UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

2017

MAGISTRSKO DELO

NATAŠA TOMŠIČ

MAGISTRSKO DELO

VERJETNOSTNA ANALIZA IGER NA SREČO

NATAŠA TOMŠIČ

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Verjetnostna analiza iger na srečo

(Probabilistic analysis of games of chance)

Ime in priimek: Nataša Tomšič
Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja
Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Koper, maj 2017

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Nataša TOMŠIČ

Naslov magistrskega dela: Verjetnostna analiza iger na srečo

Kraj: Koper

Leto: 2017

Število listov: 76 Število slik: 1 Število tabel: 18

Število prilog: 3 Št. strani prilog: 11

Število referenc: 41

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

UDK: 519.83(043.2)

Ključne besede: slot igre, osnovna igra, bonus igre, delež vračanja, scatter simbol, wild simbol.

Izvleček:

Igre na srečo postajajo vedno bolj zanimiva tematika tako za ponudnike kot igralce, zato trg vztrajno raste, vedno več je ponudnikov, prav tako pa tudi povpraševalcev oziroma igralcev. Slot igra je oblika iger na srečo, pri katerih imajo igralci možnost zadeti dobitek, ki je odvisen od naključja in vloženega zneska. Tovrstne igre postajajo vse bolj dostopnejše in z raznim oglaševanjem tudi privlačnejše. Slot igre so preproste za razumevanje, po navadi so sestavljene iz osnovne in bonus igre, v katero lahko preidemo s pomočjo določene kombinacije na igralnem polju. Da postanejo igre zanimivejše, se poleg osnovnih simbolov pojavljajo še posebna simbola, tako imenovana *scatter* in *wild*. Minimalni delež vračanja je določen z zakonodajo, po navadi pa se giblje med 88% in 98%.

Key words documentation

Name and SURNAME: Nataša TOMŠIČ

Title of the master thesis: Probabilistic analysis of games of chance

Place: Koper

Year: 2017

Number of pages: 76 Number of figures: 1 Number of tables: 18

Number of appendix: 3 Number of appendix pages: 11

Number of references: 41

Mentor: Assoc. Prof. Mihael Perman, PhD

UDK: 519.83(043.2)

Keywords: slot games, base game, free games, return to player, scatter symbol, wild symbol.

Abstract:

A slot game is a type of game of chance where players have a chance to win a prize depending on chance and the bet. Games of chance are becoming an increasingly interesting theme for providers as well as players. As a result the market is getting larger, there is an increasing number of providers as well as users or players. The games are becoming more and more accessible and more attractive with various types of advertising. Slot games are easy to understand, they mostly consist of a base and a bonus game which we can reach through certain combinations on the screen. To make games more interesting, scatter or wild symbols are added to the basic ones. The minimum return rate is set by law and is usually between 88% and 98%.

KAZALO VSEBINE

KAZALO PREGLEDNIC

KAZALO SLIK IN GRAFIKONOV

KAZALO PRILOG

1 UVOD

V današnjem času so igre na srečo precej popularne. Zakaj je temu tako, je težko reči, vendar gre zagotovo za prepletanje družbenih, ekonomskih, tehnoloških in drugih dejavnikov. Namenjene so širši populaciji, kar opravičuje preprosta pravila pri igranju le teh, vendar je tako le z vidika uporabnika oziroma igralca iger na srečo. Na drugi strani imamo proizvajalce iger na srečo, ki so pod strogim državnim nadzorom in jih omejuje dokaj stroga in precizna zakonodaja [5].

Tako igralce iger na srečo kot igralnice zanima predvsem, kolikšna je možnost, da bodo na dolgi rok pri določeni igri na srečo dobili oziroma izgubili. Igralnice seveda ne ponujajo iger, v katerih bi bila pričakovana izguba za igralca zelo velika. V njihovem interesu je namreč, da dano igro na srečo igra čim več ljudi. Prav tako igra ne sme zagotavljati skoraj gotovega dobička, saj bi to na dolgi rok pomenilo izgubo za igralnico. Pričakovati je torej, da igre na srečo igralcu dajejo upanje za zaslužek, a mu za varnost igralnic na dolgi rok zagotavljajo izgubo. Dejstvo, da igralnice poslujejo, kaže na to, da je temu res tako [34].

Vse slot igre načeloma delujejo po istem vzorcu, to pomeni, da za vsako igro igralec stavi določen znesek, po tem pa lahko pride do dobitka ali ne, kar je odvisno od simbolov na igralnem polju in njihovega položaja. Igra mora biti za igralca grafično zanimiva in mu hkrati ponujati privlačen dobiček. Igre se seveda razlikujejo in pri nekaterih lahko pride do pogostih manjših dobitkov, pri drugih pa do visokih dobitkov, ki se pojavijo redkeje, v obeh primerih pa je delež vračanja enak.

Slot igra je sestavljena iz določenega števila simbolov, ki morajo biti enakomerno porazdeljeni po kolutih. To ne pomeni, da bo določena kombinacija enako verjetna oziroma da se bo na igralnem polju pojavila z enako verjetnostjo kot vsi ostali simboli, ampak da se morajo vse kombinacije pojavljati dovolj pogosto, da ne bi igralec dobil občutka, da je določena kombinacija otežena ali da se določen simbol prepogosto pojavlja na določenem kolutu. Pogoste dobitne kombinacije v slot igri so v večini primerov tiste z manjšimi dobitki, to pomeni dobitki, ki se vrtijo okrog zneska stave.

Magistrsko delo je razdeljeno v dve enoti. Prva obsega teoretični del, v katerem je razložena vsa teorija, uporabljena v preračunu. Druga je praktična, sestavljena je iz analize in razlage preračuna v programu Microsoft Excel in simulacije v Visual Basicu.

V magistrskem delu bom preračunala konkretno igro na srečo, kjer so pravila sestavljena po lastni želji. Glavni cilj je določiti delež vračanja slot igre. To pomeni določiti dobiček, ki ga lahko igralnica pričakuje na dolgi rok. Predstavila bom idejo poteka izračuna, ki ga v praksi izvede računalnik. V zadnjem poglavju rezultat izračuna primerjam z rezultatom, ki sem ga dobila s simulacijo.

2 IGRE NA SREČO IN IGRALNI AVTOMATI

Igra izpolnjuje veseli in razposajeni del človekovega življenja, ki pa je bistven za človekovo psihično in fizično počutje, za njegovo socializacijo in umski razvoj. Hazard ali igra na srečo je posebna vrsta igre, ki zaradi naključnosti in nepredvidljivosti izida predstavlja pustolovščino, vsebuje neustavljivo privlačnost, presenečenja in razočaranja. Igre, kot so loterija, športne stave, konjske ali pasje dirke, borzno poslovanje, razne srečke, žrebanja v reklamne namene in igre v igralnih salonih ali igralnicah, so dandanes nekaj povsem vsakdanjega in nas spremljajo na vsakem koraku. Igre na srečo se ljudem ne zdijo problematične [27].

Igre na srečo so poseben tip iger, v katerih ima odločujoč pomen sreča, to je naključje in ne pridobljeno ali prirojeno znanje in spretnosti. Značilnost igre in naključja je, da se zgodita nepričakovano in nenačrtno. Igre na srečo so privlačne zaradi več dejavnikov. Po eni strani pritegnejo igralce zaradi velike verjetnosti ugodnega izida ali enostavno zaradi tekmovalnosti, ki jo lahko igra prinaša. V nasprotju s tem pa so med ljudmi zelo priljubljene igre, pri katerih obstaja možnost visokega dobitka, medtem ko je ugoden izid malo verjeten. Primer takih igre na srečo so državne loterije, hitre srečke, športne stave in podobne igre [27].

Igra je prostovoljno opravilo, ki se odvija v določenih časovnih in prostorskih okvirih po prostovoljno sprejetih, brez izjeme obveznih pravilih. Cilj igre na splošno je v njej sami. Spremlja jo občutek napetosti in radosti ter zavest, da je igra nekaj drugega kot običajno življenje, ki ga označujeta racionalnosti in delo [27].

Izid je po navadi zadetek ali dobitek. Uspeha v taki igri ni mogoče predvideti ali napovedati vnaprej. Srečni izid igre na srečo se izraža v dobitku zmagovalca, vendar moramo vedeti, da srečni dobitki ne padajo z neba, ampak je treba zanje tudi nekaj žrtvovati oziroma vložiti, večinoma denar. Zavedati se je treba, da bo vložek lahko izgubljen in da dobitek lahko pripada nasprotni strani [27].

Definicija igre na srečo v Republiki Slovenij je podana v Zakonu o igrah na srečo – ZIS (Uradni list RS, št. 14/2011 z dne 4. 3. 2011). Po tem zakonu so igre na srečo igre, pri katerih imajo udeleženci za plačilo določenega zneska enake možnosti zadeti dobitke, izid igre pa je izključno ali pretežno odvisen od naključja ali kakšnega negotovega dogodka [39].

Igralni avtomati se razlikujejo po proizvajalcih, modelih in glede na vrsto igre. Pri kolutnih igralnih avtomatih se igra odvija na vrtečih kolutih, kjer igralec vidi nabor enega ali več simbolov na kolutu in dobitki so odvisni od izbranih simbolov. Igralni avtomati za video poker simulirajo igranje pokra na monitorju. Video kolutni igralni avtomati na monitorju oponašajo klasične kolutne igre, kot so *triple lucky sevens, double hearts, crystal sevens* in *double diamond*.

Originalne mehanske naprave so uporabljale pet kolutov, vendar so avtomati s tremi koluti hitro postali standard. Problem slednjih je v tem, da dobimo manjše število možnih kombinacij. Avtomat s tremi koluti, od katerih ima vsak deset simbolov, daje le 10^3 oziroma tisoč možnih kombinacij. To omejuje število možnih kombinacij, npr. veliki jackpot se bo zgodil enkrat v tisoč poskusov. Največje teoretično izplačilo, ob predpostavki stoodstotne donosnosti, bi tisočkrat multiplicirala delež, vendar pa to ne bi pustilo veliko prostora za znesek drugih plačil, kar bi avtomat naredilo preveč tvegan in precej dolgočasen. Čeprav se je število simbolov povečalo na okoli 22, kar omogoča približno 10000 kombinacij, to še vedno omejuje velikost jackpota in število možnih izidov [8].

V 1980-ih so proizvajalci pri izdelavi igralnih avtomatov začeli uporabljati elektroniko in jih sprogramirali za tehtanje posameznih simbolov. To so t. i. virtualni avtomati (angl. virtual reel). Uporaba elektronike je omogočila boljši pregled nedobitnih kombinacij simbolov in večjo kontrolo in manipulacijo z dobički. Leta 1984 je bil odobren nov patent, ki uporablja zgoraj omenjeno tehnologijo (US Patent 4448419) in na katerem temeljijo vsi virtualni avtomati [8].

Patent navaja: »Pomembo je, da naprava kaže, da so možnosti za dobiček večje, kot so v resnici z zakonskimi omejitvami, na temelju katerih igre na srečo delujejo«. Virtualni avtomat ima lahko do 256 simbolov na posameznem kolutu, kar omogoča $256^3 = 16.777.216$ možnih kombinacij [8]. To pomeni, da če proizvajalec ponuja milijon dolarjev kot glavni jackpot na stavo 1 dolarja, bo ta glavni dobitek malo verjeten.

Moderni avtomati uporabljajo mikroprocesorje, kar jim omogoča dodelitev različnih verjetnosti za vsak simbol na vsakem kolutu. Igralcu se tako zdi, da je zmagovalni simbol »zelo blizu«, čeprav v resnici temu ni tako. Video igralni avtomati nimajo gibljivih delov, namesto tega uporabljajo grafični prikaz simbolov na zaslonu. Ker igralec s tem igra računalniško igro, so proizvajalci zmožni ponuditi več interaktivnih elementov, kot so napredne bonus igre in privlačna video grafika [8].

Ker ni mehaničnih omejitev za dizajn video avtomata, jih večina prikazuje pet kolutov namesto tri. To močno povečuje število možnosti, saj ima naprava lahko 50 ali več simbolov na kolutu [8].

Video igralni avtomati običajno spodbujajo igralce, da igrajo na več linij, namesto da samo sledijo simbolom na eni liniji. Linije se lahko premikajo navpično, vodoravno, diagonalno ali na drug način, ki ga določi proizvajalec. Več razlage o linijah je na strani 28. Vsak simbol na posameznem kolutu je enako verjeten. Da bi pri igralcu zmanjšali občutek izgube, proizvajalci ponujajo bonus igre, s katerimi igralcu omogočajo, da si kljub izgubljanju svoje izgube občasno zmanjša [8].

Igre se lahko razlikujejo glede na sama pravila. Vse igre imajo osnovno igro (angl. Base game) in Gamble. Pri igri Gamble igralec izbira med dvema kartama in ima 50-% verjetnost, da zadene. V tem primeru se mu znesek podvoji, v nasprotnem primeru pa izgubi. Veliko iger ima bonus igre (angl. Bonus game), ki se v večini primerov pojavijo kot dodatne brezplačne igre (angl. Free games). Trenutno so na trgu igre z različnimi načini vrtenja kolutov in načini plačila. V nadaljevanju opisujem najbolj pogoste:

- igre, kjer se dobitki izplačujejo na podlagi linij iz leve proti desni, iz desne proti levi ali pa v centru. Primer take igre je Novomatic-ova igra Just Jewels;
- igre, pri katerih dobitna kombinacija izgine in jo nadomesti sosednji gornji simbol. Če se pojavi dodatna dobitna kombinacija, se le-ta prišteje prvotni in simboli se ponovno zamenjajo z gornjim simbolom. Primer take igre je IGT-jeva igra Da Vinci Diamonds;
- igre, ki ne vsebujejo zmagovalnih linij, ampak izplačujejo dobitke, če se simboli pojavijo na sosednjih kolutih (angl. allpay). Primer take igre je Aristocratova igra Buffallo;
- igre, kjer se pojavijo multiplikatorji. To pomeni, da se v primeru dobitne linije, kjer se pojavi poseben simbol (simbol *wild*), dobitek podvoji, potroji ... Primer take igre je IGT-jeva igra Cleopatra;
- igre, kjer posebni simboli (simbol *wild*) ostanejo na igralnem polju in se razširijo na cel kolut, pri čemer se poveča igralčeva verjetnost dobitka;
- igre z Jackpot dobitki;
- igre, kjer lahko pride do nadgradnje. Če se pojavi določen simbol na določeni poziciji, se nadgradi v drugi simbol. Primer take igre je Novomatic-ova igra Asian Attraction.

2.1 Naključni procesi pri igrah na srečo

Generatorji naključnih števil (RNG, angl. Random Number Generator) se uporabljajo v večini iger na srečo, med katerimi lahko omenimo igre na igralnih avtomatih, bingo, loterijo, športne stave in virtualne konjske dirke. Vse igre temeljijo na plačilnih tabelah oziroma koeficientih, ki so odvisni od verjetnosti posameznega dobitka. Vsak dogodek ima svoj koeficient in v skladu s tem mogoči dobitek.

Prve konjske dirke, loterije in starejše igralne avtomate so v sodobnem času zamenjali računalniki s posebnimi programi, ki funkcionirajo na podlagi generatorjev naključnih števil. Generator naključnih števil generira naključno število, na podlagi česar računalnik izvrže/predloži kombinacijo slik [8].

Generator naključnih števil je namenjen ustvarjanju zaporedja števil ali simbolov, ki se pojavljajo brez posebnih pravil oziroma naključno.

Obstaja več računalniških metod za generiranje naključnih števil. Generator psevdonaključnih števil (PRNG), znan tudi kot deterministični generator naključnih bitov (DRBG), je algoritem za generiranje zaporedja števil, ki aproksimira lastnosti naključnih števil. Zaporedje števil ni popolnoma naključno in je pravzaprav določeno z relativno majhnim nizom začetnih vrednosti, ki se imenuje stanje PRNG. Zaporedja, ki so blizu pravim naključnim številom, se lahko pridobijo z uporabo generatorja HW za generiranje naključnih števil. Psevdonaključne številke so pomembne v praksi simulacije (npr. fizični sistemi z metodo Monte Carlo) in so osrednjega pomena za prakso kriptografije in procesne generacije [8].

Hardverski generator naključnih števil je naprava, ki generira naključna števila iz naravnih procesov. Take naprave pogosto temeljijo na mikroskopskih pojavih, ki generirajo na primer statistično naključni »hrup« signala, kot so toplotni hrup, fotoelektrični učinek ali drugi kvantni pojavi. Omenjeni procesi so v teoriji popolnoma nepredvidljivi in so predmet eksperimentalnega testiranja. Generator naključnih števil je običajno sestavljen iz senzorja ali pretvornika, ki pretvarja naravne pojave v električni signal, ter nekatere vrste analogno/digitalnega pretvornika za pretvorbo v digitalna števila (binarno število, 0 ali 1). Z vzorčenjem naključnega signala na izhodu dobimo niz naključnih števil [8].

Hardverski generatorji naključnih števil se razlikujejo od generatorja psevdonaključnih števil (PRNG), ki jih običajno uporablja večina računalnikov. Generatorji psevdonaključnih števil uporabljajo deterministični algoritem. Čeprav so psevdonaključna zaporedja del statističnih testov naključnosti, je mogoče, če poznamo algoritem, napovedati števila. Zaradi občutljivosti na kriptoanalitične napade generatorji psevdonaključnih števil niso primerni za kriptografske aplikacije. Zato se danes v izjemno rizičnih situacijah, kot je generiranje za potrebe gospodarskih in vojaških sistemov, uporablja hardverski generator naključnega števila [8].

Kadar potrebujemo večje število naključnih podatkov, jih uporabljamo v kombinaciji z generatorji psevdonaključnih števil. Ti sprejmejo eno ali več števil kot vhodne podatke in dajo večjo količino psevdonaključnih števil. Podatke, ki jih sprejmejo, imenujemo semena (ang. seeds). Vsi izhodi generatorja so natančno določeni s semeni, zato te generatorje imenujemo psevdonaključni. Takšni generatorji sicer dajejo zaporedje števil, ki izgleda naključno, vendar imajo določeno periodo, po kateri se števila začnejo ponavljati. Ker so vsa števila generatorja psevdonaključnih števil natančno določena s semenom in so algoritmi teh generatorjev znani, moramo v kriptografiji poskrbeti, da ostanejo semena tajna [9].

Definicija 1: Generator pseudonaključnih števil je deterministični algoritem, ki z neko začetno vrednostjo, imenovano »seed«, generira bite, ki jih ne razločimo od naključnih, kar pomeni, da so nepredvidljivi.

2.1.1 Generatorji pseudonaključnih števil

2.1.1.1 Algoritem Blum Blum Shub

BBS-generator ima sledečo obliko:

$$X_{n+1} = X_n^2 (mod\ M)$$

Pri tem je $M = pq$ zmnožek dveh praštevil p in q. Na vsakem koraku algoritma so izhodi dobljeni iz X_{n+1}. Izhod je paritetni bit X_{n+1} oz. eden ali več najmanj pomembnih bitov števila X_{n+1}. Seme X_0 je celo število, ki ni 1 in ni deljivo z M.

Definicija 2: Naj bo n poljubno naravno število. Funkcija $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ naj bo enaka številu vseh naravnih števil, ki so tuja z n in niso večja od n. Funkcijo φ imenujemo Eulerjeva funkcija in jo označimo z $\varphi(n)$.

Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$ je v teoriji števil multiplikativna aritmetična funkcija poljubnega pozitivnega celega števila n in da skupno število pozitivnih celih števil, ki ne presegajo n, in so n tuja. Kot tuje število štejemo tudi število 1. Na primer, $\varphi(8) = 4$, ker so štiri števila, 1, 3, 5 in 7 tuja številu 8 [11], $\varphi(6) = 2$, ker sta števili 1 in 5 številu 6 tuji.
Zanimiva karakteristika generatorja BBS je možnost izračunavanja katerekoli vrednosti X_n neposredno iz Eulerjevega izreka:

$$X_n = \left(X_0^{2^n mod\ \lambda(p \times q)}\right) mod\ M$$

kjer $\lambda(p \times q) = lcm(p-1, q-1)$.

Definicija 3: Dve celi števili a in b sta tuji (relatively prime ali coprime), če je njun skupni deljitelj samo 1, tj. $gcd(a, b) = 1$.

Naj bosta p in q poljubni števili. Največje naravno število, ki deli tako p kot q, označimo z $gcd\ (p, q)$ in ga imenujemo največji skupni delitelj števil p in q. (Oznaka gcd izvira iz angleškega poimenovanja greatest common divisor). Najmanjše naravno število, ki je deljivo tako s p kot s q, pa imenujemo najmanjši skupni večkratnik števil p in q in ga označimo z $lcm(p, q)$ (angl. least common multiple). Celi števili p in q sta si tuji, če velja $gcd(m, n) = 1$ [41].

Generator BBS ni primeren za uporabo, razen za kriptografijo (šifriranje RSA), ker je zelo počasen. Zaradi svoje izjemne varnosti je dovolj kvaliteten za kriptografske zahteve.

Naj bo $\mathrm{n = p \cdot q = 7 \cdot 19 = 133}$ in naključna začetna vrednost $\mathrm{s = 100}$, $\mathrm{s \in [1, n-1]}$. Potem imamo $\mathrm{x_0 = 100^2 (mod\ 133) = 25}$. Izhodna števila zaporedja $\mathrm{x_1 = 25^2\ (mod\ 133) = 93}$, $\mathrm{x_2 = 93^2\ (mod\ 133) = 4}$, $\mathrm{x_3 = 4^2\ (mod\ 133) = 16}$, $\mathrm{x_4 = 16^2\ (mod\ 133) = 123}$ so *1, 0, 0, 1* [19].

Definicija 4: Praštevilo p se imenuje Blumovo praštevilo, če p ≡ 3 (mod 4).

2.1.1.2 Inverzni kongruentni generator

Inverzni kongruentni generator je vrsta nelinearnega kongruentnega generatorja psevdonaključnih števil, ki uporablja modularno recipročno vrednost (če obstaja) za generiranje naslednjega števila v zaporedju. Standardna enačba za inverzni kongruentni generator je:

$$X_{i+1} \equiv \left(aX_i^{-1} + c\right)\ (mod\ m),$$

kjer je $0 < X_i < m$, a, c, m konstante, ki določajo generator, število X_0 pa lahko določi uporabnik in mu pravimo seme generatorja.
Inverzni kongruentni generator označujemo tudi z oznako $ICG\ (m, a, c, X_0)$ [8].

2.1.1.3 Linearni kongruentni generator

Preden začnemo s predstavitvijo enačbe linearnega kongruenčnega generatorja, pojasnimo pomen besede kongruentni. Izraz kongruenca izhaja s področja matematike in označuje relacijo med dvema številoma. Velja, da sta dve števili kongruentni, če je ostanek pri deljenju teh dveh števil z istim vnaprej danim deliteljem enak. Ta relacija je razvidna tudi iz rekurzivne enačbe, ki definira LCG.
Linearni kongruentni generator je eden izmed najstarejših in najbolj znanih algoritmov generatorja psevdonaključnih števil. Teorijo, ki stoji za njim, je enostavno razumeti, zato je njegovo izvajanje hitro in učinkovito.
Generator je definiran rekurzivno kot:

$$X_{n+1} = (aX_n + c)\ (mod\ m)$$

Pri tem so a, c, m konstante, za katere velja $m > 0,\ 0 < a < m,\ c \leq 0 < m,$ i in kjer X_{n+1} predstavlja naključno število, ki se izračuna neposredno iz svojega predhodnika X_n. Število X_0 lahko poda uporabnik v obliki semena (angl. seed) ali pa se ga fiksira znotraj generatorja (X_0 < 0 < m). Števili X_n in X_{n+1} sta kongruentni pod pogojem, da sta manjši od števila m. Če števili delimo s konstanto a, je ostanek pri deljenju enak b.
Linearne kongruentne generatorje je začel uporabljati Lehmer [23] že leta 1948.
Linearne kongruentne generatorje označujemo z oznako $LCG(m,\ a,\ c,\ X_0)$.

2.1.1.4 Mersennov generator

Mersennov generator (orginalno ime je angl. Mersenne Twister, MT) je generator psevdonaključnih števil, ki temelji na matriki linearnega ponavljanja nad končnim binarnim poljem F_2. Ta algoritem je dobil ime po dejstvu, da je dolžina periode, v katerem se ustvarjajo naključna števila, enaka Mersennovemu praštevilu oblike $2^p - 1$. Obstaja več različic algoritmov, ki se razlikujejo med sabo po velikosti izbrane Marsenneove številke. Novejši in pogosto uporabljen algoritem je MT19937 (Mersenne Twister z Mersennovim številom $2^{19937} - 1$) z 32-bitnim nizom. Obstaja tudi varianta s 64-bitnim nizom, MT19937-64, ki generira drugačen niz. Za besedo dolžine poljubnih k-bitov algoritem generira števila s skoraj enakomerno porazdelitvijo v območju $[0, 2^k - 1]$.

2.1.1.5 Lehmerov generator psevdonaključnih števil

Lehmerov generator psevdonaključnih števil se pogosto omenja tudi kot Park-Millerjev generator psevdonaključnih številk.
Lehmer Random Number Generator je poimenovan po D. H. Lehmerju in je posebna različica linearnega kongruentnega generatorja (angl. linear congruential generator, LCG). Splošna formula je:

$$X_{n+1} = aX_n \ (\mathrm{mod}\ m),$$

kjer je a celo število v območju $[2, m-1]$ in m praštevilo.
Pomembne lastnosti algoritma so:

a. $X_n \neq 0$ in izhod generatorja nikoli ne limitira proti nič,
b. X_n so števila na intervalu $[1, m-1]$ ali skalirano $[1 / m, 1 - 1 / m]$,
c. kakovost generatorja je odvisna od izbire parametrov.

Parametra m in a, ter niz prvih m-1 števil se izbere po naključju, nato pa se cel niz ponovi. Temu se reče periodičnost, parametra m in a pa določata njeno dolžino. Cilj je izbrati čim daljši niz. Najbolj pogosto uporabljena izbira je parameter MINSTD („minimal standard“). Parametre sta izbrala Park in Miller kot $a = 16807 = 7^5$ in $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$. Generator je primeren za 32-bitne računalnike, vendar pa je pomembno omeniti možnost prelivanja, ki v najslabšem primeru zahteva 46 bitov. Znan je tudi algoritem RANDU, ki ga je razvil IBM. Največkrat je bil v uporabi v 60-ih na mainframe računalnikih, vendar pa zaradi njegovih pomanjkljivosti, veliko število študij na podlagi tega algoritma iz tega obdobja danes nima večjega pomena [8].

2.1.1.6 Lastnosti in primerjava algortmov

Prednosti in slabosti linearnega kongruentnega generatorja (LKG)

Linearni kongruentni generatorji so hitrejši od ostalih algoritmov in zahtevajo minimalni pomnilnik (tipično 32- ali 64-bitni). To pomeni, da so uporabni tudi za simulacijo več neodvisnih zaporedij. LKG naj se ne bi uporabljali za aplikacije, v katerih je naključje visoke kvalitete kritično. Niso uporabni za simulacijo Monte Carlo zaradi serijske

korelacije in tudi ne za kripografske aplikacije. Če ima linearni kongruentni generator isto seme, se lahko zaporedje še enkrat ponovi. Rezultat je prosta klasična šifra, ki se imenuje afina šifra.
LKG je lahko dobra izbira, če smo omejeni z velikostjo pomnilnika. Pri igralnih avtomatih je majhno število bitov visokega reda LKG dovolj. Biti nižjega reda LKG, ko je m potenca št. 2, naj se nikoli ne bi uporabljali za visoko stopnjo naključnosti. Katerikoli cikel LKG, kjer je m potenca št. 2., generira izmenično sodo in liho število.

Prednosti in slabosti Mersennovega algoritma

Algoritem omogoča hitro generiranje psevdonaključnih številk in je narejen s ciljem odpraviti pomanjkljivosti prejšnjih algoritmov. Njegovo ime izhaja iz dejstva, da je dolžina cikla enaka Mersennovemu praštevilu. Njegove prednosti so naslednje:

1. dolžina cikla je $2^{19937} - 1$,
2. algoritem deluje na podlagi 19937 bitov dolgega semena. Vrednost je enakomerno porazdeljena v matriki s 624 elementi, kjer je vsak element 32 biten,
3. učinkovita uporaba pomnilnika in visoka zmogljivost. Zadovoljuje številne teste naključnosti (angl. randomness tests), kot so testi Diehard in TestU01 Crush.

Za številne aplikacije je postal Mersenne Twister prva izbira za generiranje psevdonaključnih številk, na primer MATLAB (ukaz rand), R, Maple, Gretl, Python in Ruby.
Algoritem zaradi svoje oblike ni primeren za kriptografijo (za razliko od generatorja Blum Blum Shub). Ena od pomanjkljivosti tega algoritma je, da je potrebno veliko časa, da preide iz začetnega stanja v zadovoljiv naključni izhod. Nekateri kritiki, zlasti George Marsaglia, trdijo, da čeprav je algoritem dober v generiranju naključnih števil, ni eleganten in je preveč kompliciran za uporabo. George Marsaglia je dal več primerov generatorjev naključnih števil, ki so manj zapleteni z bistveno večjimi periodami. Na primer, multiply-with-carry generator ima lahko periodo 1033000 ter je hitrejši in ima enako ali celo boljšo porazdelitev naključnih števil. Za omenjeni problem inicializacije Marsaglia ponuja alternativo v algoritmu WELL ("Well Equidistributed Long-period Linear“).

Primerjava Lehmerovega generatorja psevdonaključnih števil z LCG-om

Kot je bilo že omenjeno, je Lehmerjev algoritem poseben primer LK generatorja s parametrom $c = 0$ in ima zato določene omejitve v primerjavi z LKG. V Lehmerjevem algoritmu morata biti začetni člen X_0 in modul m praštevili, kar za LKG ni potrebno. Za razliko od LK generatorjev, je največja perioda Lehmerevega algoritma m-1. Pri tem zahtevamo, da je m praštevilo, medtem ko je a primitiven koren modula m [8].

Primer kode v Matlabu:

```
a=16807;% a=7^5
m=2147483647; %m=2^31-1
x=zeros(1,100000);
x(1)=1;
for i=1:100000
x(i+1)=mod((a*x(i)),m);
end
```

Z omenjeno kodo generiramo 100.000 naključnih števil po principu Lehmerjevega algoritma. Za prvi element zaporedja smo izbrali število 1 in izpolnili pogoj, da morata biti m in prvi element v zaporedju praštevili.

Primerjava LKG z ostalimi generatorji pseudonaključnih števil

V primerih, ko imamo na razpolago dovolj pomnilnika (~ 2 KB) in so potrebne naključne številke večje kakovosti, algoritem Marsenne Twister zagotavlja izredno dolgo periodo $(2^{19937} - 1)$. Algoritem Mersenne Twister generira visokokakovostna odstopanja v primerjavi s katerimkoli drugimi LKG. Zanimivo je, da algoritem Mersenne Twister uporablja LKG za generiranje semen. Linearni register s povratno informacijo prav tako generira psevdonaključna števila, ki se lahko implementirajo s skoraj enako količino pomnilnika in generirajo zaporedje psevdonaključnih števil, ki so bolj podobna naključnemu zaporedju, v smislu sekvence bitov, čeprav z več računanja [8].

2.1.2 Statistični testi

Generator deluje pravilno, če so števila, ki jih podaja, porazdeljena enakomerno in so neodvisna. Za bitno zaporedje rečemo, da je porazdeljeno enakomerno, če se bita 0 in 1 pojavita z enako verjetnostjo. Neodvisnost pa pomeni, da je verjetnost, da se na nekem mestu pojavi 0 ali 1, neodvisna od prejšnjih bitov. V tem primeru bomo rekli, da je zaporedje bitov primerno.
Ustreznost generatorja naključnih števil preverjamo s statističnimi testi. V splošnem postavimo pri statističnih testih dve hipotezi. Prva je ničelna hipoteza. V našem primeru se bo ničelna hipoteza vedno glasila: števila so enakomerno porazdeljena. Druga pa je alternativna hipoteza, ki pove ravno nasprotno, pri nas: števila niso enakomerno porazdeljena.
Za testiranje naključnih števil obstaja več različnih testov. Pet osnovnih testov je: frekvenčni test, serijski test, poker test, iteracijski test in avtokorelacijski test [25].
Ameriški Nacionalni inštitut za standarde in tehnologijo je izdal zbirko statističnih testov za preverjanje generatorjev naključnih števil. V njej je 15 različnih testov, s katerimi preverjamo naključnost bitnega zaporedja. V nadaljevanju so našteti testi, ki so vključeni v to zbirko.

1. Frekvenčni test ali monobitni test (angl. Frequency test). Ta test je namenjen testiranju relativne frekvence ničel in enic v celotnem zaporedju. Ob predpostavki naključnega zaporedja bo relativna frekvenca enic blizu 1/2. Test preveri, ali je odstopanje relativne frekvence znotraj dopustnih mej.

2. Frekvenčni test znotraj bloka (angl. Frequency test within a block). Pri tem testu celotno zaporedje razdelimo na več manjših blokov, v katerih testiramo relativne frekvence enic.

3. Iteracijski test (angl. Runs test). Pri tem testu preštejemo celotno število ponavljanj v podanem zaporedju. Iteracija je neprekinjeno podzaporedje enakih bitov. S testom preverimo, ali je število ponovitev v podanem zaporedju znotraj mej, ki jih pričakujemo pri naključnem zaporedju. S tem preverimo, ali se dva zaporedna bita razlikujeta prevečkrat ali premalokrat.

4. Test za najdaljšo iteracijo enic v bloku (angl. Test for the longest run of ones in a block). Pri tem testu zaporedje spet razdelimo na bloke in preverjamo, kolikokrat se v blokih pojavljajo dolga zaporedja enic.

5. Test ranga binarne matrike (angl. Binary matrix rank test). Zaporedje spet razdelimo na bloke in bite iz posameznih blokov zapišemo v kvadratne matrike. Določimo, koliko matrik ima binarni rang enak številu vrstic v matriki, koliko matrik ima binarni rang za ena manjši in koliko je vseh ostalih matrik. Števila matrik primerjamo s pričakovanimi rezultati za naključno zaporedje. S tem testom preverjamo morebitne linearne odvisnosti med podzaporedji fiksne dolžine.

6. Test z diskretno Fourierevo transformacijo ali spektralni test (angl. Discrete Fourier transform test). S tem testom preverjamo prisotnost periodičnih komponent v testiranem zaporedju. Preverjamo absolutne vrednosti v diskretni Fourierevi transformiranki zaporedja. Ob predpostavki naključnega zaporedja bodo te vrednosti teoretično pod neko kritično vrednostjo.

7. Test ujemanja s predlogami brez prekrivanja (angl. Non-overlapping Template Matching Test). Namen tega testa je ugotoviti, ali se v zaporedju prevečkrat nahajajo določena krajša zaporedja fiksnih dolžin. Pri tem testu uporabljamo okno dolžine predloge, ki ga premikamo po en bit skozi zaporedje. Kadar najdemo neko podzaporedje bitov, ki je enako predlogi, se pomaknemo naprej za dolžino celotenega okna oziroma predloge.

8. Test ujemanja s predlogami s prekrivanjem (angl. Overlapping Template Matching Test). Ta test je podoben prejšnjemu, le da se v vsakem primeru pomikamo z oknom za en bit naprej.

9. Maurerjev “univerzalni statistični” test (angl. Maurer’s “universal statistical” test). Preverjamo število bitov med dvema enakima vzorcema v zaporedju. S tem

ugotovimo, ali je možno zaporedje opazno komprimirati brez izgube informacij, kar bi pomenilo, da zaporedje ni primerno.

10. Test linearne kompleksnosti (angl. Linear complexity test). S tem testom preverjamo dolžino pomičnega registra z linearno povratno vezavo. Ugotovimo, ali je zaporedje dovolj kompleksno, da ga lahko smatramo za naključno.
11. Serijski test (angl. Serial test). S tem testom preverimo frekvenco vseh možnih prekrivajočih se bitnih vzorcev določene dolžine. S tem preverimo, ali se vsi vzorci pojavijo s pričakovano verjetnostjo.
12. Test približne entropije (angl. Approximate entropy test). Podobno kot v prejšnjem testu preverjamo frekvence določenih vzorcev. Tukaj pa primerjamo frekvenco dveh prekrivajočih se blokov zaporednih dolžin s pričakovano frekvenco.
13. Test kumulativnih vsot (angl. Cumulative sums test). S tem testom preverimo, kako se z naključnim sprehodom, določenim z delno vsoto bitnega zaporedja, oddaljujemo od srednje vrednosti. Pri tem pretvorimo bite 0 in 1 v števila -1 in 1.
14. Test naključnega oddaljevanja (angl. Random excursion test). Preverjamo število ciklov, ki se pojavijo z določeno pogostostjo v naključnem sprehodu.
15. Varianta testa naključnega oddaljevanja (angl. Random excursion test). Pri tem testu preverjamo, kolikokrat je bilo katero število obiskano v slučajnem sprehodu.

Vsak od teh testov nam kot končni rezultat vrne P-vrednost. To je verjetnost, da je idealen generator naključnih števil tvoril zaporedje, na katerem bi dobili enako ali tipično večjo vrednost testne statistike [9].

2.2 Markovske verige

Zaporedja, v katerih odvisnost sega le do sosednjih členov, imenujemo markovska zaporedja. Če za ta zaporedja velja, da so členi zaporedja poskusi, pri katerih obstaja kvečjemu števni popolni sistem izidov, pravimo temu zaporedju markovska veriga. Matematično to zapišemo [7]:
Markovske verige z diskretnim časom so procesi z diskretno množico stanj v diskretnem času. Markovska veriga je torej definirana z zaporedjem diskretnih slučajnih spremenljivk $X = \{X_1,\ X_2,\ X_3, \dots\}$. Naj bo X_t stanje v poljubnem trenutku t in dogodek

$$\{X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_1 = x_1\} = P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t)$$

za neko zaporedje stanj $x_t, x_{t-1}, \dots, x_1$. Če poznamo vrednost X_t v času t, je v nekem poznejšem trenutku $t+1$, verjetnostna porazdelitev X_{t+1} popolnoma določena s X_t. Poznavanje vrednosti $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}$ ... ni potrebno. Pogojna verjetnost

$$P = (X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0)$$

predstavlja verjetnost naslednjega dogodka v času t pod pogojem, da poznamo celotno zgodovino dogodkov do časa t.
Markovska lastnost je izpolnjena, ko sta ti dve pogojni verjetnosti enaki.

Definicija 5: Zaporedje $\{X_1, X_2, X_3 \dots\}$ slučajnih spremenljivk ima markovsko lastnost, če velja

$$P = (X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_1 = x_1) = P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t)$$

za vsako zaporedje $x_1, \dots, x_t, x_{t+1}$ elementov in vsak $t \geq 1$.
Zaporedja slučajnih spremenljivk z markovsko lastnostjo se imenujejo markovske verige.
Vsako slučajno spremenjivko X_t bomo imenovali t-ti prehod ali t-ti korak markovske verige, zalogo vrednosti slučajne spremenljivke X_t pa stanja. Če je $X_t = i$ pravimo, da je markovska veriga ob času t v stanju i.
Pogojno verjetnost, kjer je bilo na začetku opazovanja zasedeno stanje i, v času t pa stanje j, imenujemo verjetnost prehoda iz stanja i v stanje j v času t. To označimo s

$$p_{ij}^{(t)} = P(X_{t+1} = j | X_0 = i)$$

Verjetnost prehoda v prvem koraku označimo s

$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)} = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

2.2.1 Prehodna matrika

Pri končni markovski verigi s prostorom stanj $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ je $(N+1)^2$ verjetnosti prehodov iz enega stanja verige v drugo stanje. Prehodne verjetnosti p_{ij} zapišemo najpogosteje v matrični obliki:

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{bmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N0} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

Prehodna matrika p_{ij} vsebuje vse potrebne informacije o prehodih markovske verige med stanji v S. Začetna stanja se spreminjajo po vrsticah, končna pa po stolpcih [7].

Trditev 1: Vsaka prehodna matrika je stohastična matrika, kar pomeni, da ima naslednji lastnosti:

(i) elementi matrike so nenegativni; $p_{ij} \geq 0$,

(ii) vsota členov v posamezni vrstici matrike je enaka 1;

$$\sum_j p_{ij}^{(t)} = 1, \text{ za vse } t \geq 0.$$

Dokaz: Ker je verjetnost nenegativna, velja $p_{ij} = P = (X_1 = j | X_0 = i) \geq 0 \; za \; \forall \; i, j$. Z uporabo formule za popolno verjetnost lahko zapišemo

$$1 = P(X_1 \in S|X_0 = i) = P([X_1 = 0] + [X_1 = 1] + \cdots |X_0 = i)$$
$$= P(X_1 = 0|X_0 = i) + P(X_1 = 1|X_0 = i) + \cdots$$
$$= p_{i0} + p_{i1} + \cdots$$
$$= \sum_j p_{ij}$$

za vsak i.

Definicija 6: Prehodna matrika P je regularna, če imajo dovolj velike potence matrike P samo pozitivne elemente. Markovska veriga je regularna, če je prehodna matrika regularna.

Markovska veriga je regularna, če obstaja takšno celo število n, da so vsi elementi matrike P^n večji od 0. Če je veriga regularna, lahko dokažemo, da se z večanjem n matrika P^n približuje limiti P^*, katere vrstice so identične in enake invariantni porazdelitvi π_x. Vektor stalnega stanja obstaja, če in samo če je markovska veriga regularna [24].

2.2.2 Verjetnostna porazdelitev stanj

Za izračun verjetnostne porazdelitve v poljubnem času moramo poleg prehodne matirke poznati še verjetnostno porazdelitev na začetku. Začetna verjetnostna porazdelitev je definirana kot:

$$p^{(0)}(i) = \mathrm{P}(X_0 = i); i \in S,$$

kjer je $p^{(0)} = [p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots]$ verjetnostni vektor. V nadaljevanju bomo porazdelitev markovske verige v času t označevali z vektorjem $p^{(t)} = [p_0^{(t)}, p_1^{(t)}, p_2^{(t)}, \dots]$, ki je definiran kot:

$$p^{(t)}(i) = \mathrm{P}(X_n = i); i \in S.$$

Iz formule za popolno verjetnost sledi, da je $p^{(t+1)}(j) = \sum_{i \in S} p^{(t)}(i) p_{ij}$, kar v matrični formi zapišemo kot $p^{(t+1)} = p^{(t)}\mathrm{P}$. Z iteracijo te enakosti dobimo

$$p^{(t)} = p^{(0)} P^{(t)},$$

pri čemer je $\mathrm{P}^{(t)}$ matrika prehoda v t-tem koraku s splošnim elementom:

$$p_{ij}^{(t)} = P(X_{m+t} = j|X_m = i).$$

Če imata dve markovski verigi enako matriko prehoda in začetno stanje, potem imata tudi enako porazdelitev.

Poglejmo si najprej primer za $t = 2$. Zaradi preglednosti vstavimo za t vrednost 0. Izračunati hočemo

$$p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = j | X_0 = i).$$

Zgornjo verjetnost lahko zapišemo kot popolno verjetnost po vseh možnih stanjih, v katerih se lahko nahaja veriga ob času 1 [9].

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= \sum_k P(X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i) P(X_1 = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_2 = j | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k p_{ik} p_{kj} \end{aligned}$$

V zadnji vrstici enačbe vidimo, da smo iskano verjetnost zapisali kot skalarni produkt i-te vrstice in j-tega stolpca prehodne matrike, kar je element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu kvadrata prehodne matrike P^2 [9].

Izrek 1: ***Enačba Chapmana in Kolmogorova***

Naj bosta r in m naravni števili, za kateri velja $\mathrm{r} < \mathrm{m}$. Potem za verjetnosti prehoda v markovski verigi veljajo enačbe

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(r)} \, p_{kj}^{(m-r)}.$$

Dokaz: Spomnimo se definicije verjetnosti prehoda v m korakih:

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_m = j | X_0 = i).$$

Tudi ta izraz lahko zapišemo v obliki popolne verjetnosti glede na stanje X_r:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m)} &= \sum_k P(X_n = j, X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_r = k, X_0 = i) P(X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_r = k) P(X_1 = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(r)} \end{aligned}$$

Posledica 1: Naj bo P prehodna matrika markovske verige. Verjetnost prehoda iz stanja i v stanje j v m korakih je enaka elementu v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike P^{m} oziroma

$$\mathrm{P}_{ij}^{(\mathrm{m})} = \{\mathrm{P}^{\mathrm{m}}\}_{ij}.$$

Dokaz: Posledico lahko dokažemo z indukcijo po številu m. Za $m = 1$ nimamo česa dokazovati, saj je matrika P definirana tako, da je sestavljena iz verjetnosti prehoda v enem koraku.

Predpostavimo, da posledica velja za vse prehode dolžin $m-1$ korakov. Vstavimo v enačbo iz zgornjega izreka $r = 1$. Tako dobimo

$$p_{ij}^{(m)} = p_{ik} p_{kj}^{(m-1)}.$$

Elementi p_{ik} po definiciji ustrezajo i-ti vrstici matrike P, elementi $p_{kj}^{(m-1)}$ pa po indukcijski predpostavki j-tem stolpcu matrike P^{m-1}. Verjetnost $p_{ij}^{(m)}$ je torej enaka elementu v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike $\mathrm{PP}^{\mathrm{m}-1} = \mathrm{P}^{\mathrm{m}}$ [9].

2.2.3 Klasifikacija stanj markovske verige

Stanja v markovskih verigah lahko opisujemo glede na možnosti prehajanja med njimi. Za stanje j pravimo, da je dosegljivo iz stanja i, če obstaja $n \geq 0$, da je $p_{ij}(n) > 0$. Stanje i je po definiciji vedno dosegljivo samemu sebi, saj je $p_{ii}(0) = 1$. Stanji i in j sta povezani stanji, če je i dosegljivo iz j in obratno.

Za $n \geq 1$, $p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} p_{ii_1} \dots p_{i_{n-1}j}$ in zato $p_{ij}^{(n)} > 0$, če in samo če obstaja vsaj ena pot $i_1, \dots, i_{n-1}, j$ od i do j takšna, da je $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1}j} > 0$ ali ekvivalentno, če obstaja orientirana pot od i do j v grafu prehodnosti G. Ta relacija je ekvivalenčna relacija, ki generira particijo prostora stanj S v disjunktne ekvivalenčne razrede, imenovane razredi povezanosti [20].

Stanje j imenujemo absorbirajoče, če je $p_{jj} = 1$. Splošneje, množica stanj C je absorbirajoča, če za vsa stanja $j \in C$ velja

$$\sum_{j \in C} p_{ij} = 1.$$

Če markovska veriga pride kdaj v absorbirajoče stanje, ostane od takrat naprej v tem stanju. Če v markovski verigi obstaja en sam ekvivalenčni razred povezanosti, potem je markovska veriga nerazcepna. Pravimo tudi, da sta v tem primeru matrika prehoda P in graf povezanosti G nerazcepna [20].

Perioda d_i, stanja $i \in E$, je po definiciji

$$d_i = gcd\left\{n \in \mathbb{N}; p_{ij}^{(n)} > 0\right\},$$

kjer je D največji skupni delitelj ustrezne množice.

V primeru $d_i = 1$ pravimo, da je stanje i aperiodično.

Naj bo $C_0, \dots, C_{d-1}$ particija razreda stanj E v d razredov. Če za vsak $k, i \in C_k$ velja $\sum_{j \in C_{k+1}} p_{ij} = 1$, kjer je $C_0 = C_d$, potem je d perioda, $C_0, \dots, C_{d-1}$ pa ciklični razredi.

Doslej smo si ogledovali odnose med stanji, sedaj pa si poglejmo posamezna stanja. Naj bo i poljubno stanje markovske verige. Veriga naj bo na začetku v tem stanju in naj bo $p_{ij}^{(n)} = v_i^{(n)}$ verjetnost, da bo veriga na $n-$tem koraku spet v tem stanju. Dogodek, da bo veriga, ki je na začetku v stanju i, po $n-$tem prehodu spet v tem stanju, se lahko zgodi v dveh primerih: ali veriga pride v to stanje že po m prehodih in je po $n-m$ prehodih zopet v tem stanju i ali pa je n čas prve vrnitve v i. Glede na ugotovljeno velja formula [20]:

$$p_{ii}^{(m)} = \sum_{m=1}^{n-1} v_i{}^{(m)} p_{ii}{}^{(n-m)} + v_i{}^{(n)}.$$

Iz te formule dobimo rekurzivno formulo za izračun verjetnosti $v_i{}^{(n)}$

$$v_i^{(n)} = p_{ii}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-1} v_i{}^{(m)} p_{ii}{}^{(n-m)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Verjetnost, da se veriga sploh še kdaj vrne v stanje i je enaka vrednosti vrste $v_i = \sum_{n=1}^{\infty} v_i{}^{(n)}$, povprečni čas prve vrnitve v to stanje pa $m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n\, v_i{}^{(n)}$.

Poglejmo si sedaj nekaj posameznih stanj, ki so odvisna od verjetnosti v oz. povprečnega časa m_i. Stanje i je *minljivo*, če je verjetnost, da se veriga vrne vanj manjša od ena $v_i < 1$; stanje, ki ni minljivo je *povrnljivo*. Pri povrnljivem stanju je torej verjetnost, da se veriga zagotovo kdaj povrne v stanje i enaka ena $v_i = 1$. Če je pri tem povprečni čas vrnitve v stanje i končen $m_i < \infty$ imenujemo to stanje *pozitivno povrnljivo*, če je neskončen $m_i = \infty$, pa *ničelno povrnljivo*.

Ker $p_{ii}^{(n)}$ izračunamo iz verjetnosti $v_i{}^{(n)}$, glede na to verjetnost pa smo definirali povrnljivost in minljivost stanj, lahko neposredno iz prehodnih verjetnosti $p_{ii}^{(n)}$ določimo vrsto stanja[20].

Definicija 7: Pozitivno povrnljivo aperiodično stanje imenujemo *ergodično*.

Trditev 2: Stanje $\boldsymbol{i}$ je minljivo natanko tedaj, kadar je

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

in povrnljivo stanje i je ničelno natanko tedaj, kadar je

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0.$$

Iz zgornjih dveh rezultatov dobimo pogoj za ergodično stanje, ki je izpolnjen natanko tedaj, kadar velja

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = \frac{1}{m_i} > 0.$$

Nerazcepno aperiodično verigo (vsa njena stanja imajo periodo 1), kjer so vsa stanja verige ergodična, imenujemo ergodična veriga [20].

Če sta stanji i in j povezani, potem sta obe povrnljivi ali obe minljivi. V markovski verigi imajo vsa stanja enako naravo: minljivo, povrnljivo ali pozitivno povrnljivo. Da določimo naravo stanj, je potrebno preučiti samo eno stanje. Torej obstajata dve množici stanj: $T -$ množica minljivih stanj in $R -$ množica povrnljivih stanj [20].

Zanima nas povprečni čas vrnitve verige v neko stanje iz nekega drugega stanja. Naj bo veriga v stanju i in stanje j dosegljivo iz stanja i (Za stanje j pravimo, da je dosegljivo iz stanja i, če obstaja $n \geq 0$, da je $p_{ij}(n) > 0$). Naj bo T_{ij} čas prvega prehoda iz i v j. Potem je $v_{ij}(n) = P(T_{ij} = n)$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$ verjetnost dogodka, da bo veriga na koraku n prešla iz stanja i v stanje j, m_j pa povprečni čas prve vrnitve v j [20].

Število obiskov stanja i po nekem določenem času označimo z $N_i = \sum_{n\geq 0} 1_{\{X_n=i\}}$. Porazdelitev N_i za dani $X_0 = j$ in $N_i \geq 1$ je geometrijska, iz česar sledi, da če začnemo v stanju i in se vanj zagotovo vrnemo, potem bomo stanje i obiskali neskončno mnogokrat.

Iz doslej omenjenih rezultatov sledi zanimiv zaključek. V končni nerazcepni markovski verigi ni nobenega ničelno ponovljivega stanja in v njej gotovo niso vsa stanja minljiva. To pomeni, da so vsa stanja v nerazcepni končni verigi pozitivno ponavljiva, če so pa poleg tega še neperiodična, jim pravimo ergodična. Torej je vsaka končna nerazcepna aperiodična veriga ergodična.

Nadalje verjetnostna porazdelitev π je stacionarna porazdelitev markovske verige, če velja

$$\pi^T = \pi^T \mathrm{P}.$$

Z iteracijo ravnotežne enačbe ($\pi(i) = \sum_{j\in E} \pi(j)p_{ij}$) dobimo $\pi^T = \pi^T \mathrm{P}^n, \forall\, n \geq 0$ [20].

Če se veriga začne s stacionarno porazdelitvijo, potem se ta porazdelitev ohranja. Markovsko verigo, pri kateri so porazdelitve vseh x_t enake, imenujemo stacionarna veriga. Že iz osnovnih lastnosti stanj verige lahko ugotovimo ali ima veriga stacionarno porazdelitev [20].

Če so v nerazcepni aperiodični markovski verigi stanja minljiva ali ničelna, za verigo stacionarna porazdelitev ne obstaja. Če pa je veriga ergodična, je za vsak mogoč i in j

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \frac{1}{m_j} = \pi_j, \qquad \text{za vsak } i \in E$$

in je zaporedje $\{\pi_j\}$ za verigo edina stacionarna porazdelitev. Kriterij stacionarne porazdelitve pravi, da je nerazcepna markovska veriga pozitivno povrnljiva natanko tedaj, ko obstaja stacionarna porazdelitev π. Ta porazdelitev je enolično določena. Stacionarna markovska veriga z začetno porazdelitvijo π je obrnljiva, če za vse $i, j \in E$ velja

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ij}.$$

Izkaže se, da je matrika Q, ki je definirana s členi q_{ij}

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j p_{ij}, \qquad za\ vse\ in\ in\ j$$

matrika prehoda začetne verige v primeru, kadar čas teče nazaj [20].
Potenčna matrika glede na matriko prehoda P je matrika

$$G = \sum_{n\geq 0} P^n = I + P + P^2 + \cdots,$$

kjer je splošni element potenčne matrike

$$g_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(1_{\{X_n=j\}}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\right).$$

Vidimo, da je (ij) $-$ti element matrike G povprečno število obiskov stanja j ob pogoju, da veriga začne v stanju i [20].
Iz potenčne matrike se izpelje t. i. kriterij potenčne matrike, ki pravi, da je stanje $i \in E$ povrnljivo natanko tedaj, kadar je $q_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$.
Brez dokaza omenimo ergodijski izrek, ki poda pogoje, ki poskrbijo, da empirična povprečja tipa $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(X_k)$ konvergirajo k verjetnostnim povprečjem.

Izrek 2: Naj bo $\{X_n\}_n \geq 0$ nerazcepna pozitivno povrnljiva markovska veriga s stacionarno porazdelitvijo π in $f\colon E \rightarrow R$ naj bo funkcija, za katero velja $\sum_{i\in E}|f(i)|\pi(i) < \infty$. Potem za vsako nadaljno porazdelitev skoraj zagotovo velja

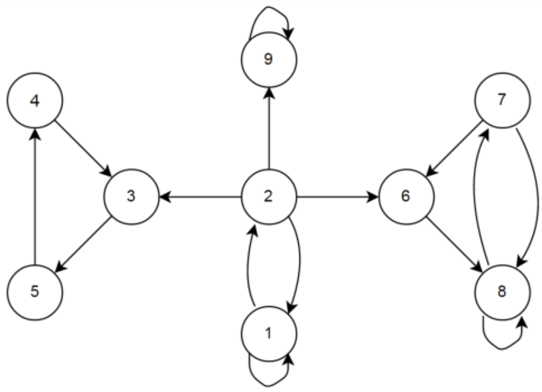
$$\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \sum_{i\in E} f(i)\pi(i) = E\big(f(\pi)\big).$$

Pri proučevanju markovskih verig se pojavijo vprašanja, kakšno je dolgoročno obnašanje verig v primeru poljubne začetne porazdelitve μ, ali bo veriga konvergirala k stacionarni porazdelitvi in na kakšen način [20].
Sedaj pa opišimo še proces združevanja. Za dva stohastična procesa $\{X'_n\}_{n\geq 0}$ in $\{X''_n\}_{n\geq 0}$ z vrednostmi iz istega števnega množice E pravimo, da se združita, če skoraj zagotovo obstaja končen čas τ, da velja

$$n \geq \tau \Rightarrow X'_n = X''_n.$$

Spremenljivko τ imenujemo čas združitve dveh procesov [20].

Zgled: Za zgled si oglejmo markovsko verigo na sliki. Zaradi preglednosti na sliki nisem napisala verjetnostnih prehodov. Vsaka povezava, ki je narisana, ima neničelno verjetnost prehoda med stanjema. Med stanji, kjer povezava ni narisana, pa je verjetnost prehoda enaka 0. Stanji 1 in 2 sta primera minljivih stanj. Stanja 6, 7 in 8 so povrnljiva stanja, ki skupaj tvorijo ekvivalenčni razred. Stanja 3, 4 in 5, ki prav tako tvorijo ekvivalenčni razred, so periodična stanja s periodo 3. Stanje 9 je absorbirajoče [9].



Slika 1 Zgled markovske verige

3 MATEMATIČNA DEFINICIJA IGRALNIH AVTOMATOV

3.1 Kombinacije simbolov

V tem poglavju, nas zanimajo zmagovalne kombinacije na igralnem polju. S t označimo število vseh simbolov na kolutu (lahko rečemo, da je to dolžina koluta) in s p število simbolov $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \dots, \mathrm{S}_\mathrm{p}$ na kolutu. S c_1 označimo število simbolov S_1, s c_2 število simbolov S_2 itd., s c_p število simbolov S_p. Tako je $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} \mathrm{c}_\mathrm{i} = \mathrm{t}$ in $\mathrm{p} \leq \mathrm{t}$.
Za igralce so parametri p, t in $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{p}$ najzanimivejši, saj so nepogrešljivi pri ocenjevanju verjetnosti pojavljanja zmagovalnih kombinacij [1].

Definicija 8: Imenujmo vektor $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ distribucija simbolov $S_1, S_2, \dots, S_p$ na kolutu. Če $c_1 = c_2 = \cdots = c_p$, lahko trdimo, da so simboli enakomerno porazdeljeni na kolutu [1].

Definicija 9: Naj bo $c_1, c_2, \dots, c_p$ porazdelitev p simbolov na kolutu dolžine t. Naj bo funkcija a postavitev simbolov na kolutu, ki preslika množico simbolov na kolutu dolžine t na množico različnih simbolov p, tako da $|\{x | a(x) = S_i\}| = c_i$ za kateri koli i od 1 do p (tj. število zaustavitev simbol S_i po funkciji a je c_i).

Trditev 3: Število možnih postavitev simbolov na kolutu pri dani porazdelitvi je

$$\frac{\mathrm{t}!}{\mathrm{c}_1!\, \mathrm{c}_2! \dots \mathrm{c}_\mathrm{p}!}$$

Če so simboli enakomerno porazdeljeni, postane zgornja formula $\frac{\mathrm{t}!}{(\mathrm{c}!)^\mathrm{p}}$. Če je dodatno c = 1, postane t!, kar je število permutacij na množici s t elementi [1].

3.1.1 Kombinacije s specifičnim simbolom S

Kombinacije pri slot igrah se nanašajo na kombinacije simbolov, ki se pojavljajo na kolutih in na plačilnih linijah. Zmagovalni dobitki, ki so vnaprej definirani, so sestavljeni iz določenega števila simbolov na točno določeni liniji. Zmagovalne dobitke v naprej določi proizvajalec igre.
Vsak kolut ima točno določeno število simbolov p, definiranih kot $S_1, S_2, \dots, S_p$ in število simbolov na kolutu t.
Če predvidevamo enako porazdelitev simbolov na vsakem od n kolutov igre, dobimo t^n možnih kombinacij in p^n možnih kombinacij simbolov na plačilni liniji dolžine n čez n kolutov [1].

Ponavadi koluti pri slot igrah nimajo enake dolžine. V tem primeru ima vsak od n kolutov igre različno število simbolov t_j (za vsak $j = 1, \ldots, n$), kjer je nabor simbolov p_j. V tem primeru imamo $p_1 \times p_2 \times \ldots p_n$ kombinacij simbolov in $\prod_{j=1}^{n} t_j = t_1 t_2 \ldots t_n$ števil kombinacij pri n kolutih [1].

Naj bo:
$\mathrm{N_A}$ - število vseh možnih kombinacij zaustavitev pri primeru A
$\mathrm{N_B}$ - število vseh možnih kombinacij zaustavitev pri primeru B
c_s^n - vektor porazdelitev simbola s na kolutu n
c_s - enakomerna porazdelitev simbola s na vsakem kolutu
m – simbol se pojavi natako m - krat na liniji

Nadalje bomo posplošili formulo za vsak tip upoštevanih kombinacij in jo obravnavali v dveh primerih:

A - Vsi koluti imajo enako porazdelitev simbolov; Vsak simbol S ima enako porazdelitev na posameznem kolutu. To označimo s c_s:

$$\mathrm{N_A} = \mathrm{C_n^m}(\mathrm{c_S})^{\mathrm{m}}(\mathrm{t} - \mathrm{c_s})^{\mathrm{n-m}} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{m!\,(n-m)!}}(\mathrm{c_S})^{\mathrm{m}}(\mathrm{t} - \mathrm{c_S})^{\mathrm{n-m}}$$

B – Koluti imajo različna števila simbolov t_j in vsak simbol S ima različne porazdelitve na kolutih, označeno s c_s^1 na kolutu 1, c_s^2 na kolutu 2, ..., c_s^n na kolutu n.
Z N označimo število možnih kombinacij zaustavitev, z $\mathrm{N'}$ število možnih kombinacij simbolov. Velja [1]

$$\mathrm{N_B} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n}^{n} \mathrm{c_S^{i_1} c_S^{i_2} \ldots c_S^{i_m}} \prod_{1 \le q \le n \; q \ne i_1, i_2, \ldots, i_m} \left(\mathrm{t_q} - \mathrm{c_S^q}\right)$$

Primer:
Kakšno je število vseh možnih kombinacij, simbolov na plačilni liniji dolžine 5, kolutne igre s petnajstimi simboli, s kombinacijami z natanko eno češnjo, če imamo 4 češnje na vsakem kolutu in ima vsak kolut 50 simbolov?

V primeru A in imamo: $\mathrm{p} = 15$, $\mathrm{n} = 5, \mathrm{S} = \text{češnja}$, $\mathrm{t} = 50$, in $\mathrm{c_s} = 4$, $m = 1$. Če nadomestimo te vrednosti v formuli $\mathrm{N_A}$ dobimo:

$$\mathrm{N_A} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{m!\,(n-m)!}}(\mathrm{t} - \mathrm{c_s})^{\mathrm{n-m}} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} \times 4(50-4)^{5-1} = 89.549.120$$

3.2 Dekompozicije spremenljivke vračanja, bonus igre

Čeprav so konfiguracije slot iger postale vedno bolj kompleksne in raznolike, ima slot igra preprost splošen opis in pravila, ki veljajo za vsako slot igro.
Slot igra je v bistvu sestavljena iz določenega števila kolutov, ki se vrtijo neodvisno eden od drugega, na katerih je postavljenih več simbolov v različnih postavitvah in količinah, glede na načrt oblikovalca igre. Vsak kolut ima določeno število pozicij, na katerih se lahko zaustavi – zaustavitev – in vsaki zaustavitvi pripada določen simbol. Na igralnem polju lahko kolut prikaže en simbol, ko se ustavi, obstajajo pa tudi variacije, pri katerih sta skozi eno okence vidna dva, trije ali pa tudi več simbolov [1].
Vidne zaustavitve so razporejene na igralnem polju v določenih konfiguracijah, navadno v pravokotniku/matriki. Vidne so tudi informacije o pravilih igre, skupaj z vrednostjo kredita in razporedom izplačil.
Izid je zmagovalen, če se vnaprej določene kombinacije simbolov pojavijo na eni ali več linijah. Te skupine imajo navadno geometrično konfiguracijo povezav s sosednjimi zaustavitvami, so na isti liniji ali narazen, različnih oblik in velikosti za vsako igro.
Vsaka dobitna kombinacija je točno definirana in ima določeno izplačilo, označeno in vidno v plačilni tabeli. Plačilne linije so tudi označene na ekranu. Njihovo število se razlikuje od ena do nekaj sto, odvisno od števila kolutov in drugih posebnosti igre. Nekatere lahko onemogočimo ali omogočimo na zahtevo igralca za dodaten vstavljen kredit [1].
V tem standardnem opisu igra igralec samostojno. Variacije na zgornji splošni opis iger ali igre z dodatnimi možnostmi lahko dovoljujejo igro proti drugim igralcem za skupno nagrado (kot t. i. progresivne jackpot igre, ki so povezane in vračajo določen delež skupnega dobička kot glavni dobitek (jackpot)) [1].
Kar se tiče strategije, je edina strategija pri kolutih strategija izbiranja – izbira med eno igro ali drugo, izbira med omogočanjem različnih plačilnih linij, izbira med parametri časa in denarja in seveda, izbira med končanjem igranja ali izbira, da sploh ne bomo igrali. V tem pogledu so kolutne igre podobne loteriji. Kriteriji, na katerih temeljijo odločitve za tako strategijo so predvsem subjektivni; obstajajo pa tudi matematični kriteriji, ki so objektivni, temeljijo pa izključno na verjetnosti in pričakovanih vrednostih.
Konfiguracijo slot igre določa njena konfiguracija in postavitev kolutov. Vsaka specifična konfiguracija skupaj z določenimi pravili zahteva edinstveno študijo.
Večina slot iger ima bonus igro kot sestavni del osnovne programske opreme igre. Bonus izplačila najdemo v pomožni tabeli in v kombinaciji z osnovno igro [1].

3.3 Pravila igre

Če želimo preračunati delež vračanja slot igre, potrebujemo informacije o plačilni tabeli, pravila igre in sestavo kolutov. Na trgu igralništva je ogromno slot iger, vsaka od njih pa ima svoja pravila oz. sestavo. Da bi bolje razumeli verjetnosti dobitkov, moramo do potankosti poznati pravila igre in kateri posebni simboli so v igro vključeni. Posebna simbola sta po navadi simbola *wild* in *scatter* simbol. *Wild* ne samo, da nadomesti ostale simbole na liniji, ampak lahko dobitek tudi podvoji, potroji. S simbolom *wild* se poveča verjetnost, da zadenemo dobitno kombinacijo. Simbol *scatter* je dobitni, ko se pojavi kjerkoli na igralnem polju.

Za magistrsko nalogo bom razložila in preračunala slot igro z igralnim poljem velikosti 4 x 5 simbolov, 20 linijami, 11 simboli, od tega je en simbol *wild* in en *scatter*. Dobitne linije se izplačujejo, če se simbol pojavi od leve proti desni razen simbola *scatter*. Slot igra vsebuje osnovno igro in bonus igro. Za dobitek štejejo linije z vsaj tremi enakimi simboli od leve proti desni.

Vsak dobitek je mogoče podvojiti v igri »Gamble«. Pri tej dodatni igri sta na izbiro dve karti, od katerih igralec izbere eno. Če je naključno izbrana karta hkrati karta, ki jo izbere igralec, se dobitek podvoji, v nasprotnem primeru pa igralec izgubi. V primeru zmage se dobitek pomnoži z 2, verjetnost dobitka je ½. Igra »Gamble« nima nobenega vpliva na celoten delež vračanja, ker $2 \times ½ = 1$, tako da tega dela igre pri izračunu ne upoštevamo.

Če se na igralnem polju pojavijo vsaj trije simboli *scatter*, se sproži 10 bonus iger. V bonus igri je mogoče dobiti dodatnih pet bonus iger. Bonus igra ima popolnoma enako plačilno tabelo kot osnovna igra, medtem ko so simboli na kolutih razporejeni drugače. Simbol *scatter* v bonus igri je hkrati simbol »bonus«. V bonus igri se zbirajo točke s pomočjo simbola »bonus«. Če se kjerkoli na igralnem polju pojavi simbol »bonus«, se igralcu dodeli ena točka. Za vsake štiri pridobljene točke, se naključno izbran kolut v bonus igri spremeni v *wild*, ki se pojavi v preostalih nadaljnih igrah. To pomeni:

- s 4 točkami ima igralec en *wild* kolut,
- z 8 točkami ima igralec dodaten *wild* kolut, skupno 2 *wild* koluta,
- z 12 točkami ima igralec dodaten *wild* kolut, skupno 3 *wild* kolute,
- s 16 točkami ima igralec dodaten *wild* kolut, skupno 4 *wild* kolute,
- z 20 točkami ima igralec dodaten *wild* kolut, skupno 5 *wild* kolutov.

Pri tem moramo upoštevati, da se najprej izplačajo dobitki in šele nato se kolut spremeni v *wild*, to pomeni da na primer iz igralnega polja 1 preidemo v igralno polje 2, nato igralno polje 4 in igralno polje 5.

Igralno polje 1

		W		
		W		
		W		
		W		

Igralno polje 2

	W	W		
	W	W		
	W	W		
	W	W		

Igralno polje 3

	W	W		W
	W	W		W
	W	W		W
	W	W		W

Igralno polje 4

4 OPIS PRERAČUNA IGRE MERCURY

Podan delež vračanja bo matematični preračun odstotka izplačil. Igro lahko naknadno prilagodimo na tak način, da je zanimiva za igralce in vseeno dobičkonosna za operaterje. Tri komponente prispevajo k deležu vračanja igre: plačilna tabela, osnovna igra in bonus igra. Z vsako komponento se bomo ukvarjali posebej. Končni odstotek izplačil je preprosto vsota posameznih odstotkov izplačil.

Osnovna igra bo prispevala večinski delež h končnemu odstotku izplačil. Za matematično analizo moramo najprej predvidevati nekaj stvari. Te predpostavke so ključne in vsaka njihova sprememba lahko močno spremeni odstotek vračanja. Predpostavke so naslednje: posamezen element na vsakem kolutu se pojavi enako pogosto. Ta predpostavka pomeni matematično analizo v smislu, da se vsi simboli pojavljajo s točno enako verjetnostjo. Odstopanja od tega so možna, ampak zahtevajo kompleksnejšo analizo ali vprašanja glede načrta igre. Za zdaj bomo predpostavljali, da se vsa števila pojavljajo enako pogosto.

Višina dobička je odvisna od številnih dejavnikov. V prvi vrsti nanj seveda vpliva razporeditev simbolov na igralnem polju. Poleg tega pričakujemo, da je pomembno tudi, koliko in na kaj je igralec stavil. Igra je sestavljena iz petih kolutov. Na vsakem izmed njih so po zavrtljaju vidni štirje simboli. Izid je torej določen z dvajsetimi izžrebanimi simboli oziroma petimi izžrebanimi četvericami simbolov. Osnovni tabeli pri osnovni in bonus igri, s katerima imamo pregled nad sestavo kolutov oz. številom pojavitev simbolov na določenem kolutu, sta prikazani spodaj:

Simbol	**kolut 1**	**kolut 2**	**kolut 3**	**kolut 4**	**kolut 5**
wild	3	3	2	4	6
pic1	5	18	8	14	9
pic2	20	4	10	4	13
pic3	6	19	12	5	7
pic4	6	8	15	11	7
pic5	16	7	7	11	10
ace	19	5	12	13	11
king	7	14	7	13	10
queen	7	6	13	11	10
jack	7	14	11	12	15
scatter	4	2	3	2	2
Skupaj	100	100	100	100	100

Tabela 1 Sestava kolutov v osnovni igri

Simbol	kolut 1	kolut 2	kolut 3	kolut 4	kolut 5
wild	4	3	3	4	5
pic1	4	4	5	12	8
pic2	15	5	6	10	6
pic3	14	5	5	12	10
pic4	4	6	6	12	6
pic5	6	6	18	12	12
ace	6	14	18	10	8
king	15	15	14	4	13
queen	17	18	15	9	10
jack	21	20	6	11	18
scatter	4	4	4	4	4
Skupaj	100	100	100	100	100

Tabela 2 Sestava kolutov v bonus igri

Igralec se poleg višine zastavljenega zneska odloči tudi, na koliko linij bo stavil. Teh je dvajset in na različne načine potekajo po ekranu od leve proti desni. Igralcu dobiček prinesejo le ustrezne kombinacije simbolov, ki se pojavijo na linijah, na katere je stavil. Osnovna (prva) linija poteka po sredini. Zajema torej simbole, ki se na vsakem izmed koles pojavijo na drugem mestu. Ostale linije so linearen zamik osnovne in tako vse zajemajo po pet simbolov, a njihov točen potek ni bistven, saj se bo izkazalo, da niso pomembne za analizo igre.
V nadaljevanju so prikazane možne linije na igralnem polju. Vsaka linija vsebuje samo eno mesto na posameznem kolutu z leve proti desni. Prva linija se začne v levem gornjem kotu.

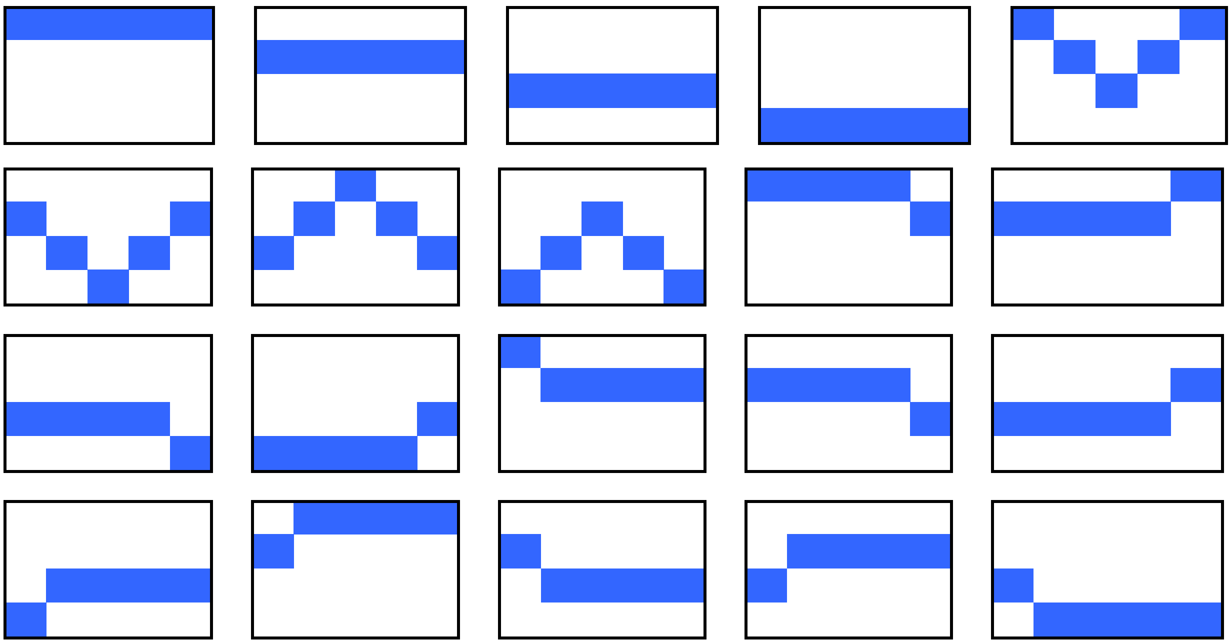


Tabela 3 Plačilne linije

Igra ima enajst različnih simbolov, ki prinašajo različne dobičke. V spodnji plačilni tabeli so prikazani vsi simboli s svojimi imeni in faktorji, s katerimi se, če pride do navedenega števila od leve neprekinjenih pojavitev na ustrezni liniji, znesek, ki smo ga stavili, pomnoži.

Dobitek / Simbol	**5x**	**4x**	**3x**	**2x**
wild	500	250	100	0
pic1	250	100	50	0
pic2	250	100	50	0
pic3	100	50	15	0
pic4	100	50	15	0
pic5	100	50	15	0
ace	50	25	10	0
king	50	25	10	0
queen	25	10	5	0
jack	25	10	5	0
scatter	0	0	0	0

Tabela 4 Plačilna tabela

Potrebno je poudariti, da za ugoden izid ni dovolj, da se ustrezna kombinacija simbolov brez prekinitve pojavi na liniji, na katero smo stavili, temveč se mora ta kombinacija začeti na skrajni levi strani linije. V nadaljevanju sledijo primeri izidov, kjer moramo biti pozorni.

Primer:

A	Q	K	J	J
K	K	K	J	J
A	Q	Q	Q	T
S	S	J	K	A

Q	Q	Q	A	A
K	K	K	J	J
Q	Q	Q	A	T
S	S	J	K	A

Če smo stavili le eno denarno enoto na označeno linijo, nam prvi izid ne prinese nobenega dobička, drugi pa 5 denarnih enot (glej plačilno tabelo). Trije simboli v drugi vrstici ne doprinesejo ničesar, saj nisto na liniji, na katero smo stavili.

A	W	W	W	T
K	K	K	J	J
A	K	W	W	T
S	S	J	K	A

Prva posebna lastnost simbola *wild* je nadomeščanje ostalih simbolov. Dobiček zgornjega izida je enak 25 denarnih enot, če stavimo na označeno linijo.

W	W	W	A	T
K	K	K	J	J
S	S	J	K	A
A	Q	K	K	A

Gornji primer vsebuje tri simbole *wild*, na četrtem kolutu pa je simbol A. Taki primeri so posebeni, ker moramo upoštevati, katera kombinacija izplača več. Če smo stavili le eno denarno enoto na označeno linijo, je naš dobiček 100 denarnih enot, ker se v tem primeru upošteva 3-krat simbol *wild* in ne 4-krat simbol A.

W	W	W	Pic1	T
K	K	K	J	J
1	1	J	K	A
S	1	K	A	A

Drugi poseben primer je 4-krat simbol Pic1, kjer je izplačilo enako izplačilu 3-krat simbol *wild*. V samem preračunu ni večjega pomena, pri vizualizaciji dobitne linije pa je vidna dobitna kombinacija 4-krat simbol Pic1.
Igra je v grobem sestavljena iz dveh delov, in sicer iz osnovne igre in bonus iger (angl. »free spin«). Osnovna igra zajema do zdaj opisano, bonus igre pa so tisti bolj kompleksen del, ki z vidika verjetnosti in pa tudi igranja naredi igro zanimivo. Ta del lahko prinese zelo velike dobičke, vanj pa vstopimo preko simbola *scatter*. Če se kjerkoli na ekranu pojavijo vsaj trije simboli *scatter*, igra prestopi v bonus igre. V bonus igrah igralec ne more ničesar izgubiti. Lahko si predstavljamo, da so del vrtljaja v osnovni igri, preko katerega je igra

prešla v bonus igre. Sledi deset vrtljajev, ki se izvedejo samodejno. V vsakem izmed njih so zneski in linije, na katere stavimo, enaki tistim v vrtljaju, preko katerega igra preide v bonus igre. V primeru, da se v bonus igrah ponovno pojavijo vsaj trije simboli *scatter*, dobimo dodatnih 5 bonus iger. Sama bonus igra temelji na zbiranju simbolov *scatter*: ko zberemo štiri simbole *scatter*, se v naslednji igri pojavi en naključno izbran kolut, ki je *wild*. Ta kolut ostane *wild* do konca bonus igre, pri tem pa dobimo še eno dodatno bonus igro.

Dodatek

Poseben primer dobitnih linij so kombinacije, kjer se pojavijo simboli brez prekinitve iz leve strani proti desni, z desne strani proti levi in kombinacije na sredini igralnega polja. Za boljše razumevanje si poglejmo spodnje igralno polje.

K	K	K	J	J
A	W	T	W	T
1	1	J	K	A
A	1	1	K	J

V gornjem igralnem polju imamo na drugi, trinajsti in devetnajsti liniji štirikrat simbol T, na prvi in deveti liniji dobitek trikrat simbol K, na dvajseti liniji ponovno trikrat simbol 1 in na peti liniji štirikrat simbol J.

4.1 Pričakovana vrednost igre

4.1.1 Osnovna igra

V grobem se bomo računanja pričakovane vrednosti igre lotili v dveh delih. Najprej bomo izračunali pričakovano vrednost osnovne igre, za tem pa še pričakovano vrednost bonus iger. Igralni avtomat izid posameznega vrtljaja na vsakem kolesu določa s pomočjo generiranja naključnih števil v mejah dolžine koluta. Za vse izračune bomo predpostavili, da so generirana števila neodvisne diskretne slučajne spremenljivke z enakomerno porazdelitvijo na množici $\{1,2,3,\dots m\}$, kjer je m dolžina koluta. Tako je vsak simbol izbran z enako verjetnostjo. Če ima prvi kolut dolžino 100, je vsak simbol izbran z verjetnostjo 1/100. Omenimo, da se v tem primeru ob izbiri števila 100 v prvem stolpcu pojavijo simboli, ki so v prvem kolesu na mestih 100, 1 in 2. Prav tako bomo predpostavili, da generiranje števil na posameznem kolutu poteka neodvisno od generiranja na ostalih. V Prilogi 1 so prikazani koluti osnovne igre.

Pričakovano vrednost igre lahko računamo za primer, ko igralec stavi le eno denarno enoto na osnovno linijo. Če na osnovno linijo stavi več, je njegov dobiček v primeru ugodnega izida seveda večji, a je tudi izguba večja, če izid ni ugoden. Prav tako je dovolj opazovati osnovno linijo, saj so vse ostale le njen linearen zamik. Na njih torej do ugodnega izida pride z enako verjetnostjo kot na osnovni. Igralec bi lahko stavil tudi na več linij, s čimer bi povečal verjetnost za dobiček, a bi ponovno moral večji znesek tudi vložiti. Matematično gledano za vsem skupaj stoji linearnost pričakovane vrednosti. Staviti na vseh deset linij je enako kot desetkrat staviti na osnovno, oziroma staviti na osnovno deset denarnih enot namesto ene. Podobno lahko stavo *n*-tih denarnih enot na osnovno linijo enačimo z *n*-timi stavami ene denarne enote na osnovno linijo. Odmislimo lahko tudi del igre, imenovan »Gamble«, ker smo utemeljili, da ne vpliva na pričakovano vrednost. S pomočjo ugibanja barve karte lahko namreč igralec z verjetnostjo 0.5 svoj dobiček podvoji, a ga lahko z enako verjetnostjo tudi izgubi.

Za izračun pričakovane vrednosti osnovne igre je potrebno obravnavati vse možne izide na osnovni liniji in upoštevati njihove verjetnosti ter dobičke, ki jih prinesejo. Paziti moramo na simbol *scatter* obravnavane igre, ki prinaša dobiček, tudi če se v ustreznem številu pojavi izven osnovne linije.

Označimo doprinos k pričakovani vrednosti igre, ki ga dobimo s strani simbola *scatter* v osnovni igri z $\mathrm{E(scatter)}$. Simbol *scatter* obravnavamo v treh delih. Ločimo primere, ko se pojavi natanko trikrat, natanko štirikrat in natanko petkrat. Pri računanju doprinosa običajnih dobičkov (dobičkov na osnovni liniji) bomo morali paziti, da dogodkov s tremi ali več simboli *scatter* na osnovni liniji ne bomo šteli ponovno. Podrobneje opišimo izračun doprinosa k pričakovani vrednosti za primer štirih simbolov *scatter*. Iz kolutov osnovne igre je razvidno, da se na nobenem kolutu ne moreta pojaviti dva (ali več) simbola *scatter* hkrati, saj so na vsakem kolesu simboli *scatter* razmaknjeni za več kot štiri mesta.

Če s $\mathrm{scatter\_4}$ označimo dogodek, ko se na ekranu pojavijo natanko štirje simboli *scatter*, je particija dogodka $\mathrm{scatter\_4}$ (oziroma množice izidov, ki jo zajema dogodek $\mathrm{scatter\_4}$) sestavljena iz naslednjih dogodkov:

$$\mathrm{H_i} = (\text{izključno na } i - \text{tem kolutu se ne pojavi simbol scatter}) \text{ za i} = 1,2,3,4,5.$$

Velja torej spodnja enakost.

$$\mathrm{P(scatter\_4)} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{p(H_i)} \; za \; \forall \, i = 1,2,3,4,5.$$

Izračunajmo verjetnost dogodka $\mathrm{H_5}$. To storimo s preštevanjem ugodnih izidov. Na petem kolutu se ne sme pojaviti simbol *scatter*. Torej število ugodnih izidov na petem kolutu dobimo tako, da od vseh možnih izidov odštejemo tiste, v katerih se pojavi simbol *scatter*. Vidimo, da sta na petem kolutu dva simbola *scatter*. Neugodnih izidov je torej naslednjih 8:

king, pic2, king, scatter
pic2, king, scatter, ace
king, scatter, ace, pic2
scatter, ace, pic2, pic5
jack, pic3, pic4, scatter
pic3, pic4, scatter, ace
pic4, scatter, ace, pic2
scatter, ace, pic2, pic2

Ker je dolžina koluta 100, je ugodnih izidov 92. Na vseh ostalih kolesih se mora pojaviti simbol *scatter*. To drži, če so simboli *scatter* več kot 4 pozicije narazen. Število načinov, kako se lahko na posameznem kolutu to zgodi, dobimo tako, da število simbolov *scatter* na tem kolutu pomnožimo s 4, saj je lahko simbol *scatter* na kateremkoli izmed štirih mest. Na prvem kolutu so štirje, na drugem sta dva, na tretjem so trije in na četrtem sta dva simbola *scatter*. Z upoštevanjem dolžin koles dobimo vse možne izide in izračunamo verjetnost dogodka H_1.

$$P(H_5) = \frac{16 \times 8 \times 12 \times 8 \times 92}{100^5} = 0{,}0001130496$$

Izračunajmo verjetnosti dogodka 3-krat simbol *scatter*. Pomagamo si lahko s particijo danega dogodka.

$$P(\text{scatter\_3}) = \sum_{i,j} P(H_{i,j})$$

Pri tem $H_{i,j}$ označuje dogodek ne pojavitve simbola *scatter* natanko na i-tem in j-tem kolutu. Vsota je sestavljena iz desetih členov. Izmed petih kolutov moramo namreč izbrati dva, na katerih ne bo simbola *scatter*, kar pa lahko storimo ravno na $\binom{5}{2}$ načinov.

$$P(H_{4,5}) = \frac{16 \times 8 \times 12 \times 92 \times 92}{100^5} = \frac{13.000.704}{10.000.000.000} = 0{,}0013000704$$

$$P(H_{3,5}) = \frac{16 \times 8 \times 88 \times 8 \times 92}{100^5} = \frac{8.290.304}{10.000.000.000} = 0{,}0008290304$$

$$P(H_{2,5}) = \frac{16 \times 92 \times 12 \times 8 \times 92}{100^5} = \frac{13.000.704}{10.000.000.000} = 0{,}0013000704$$

$$P(H_{1,5}) = \frac{84 \times 8 \times 12 \times 8 \times 92}{100^5} = \frac{5.935.104}{10.000.000.000} = 0{,}0005935104$$

$$P(H_{3,4}) = \frac{16 \times 8 \times 88 \times 92 \times 8}{100^5} = \frac{8.290.304}{10.000.000.000} = 0{,}0008290304$$

$$P(H_{2,4}) = \frac{16 \times 92 \times 12 \times 92 \times 8}{100^5} = \frac{13.000.703}{10.000.000.000} = 0{,}0013000703$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_{1,4}) = \frac{84 \times 8 \times 12 \times 92 \times 8}{100^5} = \frac{5.935.104}{10.000.000.000} = 0{,}0005935104$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_{2,3}) = \frac{16 \times 92 \times 88 \times 8 \times 8}{100^5} = \frac{8.290.304}{10.000.000.000} = 0{,}0008290304$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_{1,3}) = \frac{84 \times 8 \times 88 \times 8 \times 8}{100^5} = \frac{3.784.704}{10.000.000.000} = 0{,}0003784704$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_{1,2}) = \frac{84 \times 92 \times 12 \times 8 \times 8}{100^5} = \frac{5.935.104}{10.000.000.000} = 0{,}0005935104$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{scatter\_3}) &= \mathrm{P}(\mathrm{H}_{4,5}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{3,5}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{2,5}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{1,5}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{3,4}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{2,4}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{1,4}) \\ &\quad + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{2,3}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{1,3}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_{1,2}) = \\ &= \frac{85.463.040}{10.000.000.000} = 0{,}0085463040\end{aligned}$$

Podobno izračunamo še verjetnosti dogodkov $\mathrm{H_i}$ za $\mathrm{i} = 1,2,3,4$ in dobimo

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{scatter\_4}) &= \mathrm{P}(\mathrm{H}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_4) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_5) = \\ &= \frac{4.628.480}{10.000.000.000} = \\ &= 0.0004628480\end{aligned}$$

Sledi preračun za kombinacije 5-krat simbol *scatter*.

$$\mathrm{P}(\mathrm{scatter\_5}) = \frac{16 \times 8 \times 12 \times 8 \times 8}{100^5} = \frac{98.304}{10.000.000.000} = 0{,}0000098304$$

Dobili smo verjetnost dogodka, ko se na ekranu pojavijo natanko trije simboli *scatter*. Za izračun doprinosa tega dela igre k pričakovani vrednosti celotne igre moramo ponavadi dobljeno verjetnost še pomnožiti z dobičkom, ki ga obravnavani izid prinese. V našem primeru pa se pojavitve simbola *scatter* uporabljajo samo za vstop v bonus igro.

Opomba: Pričakovano vrednost smemo zaradi linearnosti računati »po delih«. To bomo neprestano uporabljali, a tega ne bomo več poudarjali.

Izračunajmo še doprinos običajnih dobičkov. Osredotočimo se na osnovno linijo in upoštevamo, da se mora ustrezno število simbolov pojaviti na začetku linije. Pri tem odmislimo morebiten dobiček zaradi *scatter* simbola te igre. Še vedno moramo seveda upoštevati, da igra vsebuje simbol *wild*. Oglejmo si potek izračuna na konkretnem izidu.

Izračunajmo kot primer pričakovano vrednost doprinosa simbola AAAAA. Preštejemo, na koliko načinov se lahko na vseh petih kolesih na osnovni liniji pojavi simbol A. Število načinov je enako zmnožku števil simbolov A na posameznem kolutu, verjetnost danega izida pa dobimo, če dobljeno delimo s številom vseh možnih izidov.

$$\mathrm{P(AAAAA)} = \frac{19 \times 5 \times 12 \times 13 \times 11}{100^5} = \frac{163.020}{10.000.000.000} = 0{,}0000163020$$

V preračunu so doprinosi za posamezen simbol preračunani z upoštevanjem vseh dobitnih kombinacij. Najprej so kombinacije za zmagovalno linijo s petimi simboli, nato s štirimi in nazadnje s tremi simboli. Pričakovano vrednost sem razdelila na primere, kjer se simbol *wild* pojavi in kjer se ne pojavi. V slednjem primeru imamo za doprinos posameznega simbola 6 primerov, kjer upoštevamo število simbolov na posamezni liniji in pojavitev simbolov *wild*.

S pomočjo spodnjih tabel sem preračunala število dobitkov brez simbola *wild*, v drugi tabeli s simbolom *wild*.

Simbol	Dobitek 5x	Dobitek 4x	Dobitek 3x
wild	432	5.184	133.488
pic1	90.720	856.800	5.904.000
pic2	41.600	259.200	7.360.000
pic3	47.880	595.080	12.448.800
pic4	55.440	689.040	6.120.000
pic5	86.240	724.416	6.664.000
ace	163.020	1.230.060	9.462.000
king	89.180	749.112	5.693.800
queen	60.060	504.504	4.641.000
jack	194.040	1.021.944	9.055.200

Tabela 5 Število dobitnih kombinacij v osnovni igri brez simbola *wild*

Simbol	Dobitek 5x	Dobitek 4x	Dobitek 3x
pic1	362.448	1.707.480	7.724.400
pic2	251.632	986.904	10.248.800
pic3	275.508	1.561.302	12.612.600
pic4	271.809	1.483.785	8.032.500

pic5	323.008	1.407.504	7.718.000
ace	543.874	2.221.246	10.839.800
king	322.084	1.410.024	6.855.800
queen	259.620	1.173.816	6.681.000
jack	542.472	1.748.744	9.357.600

Tabela 6 Število dobitnih kombinacij v osnovni igri s simbolom *wild*

Spodnja tabela prikazuje doprinos posameznega simbola v osnovni igri.

Simbol	Dobitek 5x	Dobitek 4x	Dobitek 3x
pic1	0,0022%	0,0130%	0,1335%
pic2	1,1329%	2,5643%	6,8142%
pic3	0,7331%	1,2461%	8,8044%
pic4	0,3234%	1,0782%	3,7592%
pic5	0,3272%	1,0864%	2,1229%
ace	0,4092%	1,0660%	2,1573%
king	0,3534%	0,8628%	2,0302%
queen	0,2056%	0,5398%	1,2550%
jack	0,0799%	0,1678%	0,5661%

Tabela 7 doprinos posameznega simbola v osnovni igri

Tako za doprinos dobičkov k pričakovani vrednosti celotne igre dobimo

$$\mathrm{E}(\text{osnovna igra}) = 0{,}412159438,$$

ki ga dobimo s pomočjo formule

$$\sum \frac{\text{število ugodnih kombinacij posameznega izida}}{\text{število vseh kombinacij}} \times \text{ dobitni znesek)}$$

4.1.2 Bonus igre

Preden se lotimo izračuna pričakovane vrednosti doprinosa bonus iger, moramo določiti dve verjetnosti, ki ju bomo pri tem potrebovali. Gre za verjetnost vstopa v bonus igre iz osnovne igre in verjetnost vstopa v bonus igre znotraj bonus iger.

Kakšna je verjetnost za vstop v bonus igre iz osnovne igre, smo že izračunali. Ta dogodek je namreč enak pojavitvi vsaj treh simbolov *scatter* na celotnem ekranu. Ta dogodek smo označili s $\mathrm{P(trigger)}$. Verjetnost za vstop v bonus igre iz osnovne igre izračunamo takole:

$$\begin{aligned}\mathrm{P(trigger)} &= \mathrm{P(scatter\_3)} + \mathrm{P(scatter\_4)} + \mathrm{P(scatter\_5)} \\ &= 0{,}0090190\end{aligned}$$

Koluti v bonus igrah se razlikujejo od kolutov v osnovni igri. Sestava kolutov je prikazana v pilogi. Pričakovati je seveda tudi, da je verjetnost za vstop v bonus igre znotraj bonus iger drugačna od verjetnosti za vstop v bonus igre iz osnovne igre.

Ponovimo še enkrat pravila bonus igre, ki so ključnega pomena pri preračunavanju verjetnosti za ponoven vstop v bonus igro. V bonus igri ima simbol *scatter* posebno vlogo in ga smatramo kot bonus oz. super simbol. Z vsako pojavitvijo simbola *scatter* na igralnem polju nabiramo točke. Ko naberemo 4 točke, se naključni kolut spremeni v kolut *wild*. Z vsakimi dodatnimi štirimi simboli *scatter* se naključen dodaten kolut spremeni v kolut *wild*.

Primer:

		W		
		W		
		W		
		W		

W		W		
W		W		
W		W		
W		W		

W		W	W	
W		W	W	
W		W	W	
W		W	W	

W		W	W	W
W		W	W	W
W		W	W	W
W		W	W	W

Paziti moramo na zaporedje evaluacije dobitkov, to pomeni da ko naberemo zadostno število simbolov *scatter*, se najprej naključni kolut spremeni v *wild* in šele nato začnemo z izračunom pričakovanih dobitkov.
Preračun bonus igre sem razdelila na 32 različnih kombinacij kolutov. Upoštevati moramo, da se sestava kolutov spreminja glede na število in postavitev *wild* kolutov. Z »0« so označeni koluti, kjer se simboli pojavljajo naključno, z »W« pa fiksni *wild* koluti. Vsi deleži vračanja so preračunani povsem enako kot je opisano v poglavju 4.1.1, s tem da določeni koluti (v mojem primeru koluti z oznako »W«) vsebujejo samo simbol *wild*. V našem primeru imamo 2^5 različnih kombinacij kolutov z 32 različnimi deleži vračanja, ki so razvidni v spodnji tabeli:

Kombinacija kolutov	**Delež vračanja**
00000	33,397 %
0000W	42,190 %
000W0	77,278 %
000WW	142,383 %
00W00	253,295 %
00W0W	323,832 %
00WW0	579,071 %
00WWW	1.082,000 %
0W000	267,020 %
0W00W	342,676 %
0W0W0	620,219 %

Kombinacija kolutov	Delež vračanja
0W0WW	1.151,750 %
0WW00	1.987,240 %
0WW0W	2.589,200 %
0WWW0	4591,200 %
0WWWW	8.650,000 %
W0000	255,381 %
W000W	326,268 %
W00W0	587,829 %
W00WW	1.091,250 %
W0W00	1.823,625 %
W0W0W	2.364,400 %
W0WW0	4.147,000 %
W0WWW	7.850,000 %
WW000	2.140,663 %
WW00W	2.782,000 %
WW0W0	4.943,450 %
WW0WW	9.275,000 %
WWW00	11.049,000 %
WWW0W	14.900,000 %
WWWW0	26.250,000 %
WWWWW	50.000,000 %

Tabela 8 Deleži vračanja vseh kombinacij bonus iger glede na postavitev *wild* koluta

Natančneje razložimo delež vračanja kombinacije kolutov: W00W0. V tem primeru je razporeditev simbolov naslednja:

Simbol	Kolut 1	Kolut 2	Kolut 3	Kolut 4	Kolut 5
wild	4	3	3	4	5
pic1	0	4	5	0	8
pic2	0	5	6	0	6
pic3	0	5	5	0	10
pic4	0	6	6	0	6
pic5	0	6	18	0	12
ace	0	14	18	0	8
king	0	15	14	0	13
queen	0	18	15	0	10
jack	0	20	6	0	18
scatter	0	4	4	0	4

Tabela 9 Sestava kolutov pri W00W0

V spodnjih tabelah sem preračunala število dobitkov brez simbola *wild* in s simbolom *wild*. Glede na to, da je prvi kolut wild, pomeni da nimamo kombinacije, ki bi hkrati vsebovala simbol in wild hkrati. Zaradi tega spodnja tabela vsebuje v večini primerov samo ničle.

Simbol	Dobitek 5x	Dobitek 4x	Dobitek 3x
wild	720	11.664	0
pic1	0	0	0
pic2	0	0	0
pic3	0	0	0
pic4	0	0	0
pic5	0	0	0
ace	0	0	0
king	0	0	0
queen	0	0	0
jack	0	0	0
scatter	0	0	65.536

Tabela 10 Število dobitnih kombinacij brez simbola wild

Simbol	Dobitek 5x	Dobitek 4x	Dobitek 3x
pic1	10.928	65.424	0
pic2	11.952	89.712	0
pic3	13.200	74.800	0
pic4	12.672	102.528	0
pic5	48.960	239.040	0
ace	72.384	484.416	0
king	85.536	389.664	0
queen	88.560	501.840	0
jack	72.864	243.936	0

Tabela 11 Število dobitnih kombinacij s simbolom wild

S pomočjo plačilne tabele in formule

$$\sum \frac{\text{število kombinacij posameznega izida}}{\text{število vseh kombinacij}} \times \text{ dobitni znesek)}$$

lahko pridemo do rezultata 587,828500%.

Verjetnost za dodatne bonus igre znotraj bonus iger računamo na enak način kot pri vstopu v bonus igre iz osnovne igre. Dogodek pojavitve vsaj treh »scatterjev« v bonus igrah (to je vstop v bonus igre znotraj bonus iger) razdelimo na tri disjunktne dogodke – pojavijo se natanko tri, natanko štiri oziroma natanko pet simbolov *scatter*. Če te dogodke zopet označimo s $\mathrm{P(scatter\_3)}$, $\mathrm{P(scatter\_4)}$ in $\mathrm{P(scatter\_5)}$, velja:

$$\mathrm{P(retrigger)} = \mathrm{P(scatter\_3)} + \mathrm{P(scatter\_4)} + \mathrm{P(scatter\_5)}$$

Na enak način, kot smo računali verjetnosti v osnovni igri, se lahko lotimo tudi izračuna verjetnosti za pojavitev simbolov *scatter* v bonus igri. V primeru, ko nimamo *wild* kolutov, je končni rezultat

$$\mathrm{P(retrigger)} \ = \ 0{,}0317587456$$

Verjetnost za vstop v bonus igre znotraj bonus iger je torej precej večja od verjetnosti za vstop v bonus igre iz osnovne igre. Doprinos gnezdenja bonus iger k pričakovani vrednosti celotne igre torej ne bo zanemarljiv, kot se morda sprva zdi.

Verjetnosti pojavitev simbola *scatter* so v preračunu razdeljene glede na število *wild* kolutov. 32 preračunov posameznih deležev vračanja lahko razdelimo na sledeč način:
0 *wild* kolutov = 1 različica kolutov
1 *wild* kolut = 5 različic kolutov
2 *wild* koluta = 10 različic kolutov
3 *wild* koluti = 10 različic kolutov
4 *wild* koluti = 5 različic kolutov
5 *wild* kolutov = 1 različica kolutov
Za preračun verjetnosti vstopa v dodatne bonus igre lahko uporabimo povprečno vrednost pojavitev »scatterjev« v določeni različici, saj je število simbolov *scatter* na vsakem kolutu enako verjetno in je dolžina kolutov enaka, to je 100. Iz te predpostavke sledi spodnja tabela:

Št. fiksnih kolutov	**število *scatter* simbolov, ki se lahko pojavijo na igralnem polju**					
	5	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
0	0,00010485	0,00275251	0,02890137	0,15173222	0,39829708	0,4182119
1	0	0,00065536	0,01376256	0,10838016	0,37933056	0,4978713
2	0	0	0,00409600	0,06451200	0,33868800	0,5927040
3	0	0	0	0,02560000	0,26880000	0,7056000
4	0	0	0	0	0,16000000	0,8400000
5	0	0	0	0	0	1,0000000

Tabela 12 Verjetnostna tabela v bonus igri glede na pojavitev simbola *scatter*

Vsota posamezne vrstice (glede na število *wild* kolutov) je 1. S tem dokazujemo, da so verjetnosti preračunane pravilno, saj vsebujejo celoten nabor kombinacij.

Gornja tabela prikazuje verjetnosti pojavitev simbola *scatter* v primerih, ko imamo od nič do 5 *wild* kolutov. Uporabljajo se v preračunih, kjer je potrebno upoštevati:

- verjetnosti pojavitev simbolov *scatter* pri akumuliranju »scatterjev«, s katerimi dobimo dodaten *wild* kolut,
- verjetnosti za dodatne bonus igre, če se na igralnem polju pojavijo vsaj trije simboli *scatter*.

Zdaj se lahko posvetimo izračunu pričakovane vrednosti bonus iger. Pričakovano vrednost bonus iger označimo z $\mathrm{E_{bonus}}$.

Račun bo potekal v dveh delih. Najprej bomo izračunali doprinos običajnih dobičkov. To so dobički, kakršne smo obravnavali že v osnovnem delu igre. Gre torej za dobičke na osnovni liniji in za dobičke, ki jih prinese posemezen simbol. V drugem delu bomo upoštevali, da lahko znotraj bonus iger vstopimo v dodatne bonus igre. Pišemo lahko torej:

$$E(bonus\ igra) = E(bonus\ osnova) + E(bonus\ gnezdenje)$$

Glede na opisano teorijo v poglavju 2.2, je gornja tabela prehodna matrika P. Zaradi kompleksnosti igre, sem pri preračunu uporabila macro v Visual Basicu, kjer s pomočjo prehodne matrike P (matrika `scatterProb`) preračunam vse nadaljne korake s pomočjo sledeče kode:

```
nachher(i - 1, j) = nachher(i - 1, j) + vorher(i, j) * scatterProb(0, 0)
nachher(i - 1 + inc1, j + 1) = nachher(i - 1 + inc1, j + 1) + vorher(i, j) * scatterProb(0, 1)
nachher(i - 1 + inc2, j + 2) = nachher(i - 1 + inc2, j + 2) + vorher(i, j) * scatterProb(0, 2)
nachher(i - 1 + inc3 + retrigger, j + 3) = nachher(i - 1 + inc3 + retrigger, j + 3) + vorher(i, j) * scatterProb(0, 3)
nachher(i - 1 + inc4 + retrigger, j + 4) = nachher(i - 1 + inc4 + retrigger, j + 4) + vorher(i, j) * scatterProb(0, 4)
nachher(i - 1 + inc5 + retrigger, j + 5) = nachher(i - 1 + inc5 + retrigger, j + 5) + vorher(i, j) * scatterProb(0, 5)
```

V nadaljevanju sledi podrobnejši opis začetnih bonus iger.

4.1.2.1 Bonus osnova

Pristop je enak kot v osnovni igri. Lotimo se zopet najprej simbola pic1. Izračunajmo doprinos natanko petih pojavitev simbola pic1. Preštejemo, na koliko načinov se lahko na vseh petih kolesih na osnovni liniji pojavi simbol pic1. Število načinov je enako zmnožku števil simbolov a na posameznem kolutu, verjetnost danega izida pa dobimo, če dobljeno delimo s številom vseh možnih izidov.

$$\mathrm{P(5pic1)} = \frac{4 \times 4 \times 5 \times 12 \times 8}{100^5} = \frac{7.680}{10.000.000.000} = 0{,}000000768$$

Iz plačilne tabele vidimo, da nam pet pojavitev simbola pic1 prinese dobiček 250 denarnih enot. Pričakovana vrednost dogodka $\mathrm{E(pic1)}$ brez simbola *wild* je potemtakem

$$\mathrm{E(5pic1) = P(5pic1) * 250 = 0{,}000192}$$

Na koncu za doprinos k pričakovani vrednosti s strani simbola pic1 obravnavane igre dobimo

$$\mathrm{E(pic1) = E(3pic1) + E(4pic1) + E(5pic1) = 0{,}025726480}$$

Opomba: Zgornji rezultat se nam upravičeno zdi zelo velik. Pri izračunu vseh pričakovanih vrednosti v bonus igrah se bomo namreč za začetek pretvarjali, da smo že vstopili v bonus igre in da igramo le eno bonus igro. Nato bomo na koncu rezultat pomnožili z verjetnostjo, da v bonus igre vstopimo. Prav tako bomo rezultat pomnožili še z 10, saj so bonus igre vedno sestavljene iz desetih vrtljajev. Ta izračun je enakovreden izračunu, v katerem v vsakem delu posebej upoštevamo zgornje faktorje.

Za doprinos k pričakovani vrednosti s strani običajnih dobičkov v bonus igri uporabljamo enake postopke kot pri osnovni igri, s tem da se v bonus igrah upoštevajo tudi *wild* koluti, tako da imamo 32 različnih možnosti preračunov.
Za lažje razumevanje bom v nadaljevanju uporabljala kratico FG za bonus igre.

4.1.2.2 Prva bonus igra

Preračun prve bonus igre je relativno enostaven, saj v osnovi uporabljamo enak sistem kot v osnovni igri. Že takoj pa se pojavi verjetnost, da lahko v prvi igri dobimo vsaj en simbol *scatter*. Te verjetnosti so pomembne za dodatne bonus igre in posledično vplivajo na končni rezultat.

V primeru zbiranja simbolov *scatter* obravnavamo naslednje opcije:

- z enim, dvema ali tremi simboli *scatter* na igralnem polju se evaluacija dobitkov ne spremeni. Število simbolov *scatter* pa si »zapomnimo«, saj z dodatnimi simboli *scatter* v naslednji igri lahko dobimo prvi dodaten *wild* kolut;
- s štirimi ali petimi simboli *scatter* smo si priigrali prvi naključen *wild* kolut, ki se pojavi v naslednji bonus igri, poleg tega pa še dodatno bonus igro.

V primeru simbolov *scatter* kot dodatne bonus igre obravnavamo naslednje opcije: s tremi, štirimi ali petimi simboli *scatter* dobimo 5 dodatnih bonus iger.
Poglejmo si naslednji primer oziroma naslednje verjetnosti pojavitve simbola *scatter*. Vse verjetnosti so prikazane v gornji tabeli.
Verjetnost, da imamo v prvi bonus igri štiri ali pet simbolov *scatter*, s katerimi pridobimo v naslednji igri prvi *wild* kolut, je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(45\mathrm{scatter}) &= \mathrm{P}(4\mathrm{scatter}) + \mathrm{P}(5\mathrm{scatter}) \\ &= 0{,}0027525120 + 0{,}0001048576 \\ &= \ 0.0028573696\end{aligned}$$

Verjetnosti lahko ponazorimo v tabeli:

Število *scatter* simbolov	**Bonus igra**
0	0,41821194
1	0,39829708
2	0,15173222
3	0,02890137
4	0,00275251
5	0,00010485

Tabela 13 Verjetnosti pojavitev simbola *scatter* v prvi bonus igri

Verjetnost, da v prvi bonus igri dobimo 5 dodatnih bonus iger, je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(345\mathrm{scatter}) &= \mathrm{P}(3\mathrm{scatter}) + \mathrm{P}(4\mathrm{scatter}) + \mathrm{P}(5\mathrm{scatter}) \\ &= 0{,}0289013760 + 0,0027525120 + 0{,}0001048576 \\ &= 0{,}0317587456\end{aligned}$$

Po prvi bonus igri imamo naslednje verjetnosti, da preidemo v določena stanja:

Število iger	**število *scatter* simbolov**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0,418212	0,398297	0,151732	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0,0289014	0	0

16	0	0	0	0	0,002753	0,000105
17	0	0	0	0	0	0

Tabela 14 Verjetnosti po prvi bonus igri

Delež vračanja prve bonus igre je

$$\mathrm{E(prva\ bonus\ igra)} = \ 33{,}397456750\ \%$$

4.1.2.3 Druga bonus igra

Druga bonus igra lahko vsebuje prvi *wild* kolut ali pa ne. To je odvisno od nabranih simbolov *scatter* v prvi igri.

Začnimo sistematsko in najprej izračunajmo verjetnosti, ko v drugi bonus igri nimamo dodatnega *wild* koluta.

Verjetnost, da tudi v drugi igri nimamo nobenega simbola *scatter*, se izračuna takole:

$$\begin{aligned}\mathrm{P(0scatter\ po\ 2\ FG)} &= \mathrm{P(0scatter\ \ v\ 1FG)} \times\ \mathrm{P(0scatter\ v\ 2FG)}\\ &= 0{,}41821194 \times 0{,}41821194\\ &= 0{,}17490123\end{aligned}$$

Verjetnost, da imamo v drugi bonus igri en simbol *scatter*, je

$$\begin{aligned}&\mathrm{P(1scatter\ po\ 2FG)} = \mathrm{P(0scatter\ \ 1FG)} \times\ \mathrm{P(1scatter\ 2FG)} + \cdots\\ &+ \mathrm{P(1scatter\ \ 1FG)} \times\ \mathrm{P(0scatter\ 2FG)}\\ &\qquad = 0{,}41821194 \times 0{,}3982970 + 0{,}3982970 \times 0{,}41821194\\ &\qquad = 0.33314520\end{aligned}$$

Pri verjetnosti, da imamo v drugi bonus igri dva simbola *scatter*, moramo upoštevati tri primere:

- v prvi bonus igri dobimo 2 simbola *scatter* in v drugi bonus igri nobenega,
- v prvi bonus igri ne dobimo simbola *scatter* in v drugi bonus igri dobimo 2,
- v prvi bonus igri dobimo en simbol *scatter* in v drugi še enega.

$$\mathrm{P(2scatter\ po\ 2\ FG)} = 0{,}28555303$$

Pri verjetnosti, da imamo v drugi bonus igri tri simbole *scatter*, moramo upoštevati štiri primere:

- v prvi bonus igri dobimo 1 simbol *scatter* in v drugi bonus igri 2,
- v prvi bonus igri dobimo 2 simbola *scatter* in v drugi bonus igri 1,
- v prvi bonus igri dobimo 3 simbole *scatter* in v drugi bonus igri nobenega,
- v prvi bonus igri ne dobimo simbola *scatter* in v drugi bonus igri dobimo 3.

$$\mathrm{P(3scatter\ po\ 2\ FG)} = 0{,}14504281$$

S takim sklepajem lahko pridemo do zaključka, da v drugi bonus igri lahko zberemo največ 8 simbolov *scatter*, pri čemer še vedno nimamo *wild* koluta. Sledi skrajni primer, kako lahko dobimo 8 simbolov *scatter*:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(8\mathrm{scatter\ po\ 2\ FG}) &= \mathrm{P}(3\mathrm{scatter\ \ v\ 1FG}) \times\ \mathrm{P}(5\mathrm{scatter\ v\ 2FG}) \\ &= 0{,}02890138 \times 0.00010486 \\ &= 0{,}00000303\end{aligned}$$

V drugi bonus igri imamo lahko že en *wild* kolut. V tem primeru se verjetnosti pojavitve dodatnih simbolov *scatter* spremenijo in tako imamo že vsaj štiri ali pet simbolov *scatter* iz prve bonus igre.
Verjetnost, da v drugi bonus igri ostanemo pri štirih simbolih *scatter*, je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(4\mathrm{scatter\ po\ 2FG}) &= \mathrm{P}(4\mathrm{scatter\ \ 1FG}) \times\ \mathrm{P}(0\mathrm{scatter\ 2FG}) \\ &= \ 0{,}00275251 \times\ 0{,}49787136 \\ &= \ 0{,}0013703969.\end{aligned}$$

Pri izračunu verjetnosti, da imamo v drugi bonus igri 5 simbolov *scatter* z enim *wild* kolutom, moramo upoštevati dva primera:

- v prvi bonus igri dobimo 4 simbole *scatter* in v drugi bonus igri enega,
- v prvi bonus igri dobimo 5 simbolov *scatter* in v drugi bonus igri nobenega.

$$\mathrm{P}(5\mathrm{scatter\ po\ 2\ FG}) = 0{,}0010963175$$

V tem primeru, ko imamo že en *wild* kolut, lahko zberemo največ 9 simbolov *scatter,* ko imamo 5 simbolov *scatter* iz prve igre in 4 iz druge bonus igre.
Verjetnosti po drugi bonus igri z *wild* kolutom so prikazane v naslednji tabeli:

Po drugi bonus igri imamo naslednje verjetnosti, da preidemo v določena stanja:

Število iger	**število *scatter* simbolov**								
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0,17490123	0,33314520	0,28555303	0,12086901	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0,02302267	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0,02417380	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0,02554420	0,01100703	0,00079750	0,00002727	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0,00083529	0,00011743	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00000628

Tabela 15 Verjetnosti po drugi bonus igri

Po tretji bonus igri imamo naslednje verjetnosti, da preidemo v določena stanja:

Število iger	**število *scatter* simbolov**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0,07315	0,20899	0,27865	0,21483	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0,10293	0,02707	0,00250	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,01516	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0,03246	0,02803	0,01166	0,00219	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00012	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0,00111	0,00079	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00031	0.00003
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00001

Tabela 16 Verjetnosti po tretji bonus igri

S takim sklepanjem lahko pridemo do zaključka, da je vsaka nadaljna igra odvisna od predhodne igre, kar pomeni, da se pri tem preračunu tako uporabljajo sredstva markovskih verig. Z vsako igro postajajo verjetnosti bolj kompleksne.
Iz preračuna so razvidni naslednji podatki:

število *wild* kolutov	**število iger**	**delež vračanja**
0	5,334	33,40 %
1	4,570	179,03 %
2	2,340	887,38 %
3	0,651	3579,13 %
4	0,058	13385,00%
5	0,00037	50000,00%

Tabela 17 Število iger in delež vračanja glede na število wild kolutov

Povprečno število bonus iger je 12,953, delež vračanja ene bonus igre pa je 478,291 %.
Gornja tabela prikazuje, da v povprečju igramo 5,334 iger brez *wild* koluta, 4,570 iger z enim *wild* kolutom, 2,340 igre z dvema *wild* kolutoma, s tremi *wild* koluti igramo 0,651 igre, 0,058 iger s štirimi *wild* koluti in 0,00037 igre s petimi *wild* koluti.

4.1.2.4 Gnezdenje

Upoštevati moramo še, da lahko znotraj bonus iger ponovno vstopimo v bonus igre. Verjetnost, da se to zgodi, smo že izračunali na začetku tega razdelka in jo označili s P(retrigger). To je seveda verjetnost dogodka, da v posameznem vrtljaju bonus iger vstopimo v dodatne bonus igre, vemo pa, da so vsake bonus igre sestavljene iz desetih vrtljajev. Z vstopanjem v dodatne bonus igre se torej povečuje število vrtljajev, ki jih imamo na razpolago za vstop v nadaljne bonus igre. Prešteti vse načine, na katere lahko pride do *i*-tega nivoja gnezdenja (to je do vstopa v natanko i + 1 bonus iger), ni enostavno. Sprva se morda zdi, da gre za kombinacije, a to ni res. Recimo, da nas zanima, na koliko načinov lahko pride do drugega nivoja gnezdenja. Znotraj prvotnih bonus iger bi torej radi vstopili še v dve bonus igri.
Če bi se zadeve lotili s kombinacijami, bi med desetimi vrtljaji prvotne bonus igre izbirali dva vrtljaja, v katerih bi vstopili v druge in tretje bonus igre. S tem bi izpustili številne primere. V tretje bonus igre lahko namreč vstopimo tudi kadarkoli med vključno enajstim in dvajsetim vrtljajem bonus iger. Toliko vrtljajev imamo na voljo, ker smo pred vstopom v tretje bonus igre morali nujno vstopiti tudi v druge bonus igre, kar nam je prineslo dodatnih deset vrtljajev. Poleg tega moramo v druge bonus igre vtopiti najkasneje v desetem vrtljaju prvotnih bonus iger. Po tem se namreč bonus igre končajo in s tem se

zaključi tudi vrtljaj osnovne igre, katerega sklop so obravnavane bonus igre bile. Premisleki s povečevanjem števila nivojev gnezdenj postajajo vse bolj zahtevni. Vemo, da lahko gnezdenje teoretično poteka v neskončnost.

Premislimo, na koliko načinov lahko pridemo do dogodka, ko v prvem sklopu bonus igre zadenemo dodatne bonus igre. Po vstopu v prve bonus igre imamo za vstop v druge bonus igre na voljo deset vrtljajev, torej deset načinov za vstop v dodatne bonus igre. Ker nas zanima verjetnost natanko dveh vstopov v bonus igre, moramo zahtevati, da v preostalih štirinajstih vrtljajih ne pride do izida, ki bi sprožil vstop v dodatne bonus igre.

Preučimo primer, ko v bonus igrah ne dobimo dodatnih bonus iger. Povprečno zmago v osnovni igri bomo označili z $\mathrm{B_0}$, povprečno zmago v bonus igri z $\mathrm{B_1}$. V osnovni igri lahko dobimo $\mathrm{n_1}$ bonus iger z verjetnostjo $\mathrm{p_1}$ na vrtljaj, zato je povprečno število bonus iger $\mathrm{n_1 p_1}$.

$$\mathrm{E(bonus\ igre) = n_1 p_1}$$

Zmago, ki jo označimo s F in je skupek osnovnih iger in bonus iger, lahko zapišemo kot:

$$\mathrm{F = B_0 + n_1 p_1 B_1}$$

Kot vemo, je delež vračanja RTP zmaga deljeno stava.

$$\mathrm{Final\ RTP} = \frac{\mathrm{B_0 + n_1 p_1 B_1}}{\mathrm{stava}} \times 100\ \%$$

Sedaj lahko preučimo primer, ko v bonus igrah ponovno zadenemo dodatne bonus igre. Pri tem bomo označili z $\mathrm{n_2}$ število dodatnih bonus iger in s $\mathrm{p_2}$verjetnost, da zadenemo dodatne bonus igre v enem vrtljaju. Povprečno število bonus iger lahko izračunamo takole:

$$\begin{aligned}\mathrm{E(bonus\ igre)} &= \mathrm{n_1p_1 + n_1p_1(n_2p_2) + n_1p_1(n_2p_2)^2 + n_1p_1(n_2p_2)^3} + \ \dots \\ &= \mathrm{n_1p_1} \sum_{\mathrm{i=0}}^{\infty} (\mathrm{n_2p_2})^{\mathrm{i}} \\ &= \mathrm{n_1p_1} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{n_2p_2}}\right)\end{aligned}$$

Pri tej izpeljavi ima ključno vlogo neskončna geometrijska vrsta.

Končni delež vračanja RTP je ponovno delež osnovne igre plus povprečna zmaga bonus iger krat povprečno število bonus iger deljeno s stavo.

$$\mathrm{Final\ RTP} = \frac{\mathrm{B_0 + B_1 n_1 p_1} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{n_2 p_2}}\right)}{\mathrm{stava}} \times 100\ \%$$

4.1.2.5 Skupni delež vračanja

V prvem delu smo izračunali doprinos osnovne igre, v prejšnjem poglavju pa doprinos bonus igre. Sedaj lahko zapišemo še končni rezultat igre:

$$\mathrm{Final\ RTP} = (\mathrm{RTP_{Osnovna\ igra}} + \mathrm{P(trigger)} \times \text{število bonus iger} \times \mathrm{RTP_b}) \times 100\ \%$$

$$= (0{,}412159438 + 0{,}009018982 \times 12{,}95295509 \times 4{,}78290971) \times 100\ \%$$
$$= 97{,}091078324219\ \%$$

Igralec dane igre na srečo lahko potemtakem pričakuje, da bo na dolgi rok izgubil približno 3 odstotke vloženega denarja. Rezultat se sklada s pričakovanji, navedenimi v uvodu. Igra na dolgi rok zagotavlja dobiček igralnici, a hkrati igralcu dopušča dovolj mamljivo možnost zaslužka. Če ne drugega, se lahko nadeja, da njegove izgube, relativno gledano, ne bodo prevelike. Posledično bo v igri najverjetneje vztrajal, s čimer bo povečeval svojo absolutno izgubo oziroma dobiček igralnice.

5 SIMULACIJA

Simulacija poteka v skladu s predpostavkami izračuna. Privzemamo torej, da stavimo le eno denarno enoto na osnovno linijo. Poleg tega odmislimo del igre, imenovan »gamble«. Izid generiramo z izbiro naključnih celih števil v mejah dolžin koles, pri čemer so izbire neodvisne in je vsako izmed števil izbrano z enako verjetnostjo. Najprej upoštevamo izid na osnovni liniji. Morebiten dobiček poiščemo v tabeli izidov in njim pripadajočih dobičkov, ki smo jo zgenerirali že za potrebe izračuna. Zatem preverimo število simbolov *scatter* na ekranu. Če se jih je pojavilo dovolj, simulacija preide v bonus igre. Te so zavoljo gnezdenja vpeljane z lastno funkcijo.
Kot v osnovni igri tudi tokrat zgeneriramo izid in preverimo stanje na osnovni liniji. Že na začetku sta definirana dva parametra »iWildReel« in »scatterAmount«, saj sta ključnega pomena pri preštevanju pojavitev simbola *scatter* na ekranu in postavitev naključnega *wild* koluta. Parameter »remainingFeatureGameAmount« je v osnovi nastavljen na 10, saj na začetku dobimo 10 bonus iger. V nadaljevanju pa se ta parameter povečuje, saj če je število zbranih simbolov *scatter* $4n$, kjer $n = 0,1,2,3,4,5$, potem se število bonus iger poveča za 1. V primeru, da se na igralnem polju pojavijo vsaj trije simboli *scatter*, se število bonus iger poveča za 5. Iz simulacije lahko dobimo tabelo, ki ponazarja koliko krat je bilo odigranih 10, 11, 12,... 30 bonus iger.

Število odigranih FG	Število FG v simulaciji
10	296.733
11	3.461.494
12	3.037.953
13	253.707
14	666
15	0
16	48.862
17	761.142
18	941.558
19	81.513
20	0
21	0
22	4.580
23	108.426
24	75.754
25	669
26	0
27	0

Število odigranih FG	Število FG v simulaciji
28	0
29	5,883
30	322

Tabela 18 Pojavitve bonus iger v simulaciji

V končni fazi funkcija vrne skupni dobiček bonus iger, ki se prišteje dotedanjemu izkupičku v osnovnih igrah. Za več informacij o poteku simulacije naj bralec gleda priloge. Simulacija nadomešča veliko bazo podatkov o finančnih izidih igranja iger na srečo, do katere razumljivo nimamo dostopa. Simuliramo lahko zelo veliko število iger. Če so naši izračuni, in seveda tudi simulacija, vsaj približno pravilni, mora pričakovan izkupiček, ko pošljemo število iger, ki jih simuliramo, proti neskončno, konvergirati proti dobljenemu rezultatu. Pričakovana vrednost torej napoveduje izkupiček v limiti, zato so vsi rezultati, ki nam jih vrne simulacija, le njen približek. Ta naj bi bil z večanjem števila simuliranih iger vedno boljši. Izhodni podatek simulacije predstavlja $100 \times 10.000.000$ iger, z izpisom vseh niti z $10.000.000$ iger. Po simulaciji $1.000.000.000$ iger dobimo sledeč rezultat: $97{,}1342005\%$, ki je zelo dober približek teoretičnemu preračunu, saj se razlikuje za $0{,}04312218\%$.

S pomočjo simulacije sem preračunala vrednost standardnega odklona izplačil, ki je 16,518. Z upoštevanjem standardnega odklona in števila iger je interval zaupanja s 95% stopnjo zaupanja enak $96{,}9886987\% < \text{Final RTP} < 97{,}1934579\%$. Pri tem smo upoštevali formulo za interval zaupanja $\text{Final RTP} \pm 1{,}96 \times \frac{16{,}518}{\sqrt{1.000.000.000}}$. S tem imamo ocenjeno tudi natančnost ocen s simulacijo in lahko trdimo, da se teoretični rezultat in ocene s simulacijo ujemajo.

6 ZAKLJUČEK

Zdaj, ko poznamo delovanje slot iger, se moramo vprašati: "Ali lahko zmagam?". Po mojem mnenju je odgovor "Da". Od stotin ljudi, ki igrajo v igralnici, bo nekaj zmagovalcev in veliko poražencev. Čeprav je možnost, da boste zadeli glavni dobitek vsakič, ko boste v igro vstavili kovanec, majhna, si moramo zapomniti, da naključna številka znotraj slot igre določa vaš izkupiček. Če zadenete zmagovito kombinacijo, je naključna številka določila vašo zmago in ne glede na to, kako majhne možnosti imate, vedno obstaja verjetnost, da se vam to lahko zgodi. Zavedati se moramo, da je to igra na srečo in pri tem imamo vedno neko mero tveganja.
Rezultati simulacije kažejo na to, da se naša izračunana pričakovana vrednost dobro ujema z rezultati iz prakse (oziroma njihovo simulacijo). Samozavestno lahko torej trdim, da so bili izračuni z zbranimi podatki korektni in posledično je tudi končni rezultat pravilen.

7 LITERATURA

[1] C. Barboianu, Mathematics of Slots: Configurations, Combinations, Probabilities, Infarom, Craiova 2013.

[2] C. Barboianu, Probability Guide to Gambling: The Mathematics od Dice, Slots, Roulette, Baccarat, Blackjack, Poker, Lotery and Sport Bets, Infarom, Craiova 2006.

[3] K. Berginc, Markovske verige, Diplomsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2007.

[4] P. Bremaund, Markov chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulations and Queues, Springer, New York, 1999.

[5] J. Buzeti, Mednarodna primerjava obdavčitev iger na srečo s strani organižatorja, Delo diplomskega seminarja, Ekonomsko- poslovna falulteta, Univerza v Mariboru, 2009.

[6] M. Cof, Program za igranje igre Texas Hold'em Poker – Sit'n Go, Diplomsko delo, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru, 2013.

[7] J. Čeh, Markovske verige z zveznim časom, Diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru, 2010.

[8] K. Ćavar, D.Grbenić, Slučajni procesi u igrama na sreću, Zagreb 2010, povezava https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Slucajni_procesi_u_igrama_na_srecu.pdf zadnji ogled 29.03.2017.

[9] G. Donaj, Algoritmi za reševanje treh osnovnih problemov prikritih markovskih modelov, Diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru, 2011.

[10] R.A. Epstein, The Theory of Gambling and Statistical Logic, 2nd Edition, Academic Press, New York, 2009.

[11] Eulerjeva funkcija fi: https://sl.wikipedia.org/wiki/Eulerjeva_funkcija_fi zadnji ogled: 06.04.2017.

[12] E. D. Feustel, G.S Howard, Conquering Risk: Attacking Vegas and Wall Street. Notre Dame: Academic Publications University of Notre Dame, 2010.

[13] M.B. Finan, A probability Course for the Actuaries, A preparation for Exam P/1, Arkansas Tech University, Syllabus, 2013.

[14] C. Griffin, Game theory: Penn state math 486 lecture notes (v 1.02), http://www.personal.psu.edu/cxg286/Math486.pdf zadnji ogled 30.04.2016.

[15] S. Goldberg, Probability: An Introduction, Dover Publications, New York, 1960.

[16] K.A. Harrigan, (2007). Slot machine structural characteristics: Distorted player views of payback percentages. *Journal of Gambling Issues*, 2007.

[17] Introduction to slot and video gaming, IGT, Las Vegas, 2005.

[18] R. Jamnik, Verjentostni račun, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1995.

[19] P. Junod, Cryptographic Secure Pseudo-Random Bits Generation : The Blum-Blum-Shub Generator, Avgust 1999: http://crypto.junod.info/bbs.pdf, zadnji ogled 06.04.2017.

[20] J. Karo, Lastne vrednosti in nehomogene markovske verige, Diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru, 2009.

[21] J. Kilby, J. Fox, A.F. Lucas, Casino operations management, 2nd edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.

[22] S. Kolmanič, Modeliranje in simulacija, http://largui.feri.um.si/cgai/slo/Ares/Modeliranje%20in%20simulacija.pdf zadnji ogled 30.04.2016.

[23] D. H. Lehmer, Mathematical methods in large-scale computing units. Proceedings of a Second Symposium on Large-Scale Digital Calculating Machinery, Cambridge, MA, 1949.

[24] T. Markotić, Primeri uporabe matrik v ekonomiji, Diplomsko delo, Ekonomsko-poslovna fakulteta, Univerza v Mariboru, 2014.

[25] A. Manezes, P. van Oorschot, S. Vanstone, Pseudorandom Bits and Sequences, Handbook of applied cryptography, CRC Press, 1997.

[26] R. Muir, Slot Designer: Tools for professional mathematicians, User Manual, Game Design Automation, Sydney, 2013.

[27] D. Mihelič, Hazard, Zgodovinsko društvo za južno Primorsko, Knjižnica Annales. Koper, 1993.

[28] M. Omladič, Matematika in denar, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1995.

[29] N. Oses, Markov chain applications in the slot machine industry, OR Insight Vol. 21 Issue 1, United Kingdom, 2008.

[30] A. Papoulis, Probability, random variables and stochastic processes, 3rd edition, McGraw Hill, New York, 1991.

[31] E.W.Packel, The Mathematics of Games and Gambling, 3rd edition, Mathematical Association of America, Washington, 1981.

[32] M. Pasterk, Slučajni grafi, Diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru, 2012.

[33] J. M. Pacyniak, A Personal Guide to Electronic Slot Machines, http://gaming.unlv.edu/reading/Pacyniak.PDF zadnji ogled 29.03.2017.

[34] V. Smrke, Analiza iger na srečo, Delo diplomskega seminarja, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2015.

[35] S. Telnaes, Electronic gaming device utilizing a random number generator for selecting the reel stop positions, US 4448419 A, 1982.

[36] C. Tremblay, Mathematics for Game Developers, Thomson Course Technology, Boston, 2004.

[37] N. Turner, Randomness, Does It Matter? Journal of Gambling Issues, issue 2, 2000.

[38] N. Turner, R. Horbay, How do slot machines and other electronic gambling machines actually work? Journal of Gambling Issues, issue 11, 2004.

[39] Zakon o igrah na srečo – ZIS (Uradni list RS, št. 14/2011 z dne 4. 3. 2011).

[40] K. Yao, Weighting the Odds in Sports Betting, Pi Yee Preee, Las Vegas, 2010.

[41] Zapiski e-učilnice za predmet Matematika v praksi: https://ucilnica1314.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/11261/mod_resource/content/1/MaPra-zapiski.pdf zadnji ogled: 06.04.2017.

PRILOGA A RAZPOREDITEV SIMBOLOV V OSNOVNI IGRI

Kolut 1	Kolut 2	Kolut 3	Kolut 4	Kolut 5
ace	pic1	pic3	pic5	ace
pic5	pic3	pic3	pic1	pic3
pic2	king	queen	pic4	king
pic5	jack	pic3	pic5	pic2
pic2	queen	ace	pic1	king
pic4	pic1	queen	pic4	scatter
scatter	queen	pic2	ace	ace
pic3	pic3	pic3	king	pic2
pic2	king	pic1	jack	pic5
pic2	pic1	pic5	king	queen
king	ace	pic4	ace	queen
ace	pic1	ace	jack	ace
pic5	jack	pic4	queen	queen
jack	jack	pic2	queen	jack
jack	wild	jack	pic3	king
pic4	pic3	pic1	pic2	king
pic3	pic3	pic3	pic5	wild
king	king	scatter	wild	king
king	pic1	pic4	jack	jack
wild	jack	pic3	queen	pic5
pic2	pic3	pic1	jack	king
ace	scatter	pic1	pic5	jack
pic1	pic1	king	king	jack
pic5	pic5	ace	pic3	queen
pic4	pic5	pic4	queen	ace
jack	ace	queen	pic5	wild
pic5	pic3	pic3	ace	jack
ace	pic4	king	king	pic3
king	pic5	jack	ace	pic4
pic2	ace	jack	king	scatter
pic2	jack	jack	scatter	ace
pic2	pic3	pic2	queen	pic2
queen	pic1	pic5	pic1	pic2
scatter	pic5	wild	pic1	jack

pic2	pic5	pic4	jack	jack
pic2	pic4	queen	ace	pic1
pic2	jack	king	king	pic4
pic2	pic1	pic4	jack	pic5
pic5	queen	pic2	pic4	pic5
pic5	king	jack	wild	jack
pic5	scatter	queen	ace	pic4
pic1	king	queen	jack	pic1
ace	pic4	king	ace	pic2
wild	pic3	wild	king	ace
queen	king	pic2	pic4	pic4
queen	pic3	pic2	ace	pic5
ace	pic1	jack	pic4	pic5
pic5	jack	pic4	pic2	queen
pic3	king	pic4	jack	wild
ace	ace	jack	queen	queen
ace	wild	queen	king	pic3
pic2	pic3	pic3	ace	pic1
ace	pic3	king	pic5	queen
pic1	jack	pic3	pic4	pic5
wild	king	scatter	jack	jack
pic2	pic1	jack	ace	pic3
ace	pic1	jack	king	pic3
queen	wild	pic5	pic1	pic1
ace	pic1	pic5	jack	pic2
ace	pic3	pic2	pic1	pic5
pic2	king	ace	pic5	queen
pic5	pic1	pic3	pic1	pic4
pic1	pic1	queen	pic2	queen
ace	pic3	pic5	pic4	pic3
pic2	pic4	ace	queen	king
pic5	pic4	ace	king	pic3
king	pic1	pic2	pic5	pic2
pic5	queen	pic1	king	jack
king	pic3	jack	pic1	king
queen	pic3	pic1	pic1	ace
ace	king	pic4	scatter	pic2
ace	ace	pic5	pic4	jack
jack	pic2	pic2	pic5	pic4

pic5	pic3	pic4	pic5	jack
king	pic4	queen	pic4	queen
pic1	pic2	pic4	wild	pic1
pic4	jack	pic2	queen	pic1
scatter	jack	king	king	ace
pic5	pic3	pic1	pic3	ace
pic2	queen	queen	pic2	pic2
ace	pic5	pic4	ace	jack
ace	jack	pic5	ace	wild
jack	king	ace	jack	pic1
pic5	queen	queen	jack	jack
pic3	jack	ace	pic1	pic2
pic2	pic1	pic4	pic3	pic5
pic4	jack	king	pic5	king
pic3	pic2	queen	pic1	pic1
queen	pic1	scatter	queen	pic1
pic4	pic4	pic4	pic3	ace
ace	pic1	pic3	queen	wild
queen	pic3	ace	ace	pic5
jack	king	ace	king	pic4
scatter	pic4	jack	queen	pic2
pic2	jack	pic4	pic1	jack
pic3	pic2	pic1	pic1	pic2
pic2	king	ace	wild	wild
ace	king	ace	pic4	king
pic5	pic3	queen	pic1	pic2
jack	pic5	pic3	pic4	ace

PRILOGA B RAZPOREDITEV SIMBOLOV V BONUS IGRI

Kolut 1	Kolut 2	Kolut 3	Kolut 4	Kolut 5
pic3	king	queen	pic2	pic3
jack	queen	queen	queen	pic5
king	king	ace	pic2	pic1
pic2	king	ace	queen	queen
king	jack	ace	jack	ace
ace	pic3	ace	pic5	pic5
jack	jack	queen	scatter	pic2
pic1	wild	pic5	queen	pic3
jack	king	ace	pic5	jack
jack	pic2	pic5	pic4	queen
queen	pic4	queen	pic2	ace
ace	ace	king	jack	wild
queen	queen	queen	king	pic1
ace	pic5	ace	king	pic2
queen	ace	pic5	pic2	jack
pic2	queen	pic5	pic1	ace
pic3	queen	ace	pic5	jack
king	king	pic1	queen	jack
king	scatter	king	jack	scatter
pic5	queen	ace	wild	pic3
jack	jack	pic5	pic3	pic4
queen	pic4	pic5	pic3	king
queen	ace	jack	pic2	pic1
king	queen	queen	ace	pic1
scatter	jack	ace	pic3	pic5
pic3	pic5	ace	pic4	pic5
pic3	queen	scatter	pic5	jack
pic3	scatter	pic2	pic1	jack
king	pic5	pic2	wild	wild
pic3	jack	pic1	ace	pic1
pic3	ace	pic3	jack	pic4
jack	ace	pic5	pic1	king
pic4	pic5	pic1	wild	king
jack	wild	pic3	pic2	queen

queen	queen	king	pic3	pic2
jack	king	pic4	pic3	king
jack	jack	king	pic5	pic4
pic2	ace	wild	ace	queen
pic3	pic4	jack	ace	pic5
pic1	pic3	pic2	pic5	jack
ace	queen	ace	pic3	king
pic2	pic4	wild	pic1	queen
ace	ace	pic5	scatter	queen
king	jack	pic2	pic4	wild
wild	jack	king	pic4	pic3
pic3	jack	pic1	queen	pic3
pic5	king	pic5	queen	king
king	queen	jack	pic4	pic4
pic5	jack	pic4	pic1	king
pic2	jack	wild	pic4	wild
scatter	pic3	pic5	ace	king
king	pic1	pic5	pic3	king
queen	king	king	pic4	pic2
pic1	ace	king	scatter	pic5
jack	jack	pic4	pic1	pic3
jack	jack	pic3	queen	jack
pic4	queen	scatter	jack	ace
pic5	pic1	ace	pic3	king
pic3	ace	jack	pic4	king
scatter	jack	ace	wild	jack
queen	jack	pic2	pic3	jack
king	queen	queen	pic5	wild
pic4	queen	pic4	pic3	jack
jack	pic2	king	pic5	jack
jack	pic2	pic5	ace	pic2
jack	jack	queen	pic4	ace
wild	king	ace	pic5	pic5
pic3	ace	scatter	ace	queen
king	scatter	queen	pic3	queen
jack	jack	queen	pic5	pic2
jack	pic5	pic5	jack	pic1
jack	pic4	pic5	scatter	ace
king	queen	pic5	pic2	king

queen	queen	king	jack	pic3
pic4	jack	pic4	queen	jack
wild	pic2	king	pic2	scatter
king	king	pic5	pic5	pic4
queen	king	king	pic4	pic5
queen	pic5	scatter	ace	pic5
jack	ace	king	pic2	pic1
pic3	king	ace	pic1	pic3
pic3	pic1	jack	pic1	pic5
scatter	pic1	pic5	pic1	scatter
queen	pic2	ace	ace	jack
pic5	scatter	queen	pic1	pic5
jack	pic3	pic2	jack	jack
queen	ace	pic1	pic4	queen
queen	ace	queen	ace	jack
pic1	ace	queen	king	pic1
ace	queen	king	jack	pic4
pic3	queen	jack	queen	scatter
jack	queen	pic4	jack	pic5
jack	wild	king	pic1	jack
wild	pic4	ace	pic1	pic3
queen	king	queen	pic4	queen
king	king	queen	pic3	king
pic5	jack	pic3	king	ace
queen	jack	ace	jack	jack
king	king	pic5	pic5	ace
queen	pic3	pic3	pic2	pic3

PRILOGA C IZHODNI PODATEK SIMULACIJE

```
Mercury-Reel-Simulation v1.0 - (C) 2016 Natasa Tomsic
------------------------------------------------------

Playing a total of 100 * 10.000.000 games!

Thread    1 - 97,14655%
Thread    2 - 96,96140%
Thread    3 - 97,25445%
Thread    4 - 97,25810%
Thread    5 - 97,16440%
Thread    6 - 96,98475%
Thread    7 - 97,13560%
Thread    8 - 97,00595%
Thread    9 - 96,99535%
Thread   10 - 97,36930%
Thread   11 - 97,25690%
Thread   12 - 97,04665%
Thread   13 - 96,99730%
Thread   14 - 97,25835%
Thread   15 - 97,15355%
Thread   16 - 97,06655%
Thread   17 - 97,04975%
Thread   18 - 96,97135%
Thread   19 - 97,27925%
Thread   20 - 97,30230%
Thread   21 - 97,30280%
Thread   22 - 97,08205%
Thread   23 - 96,95190%
Thread   24 - 97,10215%
Thread   25 - 97,25820%
Thread   26 - 97,10970%
Thread   27 - 97,09390%
Thread   28 - 96,94895%
Thread   29 - 97,30930%
Thread   30 - 97,14345%
Thread   31 - 97,14985%
Thread   32 - 97,07825%
Thread   33 - 97,28485%
```

```
Thread  34 - 96,99900%
Thread  35 - 97,21295%
Thread  36 - 97,08980%
Thread  37 - 97,04720%
Thread  38 - 97,28765%
Thread  39 - 97,28740%
Thread  40 - 96,98890%
Thread  41 - 97,26420%
Thread  42 - 97,07590%
Thread  43 - 97,16385%
Thread  44 - 97,11635%
Thread  45 - 96,97065%
Thread  46 - 97,10295%
Thread  47 - 97,00800%
Thread  48 - 97,22095%
Thread  49 - 97,20475%
Thread  50 - 97,10545%
Thread  51 - 97,17350%
Thread  52 - 97,00595%
Thread  53 - 96,93625%
Thread  54 - 97,24530%
Thread  55 - 97,07630%
Thread  56 - 97,01610%
Thread  57 - 97,27775%
Thread  58 - 97,12895%
Thread  59 - 97,17030%
Thread  60 - 96,98485%
Thread  61 - 97,12035%
Thread  62 - 97,06340%
Thread  63 - 97,24890%
Thread  64 - 97,13965%
Thread  65 - 97,16715%
Thread  66 - 96,99450%
Thread  67 - 97,20180%
Thread  68 - 97,01430%
Thread  69 - 97,28900%
Thread  70 - 97,15785%
Thread  71 - 97,32105%
Thread  72 - 97,21655%
Thread  73 - 97,25660%
Thread  74 - 97,08155%
```

```
Thread   75 - 97,27885%
Thread   76 - 96,95990%
Thread   77 - 97,16730%
Thread   78 - 97,21940%
Thread   79 - 97,18155%
Thread   80 - 97,25975%
Thread   81 - 97,27210%
Thread   82 - 96,97800%
Thread   83 - 97,10660%
Thread   84 - 97,02025%
Thread   85 - 97,24580%
Thread   86 - 96,96640%
Thread   87 - 97,08840%
Thread   88 - 97,01600%
Thread   89 - 97,33320%
Thread   90 - 97,03595%
Thread   91 - 97,16365%
Thread   92 - 97,08615%
Thread   93 - 97,25705%
Thread   94 - 97,15945%
Thread   95 - 96,95825%
Thread   96 - 97,35955%
Thread   97 - 97,08965%
Thread   98 - 97,10295%
Thread   99 - 97,11170%
Thread  100 - 97,09520%
-----------------------------------------------------

 Basegame:
-----------
Wild  : 3x     12.427 | 4x       983 | 5x          5
Pic 1 : 3x  1.352.961 | 4x   248.320 | 5x     49.160
Pic 2 : 3x  1.791.025 | 4x   128.057 | 5x     23.636
Pic 3 : 3x  2.504.991 | 4x   215.692 | 5x     33.743
Pic 4 : 3x  1.401.771 | 4x   226.491 | 5x     29.190
Pic 5 : 3x  1.457.957 | 4x   220.535 | 5x     42.064
Ace   : 3x  2.036.747 | 4x   351.796 | 5x     72.903
King  : 3x  1.271.470 | 4x   213.716 | 5x     44.860
Queen : 3x  1.169.069 | 4x   174.466 | 5x     38.707
Jack  : 3x  1.865.342 | 4x   281.824 | 5x     74.685
Scatt : 3x    156.786 | 4x     8.765 | 5x      1.299
```

```
 Feature:
----------
Wild  : 3x    600.050 | 4x    189.296 | 5x     29.571
Pic 1 : 3x    431.882 | 4x    246.342 | 5x     98.957
Pic 2 : 3x    574.016 | 4x    270.363 | 5x     93.557
Pic 3 : 3x    892.708 | 4x    318.114 | 5x    162.939
Pic 4 : 3x    560.292 | 4x    205.057 | 5x    113.571
Pic 5 : 3x  1.147.702 | 4x    381.710 | 5x    238.689
Ace   : 3x  1.661.257 | 4x    527.440 | 5x    239.627
King  : 3x  2.267.074 | 4x    563.878 | 5x    277.758
Queen : 3x  2.572.202 | 4x    761.822 | 5x    356.591
Jack  : 3x  2.175.229 | 4x    659.623 | 5x    389.941
Scatt : 3x    432.211 | 4x    130.410 | 5x     37.409

 Feature game amount:
----------------------
10x   296.733
11x 3.461.494
12x 3.037.953
13x   253.707
14x       666
15x         0
16x    48.862
17x   761.142
18x   941.558
19x    81.513
20x         0
21x         0
22x     4.580
23x   108.426
24x    75.754
25x       669
26x         0
27x         0
28x         0
29x     5.883
30x       322

 Standard Deviation:
---------------------
```

```
16,5179324923414

 Summary:
----------
Wild  : 3x    612.477 | 4x    190.279 | 5x     29.576
Pic 1 : 3x  1.784.843 | 4x    494.662 | 5x    148.117
Pic 2 : 3x  2.365.041 | 4x    398.420 | 5x    117.193
Pic 3 : 3x  3.397.699 | 4x    533.806 | 5x    196.682
Pic 4 : 3x  1.962.063 | 4x    431.548 | 5x    142.761
Pic 5 : 3x  2.605.659 | 4x    602.245 | 5x    280.753
Ace   : 3x  3.698.004 | 4x    879.236 | 5x    312.530
King  : 3x  3.538.544 | 4x    777.594 | 5x    322.618
Queen : 3x  3.741.271 | 4x    936.288 | 5x    395.298
Jack  : 3x  4.040.571 | 4x    941.447 | 5x    464.626
Scatt : 3x    588.997 | 4x    139.175 | 5x     38.708

Feature trigger: 9.079.262
Feature retrigger: 2.230.548
Wilds added: 15.688.998

Total: 97,1342005%
-----------------------------------------------------

Hit <return> to exit
```