen endomorfizem $\tau : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ surjektiven.

Oglejmo si še primer ohranjevalca sosednosti, kjer predpostavke izreka 5.4 niso izpolnjene.

Primer 5.6 ([32] primer 3.1)**.** Naj bo $\mathbb{D}$ poljuben ne EAS obseg. Vzemimo ne surjektiven endomorfizem τ obsega $\mathbb{D}$. Vzemimo $c \in \mathbb{D}$, ki ni v sliki endomorfizma τ, in definirajmo preslikavo $\phi : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ kot

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-2,1} & a_{m-2,2} & \cdots & a_{m-2,n} \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \tau(a_{11}) & \tau(a_{12}) & \cdots & \tau(a_{1n}) \\ \tau(a_{21}) & \tau(a_{22}) & \cdots & \tau(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau(a_{m-2,1}) & \tau(a_{m-2,2}) & \cdots & \tau(a_{m-2,n}) \\ \tau(a_{m-1,1}) + c\tau(a_{m1}) & \tau(a_{m-1,2}) + c\tau(a_{m2}) & \cdots & \tau(a_{m-1,n}) + c\tau(a_{mn}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem ϕ ohranja sosednost.

Izrek 5.7 ([32] izrek 4.2)**.** *Naj bodo $m, p, q \geq n \geq 3$ cela števila in $\mathbb{D}$ EAS obseg, ki je različen od $\mathbb{F}_2$ in $\mathbb{F}_3$. Predpostavimo, da $\mathcal{A} : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$ ohranja sosednost, $\mathcal{A}(0) = 0$ in obstaja taka matrika $X_0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$, da je $\operatorname{rang}\mathcal{A}(X_0) = n$.*

Potem je $\mathcal{A}$ oblike

$$\mathcal{A}(X) \;=\; T \begin{bmatrix} X^{\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \;\; za\; X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}), \tag{5.2}$$

kjer je $\tau : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ neničelen endomorfizem in sta matriki $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$, $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$ obrnljivi ali oblike

$$\mathcal{A}(X) \;=\; T \begin{bmatrix} (X^{\sigma})^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \;\; za\; X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}), \tag{5.3}$$

kjer je $\sigma : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ neničelen anti-endomorfizem in sta matriki $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$, $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$ obrnljivi ali je $\mathcal{A}$ degenerativna preslikava, ki ohranja sosednost.

Naslednji izrek lahko najdemo v članku [21]. Gre za analog izreka 5.4, le da je obravnavan primer, ko velja $m = n = 2$. Za potrebe naslednjih dveh izrekov definirajmo še naslednje. Naj bo x stolpični vektor dimenzije p in y vrstični vektor dimenzije q. Definirajmo množico $L(x) \subset \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$, v kateri so vse $p \times q$ matrike oblike xu, kjer je u poljubna $1 \times q$ matrika. Podobno definiramo $R(y) \subset \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$ kot množico vseh $p \times q$ matrik oblike vy, kjer je v poljubna $p \times 1$ matrika.

Izrek 5.8 ([21] izrek 1.1)**.** *Naj bo $\mathbb{D}$ poljuben obseg in p, q pozitivni celi števili. Predpostavimo, da preslikava $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$ ohranja sosednost. Potem bodisi obstajata taki obrnljivi matriki $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$ in $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$, matrika $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$, endomorfizem $\tau : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ in 2×2 matriki L in N z lastnostmi, da je matrika $I - LN$ obrnljiva in $I + A^\tau L$ obrnljiva za vsak $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{D})$, da velja*

$$\phi(A) = T \begin{bmatrix} (I + A^\tau L)^{-1}(A^\tau + N) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S + C \quad \textit{za vse } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{D}).$$

Bodisi obstajata obrnljivi matriki $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$ in $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$ matrika $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$, anti-endomorfizem $\sigma : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, ter 2×2 matriki L in N z lastnostjo, da je matrika $I - LN$ obrnljiva, in so matrike $I + (A^\sigma)^T L$ obrnljive za vse $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{D})$, da velja

$$\phi(A) = T \begin{bmatrix} (I + (A^\sigma)^T L)^{-1}((A^\sigma)^T + N) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S + C \quad \textit{za vse } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{D}).$$

Bodisi obstaja matrika $D \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$, neničelen vektor $x^T \in \mathbb{D}^{(q)}$ in neničelen vektor $y \in \mathbb{D}^{(p)}$, da velja

$$\phi(\mathcal{M}_2(\mathbb{D}) \subseteq (D + R(x)) \cup (D + L(y)).$$

Še ena od posplošitev izreka 4.3 je izrek 5.9, ki je povzet iz članka [3]. Pred formulacijo potrebujemo še nekaj oznak. V množici matrik $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ bomo enotsko kroglo s središčem v točki A označili z

$$\mathcal{K}(A, 1) = \{B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}); d(A, B) \leq 1\},$$

tj. $\mathcal{K}(A, 1) = A + \mathcal{M}^{\leq 1}_{m\times n}(\mathbb{D})$, kjer je $\mathcal{M}^{\leq 1}_{m\times n}(\mathbb{D})$ množica vseh matrik ranga največ 1.

Izrek 5.9 ([3] izrek 1.2)**.** *Naj bodo m, n, p, q pozitivna cela števila, $\mathbb{D}$ EAS obseg in naj preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$ ohranja sosednost. Potem je preslikava $\mathcal{A}$ ene od naslednjih treh oblik:*

$$\mathcal{A}(X) \;=\; T \begin{bmatrix} X^\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S + R, \ \textit{za } X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}), \tag{5.4}$$

kjer sta $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$ in $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$ obrnljivi matriki, $\tau : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ avtomorfizem in $R \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$, ali

$$\mathcal{A}(X) \;=\; T \begin{bmatrix} (X^\sigma)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S + R, \ \textit{za } X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}), \tag{5.5}$$

kjer sta $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{D})$ in $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{D})$ obrnljivi matriki, $\sigma : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ anti-avtomorfizem in $R \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{D})$, ali za vsak $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$ obstajata taka $x^T \in \mathbb{D}^{(q)}$, $y \in \mathbb{D}^{(p)}$, da velja

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}(A, 1)) \subseteq (\mathcal{A}(A) + R(y)) \cup (\mathcal{A}(A) + L(x)).$$

V primeru končnega obsega $\mathbb{D} = \mathbb{F}_q$, je klasifikacija ohranjevalcev sosednosti bolj preprosta.

Izrek 5.10 ([17]). *Naj bosta $m, n \geq 2$ celi števili. Naj ima preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ v sliki dve nesosedni matriki. Preslikava $\mathcal{A}$ ohranja sosednost natanko tedaj, ko je oblike*

$$\mathcal{A}(X) = PX^\sigma Q + R,$$

ali oblike

$$\mathcal{A}(X) = P(X^\sigma)^T Q + R,$$

in je $m = n$. Tukaj velja $P \in GL_m(\mathbb{F}_q)$, $Q \in GL_n(\mathbb{F}_q)$, $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ in je $\sigma : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ avtomorfizem obsega.

Izrek 5.11 ([17]). *Naj bosta $m, n \geq 2$ celi števili. Tedaj obstaja preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$, ki ohranja sosednost in ima v sliki vse matrike paroma sosedne.*

6 Grafovska jedra

V tem poglavju si bomo ogledali, kako so ohranjevalci sosednosti povezani z določenimi področji iz teorije grafov. Obravnavali bomo enostavne, končne in neusmerjene grafe. Graf G je par množic (V, E), kjer je V množica vozlišč in E množica povezav, ki vsebuje neurejene pare vozlišč, ki označujejo povezave. Množico vozlišč grafa G označimo z $V(G)$ in množico povezav z $E(G)$. Za poln graf na n točkah, tj. graf, kjer so vse točke sosedne, bomo uporabili oznako K_n. Graf, ki je cikel na n točkah, bomo označili C_n.

Definicija 6.1. *Homomorfizem* med grafoma G in G' je preslikava $\phi : V(G) \to V(G')$, za katero velja

$$\{u, v\} \in E(G) \Longrightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in E(G').$$

Definicija 6.2. *Izomorfizem* med grafoma G in G' je bijektivna preslikava $\phi : V(G) \to V(G')$, za katero velja

$$\{u, v\} \in E(G) \Longleftrightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in E(G').$$

Definicija 6.3. V primeru, ko je $G = G'$, bomo homomorfizm poimenovali *endomorfizem* in izomorfizm poimenovali *avtomorfizem*.

Definicija 6.4. *Kromatično število* grafa G je najmanjše število barv, ki so potrebne, da pobarvamo točke tako, da nima noben par sosednih točk iste barve. Označili ga bomo z $\chi(G)$.

Definicija 6.5. *Klično število* grafa G je število vozlišč v največji kliki grafa. Označili ga bomo z $\omega(G)$.

Definicija 6.6. *Neodvisnostno število* grafa G je velikost največje neodvisne množice v grafu. Označili ga bomo z $\alpha(G)$.

Oglejmo si še dve splošno znani trditvi v teoriji grafov.

Trditev 6.7. *Za poljuben graf G velja*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Dokaz. Naj bo graf G poljuben z največjo kliko velikosti k. Zato, da pobarvamo kliko na tak način, da nobeni dve sosedni točki ne bosta imeli iste barve, potrebujemo k barv. To pomeni, da je

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

□

Trditev 6.8. *Za poljuben graf G velja*

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$$

Dokaz. Naj bo graf G poljuben. Predpostavimo, da velja obrat trditve, kar pomeni, da lahko graf G pobarvamo z manj kot $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ barvami. To bi pomenilo, da je eden od razredov barv strogo večji od $\alpha(G)$. Ker so razredi barv sami po sebi neodvisne množice, smo na ta način dobili neodvisno množico z več elementi kot $\alpha(G)$, kar je v protislovju z dejstvom, da je $\alpha(G)$ število elementov v največji neodvisni množici. □

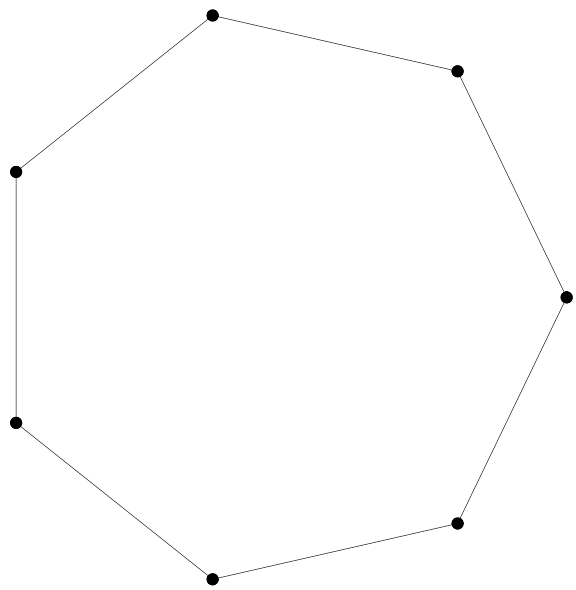
Izrek 6.9. *Če obstaja homomorfizem $\phi : G \to G'$ med grafoma G in G', potem je $\chi(G) \leq \chi(G')$.*

Dokaz. Naj bosta G in G' in $\phi : G \to G'$ homomorfizem. Označimo $t = \chi(G')$. Torej obstaja homomorfizem $\psi G' \to K_t$. Od tod sledi, da je tudi $\psi \circ \phi : G \to K_t$ homomorfizem. To pa pomeni, da je $\chi(G) \leq \chi(G')$. □

V dokazu izreka 6.9 smo uporabili splošno znano alternativno definicijo kromatičnega števila grafa G, ki pove, da je $\chi(G)$ enak takemu minimalnemu številu t, za katerega obstaja homomorfizem med G in K_t.

Definicija 6.10. Graf G je *jedro*, če so vsi njegovi endomorfizmi avtomorfizmi.

Primer 6.11. Tako polni grafi K_n kot lihi cikli C_{2n-1} (glej sliko 1) so jedra za poljubno pozitivno celo število n. Za polne grafe K_n to očitno drži. Oglejmo si še primer lihih ciklov C_{2n-1}. Predpostavimo, da obstaja endomorfizem $\phi : C_{2n-1} \to C_{2n-1}$, ki ni avtomorfizem, tj. ni bijektivna preslikava. To pomeni, da je slika endomorfizma ϕ prava podmnožica množice vozlišč grafa C_{2n-1}, kar pomeni, da je ϕ homomorfizem iz grafa C_{2n-1} v nek podgraf G grafa C_{2n-1}, kjer je $G \neq C_{2n-1}$. Po izreku 6.9 je $3 = \chi(C_{2n-1}) \leq \chi(G) \leq 2$. Torej so vsi endomorfizmi grafa C_{2n-1} avtomorfizmi.



Slika 1: Primer lihega cikla.

Definicija 6.12. Podgraf G' grafa G je *jedro grafa*, če ima naslednji lastnosti:

(i) graf G' je jedro;

(ii) obstaja homomorfizem $\phi : G \to G'$.

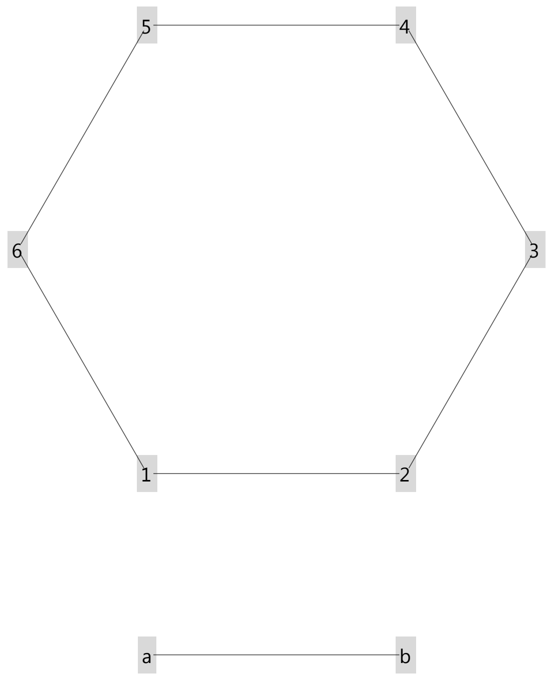
Opomba 6.13. Spomnimo se, da je podgraf G' grafa G retrakt grafa G, če obstaja retrakcija $\phi : G \to G'$, tj. homomorfizem za katerega velja $\phi(x) = x$ za vsak $x \in V(G')$. Očitno je vsako jedro grafa tudi njegov retrakt. Če je namreč ϕ homomorfizem iz točke (ii) v definiciji 6.12, potem je zožitev $\phi|_{G'}$ avtomorfizem grafa G', kompozitum $(\phi|_{G'})^{-1} \circ \phi$ pa je ustrezna retrakcija.

Naslednjo trditev lahko najdemo v knjigi [5], od koder je povzet dokaz.

Trditev 6.14 ([5] lema 6.2.2)**.** *Vsak graf G ima jedro, ki je induciran podgraf in je enoličen do izomorfizma natančno.*

Dokaz. Ker je graf G končen, je družina podgrafov grafa G, za katere obstaja homomorfizem iz G v podgraf, končna. Ker je identična preslikava homomorfizem na grafu G, to pomeni, da ima družina minimalen element, ki je jedro grafa. Ker je jedro retrakt grafa G, je očitno induciran podgraf. Predpostavimo sedaj, da sta G_1 in G_2 jedri grafa G in sta $\phi_1 : G \to G_1$ in $\phi_2 : G \to G_2$ homomorfizma. Torej je zožitev ϕ_1 na G_2 homomorfizem iz G_2 v G_1 in zožitev ϕ_2 na G_1 homomorfizem iz G_1 v G_2. Ker morata biti tako $\phi_1 \circ \phi_2$ kot $\phi_2 \circ \phi_1$ surjektivni, sta tudi preslikavi ϕ_1 in ϕ_2 surjektivni. To pomeni, da sta G_1 in G_2 izomorfna grafa. $\square$

Primer 6.15. Jedro sodega cikla C_n je poln graf na dveh točkah (glej sliko 2). Če označimo $V(C_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ in $V(K_2) = \{a, b\}$, je preslikava $\phi : C_n \to K_2$, za katero velja $\phi(2m-1) = a$ in $\phi(2m) = b$ za $m = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, očitno homomorfizem.



Slika 2: Cikel na šestih točkah in njegovo jedro.

V splošnem je med enostavnimi grafi veliko takih, ki so bodisi jedra bodisi je njihovo jedro poln graf. Klasifikacijo teh grafov so obravnavali v članku [2], od koder dobimo naslednji izrek.

Izrek 6.16 ([2])**.** *V primeru, ko grupa avtomorfizmov grafa G deluje tranzitivno na neurejene pare nesosednih točk, je graf G jedro ali pa je njegovo jedro poln graf.*

Izrek 6.16 se dotika predvsem grafov premera 2. Dokaz lahko najdemo v članku [2]. Zanimivo družino grafov, ki dopuščajo večji premer in imajo enako lastnost, so našli v članku [6].

Definicija 6.17. Graf G je *regularen*, ko ima vsaka točka grafa enako število sosedov.

Izrek 6.18 ([6])**.** *Za povezan regularen graf G z grupo avtomorfizmov, ki deluje tranzitivno na pare točk na razdalji 2, velja, da je G jedro ali pa je njegovo jedro poln graf.*

Definicija 6.19. Graf G je *psevdo-jedro*, če so njegovi endomorfizmi, bodisi avtomorfizmi bodisi endomorfizmi, ki imajo sliko enako največji kliki.

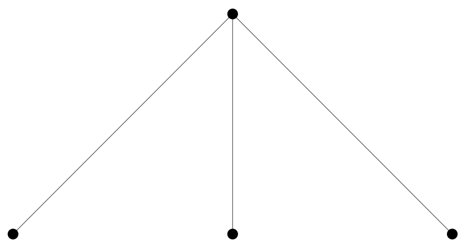
Posledica 6.20. *V kolikor je graf G psevdo-jedro, potem je bodisi graf G jedro bodisi je jedro grafa G poln graf.*

Dokaz. Naj bo graf G poljuben. Če obstaja endomorfizem na največjo kliko, potem je po izreku 6.9

$$\chi(G) \leq \chi(K_{\omega(G)}) = \omega(G),$$

torej je $\chi(G) = \omega(G)$, kar pomeni, da je jedro grafa poln graf. □

Obrat posledice (6.20) ne velja. Za protiprimer si oglejmo graf zvezde na štirih točkah, tj. graf, ki ima eno točko valence 3 in tri točke valence 1 (glej sliko 3). Jedro tega grafa je poln graf K_2, graf pa ni psevdo-jedro, saj obstaja endomorfizem, ki ima za sliko pot dolžine 2.



Slika 3: Zvezda na 4 točkah.

Naslednja definicija je znana v teoriji grafov. Lahko jo najdemo v knjigi [1].

Definicija 6.21. Enostaven neusmerjen graf, ki je brez zank in ima v vozlišč, je *krepko regularen graf* s parametri v, k, λ, μ, če ni poln graf ali brez povezav in zadošča naslednjim lastnostim:

(i) vsaka točka je sosedna k točkam,

(ii) vsak par sosednih točk ima λ skupnih sosedov,

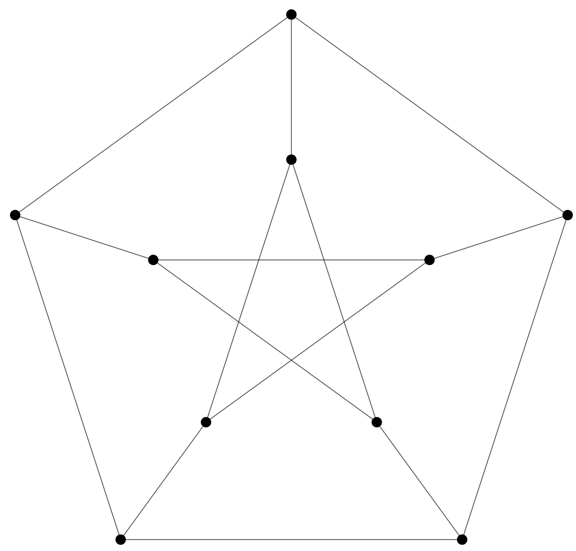
(iii) vsak par nesosednih točk ima μ skupnih sosedov.

Primer 6.22. Petersenov graf je krepko regularen graf s parametri $(10, 3, 0, 1)$ (glej sliko 4).

Definicija 6.23. Krepko regularen graf G je primitiven, če je tako G kot njegov komplement povezan graf.

Pri klasifikaciji psevdo-jeder je pomemben naslednji rezultat iz članka [31].

Izrek 6.24 ([31] posledica 3.5)**.** *Vsak primitiven krepko regularen graf je psevdo-jedro.*



Slika 4: Petersenov graf.

Po posledici 6.20 to tudi pomeni, da primitivni krepko regularni grafi tvorijo tretjo družino grafov, za katero velja zaključek iz izrekov 6.16 in 6.18. Obstajajo posamezni zanimivi primeri izven unije teh treh družin, za katere velja enak zaključek [26–29]. Slednje je verjetno indikator, da bo v prihodnosti odkritih še več tovrstnih družin.

Definirajmo graf $\Gamma_{m,n,q}$ na naslednji način: $V(\Gamma_{m,n,q}) = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ in $E(\Gamma_{m,n,q}) = \{\{A,B\}; A,B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ in $\operatorname{rang}(A-B)=1\}$. Avtomorfizmi grafa $\Gamma_{m,n,q}$ so ravno bijektivne preslikave na $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$, ki ohranjajo sosednost v obe smeri, in so opisani v izreku 4.3. Endomorfizmi grafa $\Gamma_{m,n,q}$ so ravno preslikave na $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$, ki ohranjajo sosednost in so opisane v izrekih 5.10 in 5.11. Neposredna posledica izreka 5.10 je izrek 6.25.

Izrek 6.25 ([17])**.** *Naj bosta $m,n \geq 2$ celi števili. Tedaj je graf $\Gamma_{m,n,q}$ psevdo-jedro.*

Izrek 5.11 lahko v jeziku teorije grafov zapišemo v naslednji obliki.

Izrek 6.26 ([17])**.** *Naj bosta $m,n \geq 2$ celi števili. Jedro grafa $\Gamma_{m,n,q}$ je poln graf na $q^{\max\{m,n\}}$ točkah.*

Izreka 5.10 in 6.25 za posebne primere, ko je $m = 2$ ali $n = 2$, sledita tudi iz izrekov 6.24 in 4.3, saj je v tem primeru graf krepko regularen, kar sledi iz izreka 6.27.

Izrek 6.27 ([1] izrek 9.5.1)**.** *Graf $\Gamma_{m,n,q}$ je krepko regularen, če je $m = 2$ ali $n = 2$.*

Opomba 6.28. Izrek 9.5.1 iz knjige [1] v resnici pove še več: graf $\Gamma_{m,n,q}$ je vedno razdaljno-regularen in celo razdaljno-tranzitiven. Za definicijo tovrstnih grafov glej [1].

7 Zaključek

V magistrski nalogi smo si kot nalogo zadali preučitev dokaza izreka 4.3, ki v grobem pravi, da lahko vsako bijektivno preslikavo $\mathcal{A}$ na pravokotnih matrikah, ki ohranja sosednost v obeh smereh, zapišemo v eni od naslednjih dveh oblik:

$$\mathcal{A}(X) = PX^{\sigma}Q + R \quad \text{za vse } X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D})$$

ali

$$\mathcal{A}(X) = P(X^{\tau})^{T}Q + R \text{ za vse } X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{D}) \ (m = n).$$

Obravnavali smo tudi številne posplošitve izreka 4.3, kjer sta izpuščeni tako predpostavka o bijektivnosti preslikave kot tudi predpostavka o ohranjanju sosednosti v nasprotno smer. Omenjene posplošitve so bile dokazane šele pred nekaj leti in tako predstavljajo pomemben del trenutnega raziskovanja na področju ohranjevalcev. V magistrski nalogi smo si na primeru pogledali tudi povezavo med ohranjevalci in teorijo grafov, kar prav tako predstavlja področje trenutnega raziskovanja [30].

Formulacijo izreka 4.3 na obsegu z vsaj tremi elementi je prvi postavil L.-K. Hua v članku [8]. Sorodne rezultate na drugih prostorih matrik lahko najdemo v knjigi [34]. Posplošitve tovrstnih izrekov, kjer so predpostavke omiljene, si lahko zainteresirani bralec ogleda med viri [3, 16–25, 27–29, 32].

Področje ohranjevalcev sosednosti je dandanes še vedno zanimivo za znanstveno raziskovanje. V prihodnosti lahko pričakujemo še več karakterizacij ohranjevalcev sosednosti, ki so potencialno koristne tudi za druga znanstvena področja.

8 Literatura

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen in A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 18; Springer-Verlag, Berlin, 1989. *(Citirano na straneh 47 in 48.)*

[2] P.J. Cameron in P.A. Kazanidis, Cores of symmetric graphs, *J. Aust. Math. Soc.* 85(2) (2008), 145–154. *(Citirano na strani 46.)*

[3] C. de Seguins Pazzis in P. Šemrl, Huan's fundamental theorem of geometry of rectangular matrices over EAS division rings., *J. Algebra* 439 (2015), 159–187. *(Citirano na straneh 2, 41 in 49.)*

[4] G. Frobenius, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch linear Substitutionen, *S. B. Preuss. Akad. Wiss.* Berlin (1897), 994–1015. *(Citirano na strani 1.)*

[5] C. Godsil in G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 207; Springer-Verlag: New York, NY, 2001. *(Citirano na strani 45.)*

[6] C. Godsil in G. Royle, Cores of geometric graphs, *Ann. Comb.* 15(2) (2011), 267–276. *(Citirano na strani 46.)*

[7] A. È. Guterman in A. V. Mikhalev, General algebra and linear transformations preserving matrix invariants, *Fundam. Prikl. Mat.* 9 (1) (2003), 83–101. angleški prevod v *J. Math. Sci.* 128 (6) (2005), 3384–3395. *(Citirano na strani 2.)*

[8] L.-K. Hua, A theorem on matrices over a sfield and its applications, *Acta Math. Sinica* 1(2) (1951), 109–163. *(Citirano na straneh 1, 25 in 49.)*

[9] L.-K. Hua, Geometries of matrices I. Generalizations of von Staudt's theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* 57 (1945), 441–481. *(Citirano na strani 1.)*

[10] L.-K. Hua, Geometries of matrices I_1. Arithmetical construction, *Trans. Amer. Math. Soc.* 57 (1945), 482–490. *(Citirano na strani 1.)*

[11] L.-K. Hua, Geometrices of matrices II. Study of involutions in the geometry of symmetric matrices, *Trans. Amer. Math. Soc.* 61 (1947), 193–228. *(Citirano na strani 1.)*

[12] L.-K. Hua, Geometries of matrices III. Fundamental theorems in the geometries of symmetric matrices, *Trans. Amer. Math. Soc.* 61 (1947), 229–255. *(Citirano na strani 1.)*

[13] L.-K. Hua, Geometries of symmetric matrices over the real field I, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 53 (1946), 95–97. *(Citirano na strani 1.)*

[14] L.-K. Hua, Geometries of symmetric matrices over the real field II, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 53 (1946), 195–196. *(Citirano na strani 1.)*

[15] L.-K. Hua, Geometry of symmetric matrices over any field with characteristic other than two, *Ann. of Math. (2)* 50 (1949), 8–31. *(Citirano na strani 1.)*

[16] L.-P. Huang in J.-Q. Huang, Zhao, K. On endomorphisms of alternating forms graph, *Discrete Math.* 338(3) (2015), 110–121. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[17] L.-P. Huang, Z. Huang, C.-K. Li in N.-S. Sze, Graphs associated with matrices over finite fields and their endomorphisms, *Linear Algebra Appl.* 447 (2014), 2–25. *(Citirano na straneh 2, 42, 48 in 49.)*

[18] W.-L. Huang, Adjacency preserving mappings of 2×2 Hermitian matrices, *Aequationes Math.* 75(1–2) (2008), 51–64. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[19] W.-L. Huang, R. Höfer in Z.-X. Wan, Adjacency preserving mappings of symmetric and Hermitian matrices, *Aequationes Math.* 67(1-2) (2004), 132–139. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[20] W.-L. Huang in P. Šemrl, Adjacency preserving maps on Hermitian matrices, *Canad. J. Math.* 60(5) (2008), 1050–1066. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[21] W.-L. Huang in P. Šemrl, The optimal version of Hua's fundamental theorem of geometry of square matrices—the low dimensional case, *Linear Algebra Appl.* 498 (2016), 21–57. *(Citirano na straneh 2, 40, 41 in 49.)*

[22] W.-L. Huang in Z.-X. Wan, Adjacency preserving mappings of rectangular matrices, *Beiträge Algebra Geom.* 45(2) (2004), 435–446. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[23] P. Legiša, Adjacency preserving mappings on real symmetric matrices, *Math. Commun.* 16(2) (2011), 419–432. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[24] M. Orel, A note on adjacency preservers on Hermitian matrices over finite fields, *Finite Fields Appl.* 15(4) (2009), 441–449. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[25] M. Orel, Adjacency preservers on invertible hermitian matrices *II*, *Linear Algebra Appl.* 499 (2016), 129–146. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[26] M. Orel, On Minkowski space and finite geometry, *J. Combin. Theory* Ser. A. 148 (2017), 145–182. *(Citirano na strani 48.)*

[27] M. Orel, On generalizations of the Petersen and the Coxeter graph, *Electron. J. Combin.* 22(4) (2015), Paper P.4.27. *(Citirano na straneh 2, 48 in 49.)*

[28] M. Orel, Adjacency preservers on invertible hermitian matrices, *I. Linear Algebra Appl.* 499 (2016), 99–128. *(Citirano na straneh 2, 48 in 49.)*

[29] M. Orel, Adjacency preservers, symmetric matrices, and cores, *J. Algebraic Combin.* 35(4) (2012), 633–647. *(Citirano na straneh 2, 48 in 49.)*

[30] M. Orel, Preserver problems over finite fields, *Simmons J, editor. Finite fields: theory, fundamental properties and applications. Hauppauge (NY): Nova Science Publishers* (2017), 1–54. *(Citirano na straneh 2 in 49.)*

[31] D.E. Roberson, *Homomorphisms of strongly regular graphs*, Dostopno na arXiv:1601.00969v1 [math.CO]. *(Citirano na strani 47.)*

[32] P. Šemrl, The optimal version of Hua's fundamental theorem of geometry of rectangular matrices, *Mem. Amer. Math. Soc.* 232(1089) (2014), vi+74 pp. *(Citirano na straneh 2, 37, 39, 40 in 49.)*

[33] P. Šemrl, *Geometrical Techniques in Linear Algebra. Lecture notes for Summer School and Advanced Workshop on Trends and Developments in Linear Algebra: Trieste 2009*, Dostopno na http://indico.ictp.it/event/a08167/session/73/contribution/52/material/0/0.pdf , dostopno dne 25.8.2017. *(Citirano na strani 1.)*

[34] Z.-X. Wan, *Geometry of Matrices. In Memory of Professor L. K. Hua (1910–1985)*, World Scientific Publishing Co. Inc.: river Edge, NJ, 1996. *(Citirano na straneh 1, 2, 3, 25 in 49.)*

[35] Z. Wan in Y. Wang, Discussions on A theorem on matrices over a sfield and its applications, *Shuxue Jinzhan* 5 (1962), 325–332. *(Citirano na strani 25.)*