UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Pragovni grafi

(Threshold graphs)

Ime in priimek: Anja Hofbauer
Študijski program: Matematika
Mentor: prof. dr. Martin Milanič
Somentorica: doc. dr. Nina Chiarelli

Koper, maj 2022

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Anja HOFBAUER

Naslov zaključne naloge: Pragovni grafi

Kraj: Koper

Leto: 2022

Število listov: 42 Število slik: 8 Število tabel: 1

Število referenc: 14

Mentor: prof. dr. Martin Milanič

Somentorica: doc. dr. Nina Chiarelli

Ključne besede: pragovni graf, linearna algebra

Math. Subj. Class. (2020): 05C22, 05C69, 05C75, 90C10, 05C85

Izvleček:
V zaključni nalogi obravnavamo pragovne grafe. To so grafi, za katere obstaja taka nenegativna utežna funkcija na množici točk, ki neodvisne množice točk enostavno loči od preostalih množic, in sicer tako, da je množica točk neodvisna, če in samo če je dovolj lahka.
V nalogi najprej povzamemo osnovne pojme iz teorije grafov in pragovnih grafov. Zatem podamo motivacijo za študij pragovnih grafov, ki je povezana s posebnimi sistemi linearnih neenačb. Vsakemu takemu sistemu je namreč mogoče prirediti nek graf, pragovnost izpeljanega grafa pa ustreza pogoju, da je binarne rešitve sistema mogoče opisati z eno samo neenačbo. Nato se seznanimo s posebnimi poddružinami razreda pragovnih grafov in nekaterimi operacijami, ki ohranjajo pragovnost. V zaključku naloge podamo strukturno karakterizacijo pragovnih grafov in učinkovit algoritem za prepoznavanje le-teh.

Key words documentation

Name and SURNAME: Anja HOFBAUER

Title of final project paper: Threshold graphs

Place: Koper

Year: 2022

Number of pages: 42 Number of figures: 8 Number of tables: 1

Number of references: 14

Mentor: Prof. Martin Milanič, PhD

Co-Mentor: Assist. Prof. Nina Chiarelli, PhD

Keywords: threshold graphs, linear algebra

Math. Subj. Class. (2020): 05C22, 05C69, 05C75, 90C10, 05C85

Abstract:
In this project paper we consider threshold graphs. These are graphs for which there exists a nonnegative weight function on the set of vertices that can be used to easily separate independent sets from all other sets, in the sense that a set of vertices is independent if and only if it is sufficiently light.
We first summarize the basic concepts from graph theory and threshold graphs. We then give the motivation for the study of threshold graphs, which is related to special systems of linear inequalities. Namely, to each such system we can associate a graph, and the thresholdness of the derived graph corresponds to the condition that the binary solutions of the system can be described by a single inequality. Then we present some special subfamilies of the class of threshold graphs and certain operations that preserve thresholdness. At the end of the paper we give a structural characterization of threshold graphs and an efficient algorithm for recognizing them.

Zahvala

Najprej bi se zahvalila mentorju, rednemu prof. dr. Martin Milaniču ter somentorici, docentki dr. Nini Chiarelli za vse nasvete, podporo ter vztrajnost pri razlagi snovi. Zahvala gre tudi družini in prijateljem, ki so me ves čas podpirali in mi stali ob strani.

Kazalo vsebine

Kazalo tabel

Kazalo slik

Seznam kratic

tj.	to je
npr.	na primer
t.i.	tako imenovani
oz.	oziroma

1 Uvod

Pragovne grafe so neodvisno odkrili in predstavili raziskovalci z različnih področij. Leta 1973 sta V. Chvátal in P. L. Hammer te grafe poimenovala pragovni grafi in jih uvedla kot razred grafov, za katere obstaja enostavna metoda razlikovanja neodvisnih množic od odvisnih množic [5]. Približno ob istem času sta pragovne grafe odkrila tudi Henderson in Zalcstein in jih poimenovala "PV_c grafi" [9]. Njuno odkritje je privedlo do pomembnega napredka na področju računalništva, ki se ukvarja s sinhronizacijo procesov. Yannakakis je leta 1982 dokazal pomemben rezultat v teoriji kompleksnosti s pomočjo verižnih grafov, ki so tesno povezani s pragovnimi grafi [14]. Začetki pragovnih grafov tako segajo na veliko področij.

Ena izmed motivacij za študij razreda pragovnih grafov je povezava z linearno algebro. Bradley je leta 1971 ugotovil, da lahko pri danem sistemu linearnih enačb množico binarnih rešitev sistema opišemo z eno samo enačbo [1]. Naravno se zato pojavi vprašanje, ali je to mogoče tudi, ko imamo opravka s sistemi linearnih neenačb. Kdaj torej lahko množice binarnih rešitev sistema linearnih neenačb opišemo z eno samo neenačbo in kdaj to ni možno, je eden od problemov, ki jih bomo obravnavali v zaključni nalogi. Pogledali si bomo, kako nam pri tem lahko pomagajo ravno pragovni grafi.

Zaključna naloga je strukturirana, kot sledi.
Najprej se bomo, v poglavju 2, seznanili z osnovnimi pojmi teorije grafov in pragovnih grafov. Temu bo sledilo poglavje 3, kjer bomo obravnavali prevedbo sistemov linearnih neenačb na eno samo linearno neenačbo z ohranitvijo množic binarnih rešitev sistemov. Binarne matrike sistemov, za katere je taka prevedba mogoča, imenujemo pragovne matrike. Pokazali bomo, da je pragovnost poljubne binarne matrike ekvivalentna pragovnosti nekega (točno določenega) iz matrike izpeljanega grafa. V 4. poglavju bomo posebno pozornost posvetili minimalnim odvisnim in maksimalnim neodvisnim množicam grafa ter obravnavali dve družini pragovnih grafov in nekatere operacije, ki ohranjajo pragovnost. Podali bomo tudi karakterizacijo acikličnih pragovnih grafov. Poglavje 5, skupaj z dokazom izreka 5.1, predstavlja jedro zaključne naloge, kjer karakteriziramo pragovne grafe. Zaključno nalogo končamo z učinkovitim algoritmom za prepoznavanje pragovnih grafov ter s seznamom vseh pragovnih grafov na največ 5 točkah.

2 Osnovni pojmi

V tem poglavju so opisani osnovni pojmi teorije grafov, pomembni za razumevanje zaključne naloge. Za nedefinirane pojme s področja teorije grafov bralca napotujemo na [10].

2.1 Grafi

Graf G je urejen par, $G = (V, E)$, kjer je $V(G)$ končna množica in $E(G)$ množica dvoelementnih podmnožic množice V. Elementi množice V se imenujejo *točke*, elementi množice E pa *povezave* grafa G. Povezavo med točkama u in v označimo z $e = \{u, v\}$, bomo pa zaradi preprostosti pisali kar $e = uv$, kjer sta točki u in v *krajišči* povezave e. Dve točki $u, v \in V$ sta *sosednji*, če velja $\{u, v\} \in E$ (tj. če med u in v obstaja povezava), sicer sta *nesosednji*. *Soseščino* točke u v grafu G definiramo kot množico vseh sosedov točke u, $N(u) = \{v \in V : v \text{ je sosednja točka točke } u\}$ in *zaprto soseščino* točke u kot $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. *Stopnja točke* u v grafu G je enaka moči soseščine točke u, $|N(u)|$. Točka je *izolirana*, če je $N(u) = \emptyset$, in *univerzalna*, če je $N[u] = V$. *Pot v grafu* G je poljubno tako zaporedje $(v_1, \ldots, v_n)$ različnih točk, da za vse $1 \leq i < n$ obstaja povezava $\{v_i, v_{i+1}\}$. Graf G je *povezan*, če obstaja pot med vsakim parom točk.

Neodvisna množica v grafu je množica paroma nesosednjih točk. Množica točk, ki ni neodvisna, je *odvisna*. *Največja neodvisna množica* v grafu G je neodvisna množica v grafu G z največ elementi. *Maksimalna neodvisna množica* v grafu G je neodvisna množica v grafu G, ki ni vsebovana v nobeni večji neodvisni množici. *Minimalna odvisna množica* v grafu G je odvisna množica v grafu G, ki ne vsebuje nobene manjše odvisne množice. *Klika* je množica paroma sosednjih točk. *Največja klika* je klika z največjim številom točk med vsemi klikami.

Graf $H = (U, F)$ je *podgraf* grafa $G = (V, E)$, če velja $U \subseteq V$ in $F \subseteq E$, to označimo z: $H \subseteq G$. V tem primeru pravimo, da graf G *vsebuje* graf H. Podgraf H grafa G je *induciran*, če vsebuje vse povezave grafa G, ki imajo obe krajišči v grafu H. Če je $H = (U, F)$ induciran podgraf grafa G, pravimo, da je H podgraf grafa G, induciran z množico U, in to označimo kot $H = G[U]$. Naj bo $\mathcal{F}$ množica grafov. Graf G je *$\mathcal{F}$-prost*, če noben njegov induciran podgraf ni izomorfen kakšnemu grafu iz množice $\mathcal{F}$.

Komplement grafa $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V, F)$, v katerem za vsak par (različnih) točk u, v velja $uv \in F \iff uv \notin E$. To pomeni, da sta dve različni točki sosednji v $\overline{G}$, če in samo če nista sosednji v G.

Grafa G in H sta *izomorfna* (drug drugemu), če obstaja bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$, ki ohranja povezave in nepovezave, tj. če za vse pare različnih točk $u, v \in V(G)$ velja: $\{u, v\} \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$. Dejstvo, da sta grafa G in H izomorfna, označimo z $G \cong H$.

Za $n \geq 1$ je *pot* P_n graf, katerega točke lahko razvrstimo tako, da sta dve točki sosednji, če in samo če sta zaporedni na seznamu. Za $n \geq 3$ je *cikel* C_n graf oblike (V, E), kjer je $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Cikel C_n se imenuje tudi *n-cikel.* Za $n \geq 1$ je K_n *poln graf*, tj. graf na n točkah, v katerem vsak par točk tvori povezavo. Graf $K_{m,n}$ je *poln dvodelen graf*, tj. graf, v katerem lahko množico točk V razdelimo v dve taki neodvisni množici V_1, V_2, da velja $V_1 \cap V_2 = \emptyset, |V_1| = m, |V_2| = n$ in $E(K_{m,n}) = \{v_1v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

Naj bo G graf z množico točk $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Z $G * K_1$ označimo *spoj* grafa G z grafom K_1. To je graf, ki ga iz grafa G dobimo tako, da mu dodamo univerzalno točko. Za točkovno disjunktna grafa G in H označimo z $G+H$ njuno *disjunktno unijo*, tj. graf, katerega množica točk je $V(G) \cup V(H)$, množica povezav pa $E(G) \cup E(H)$. Za celo število $n \geq 1$ in graf G označimo z nG disjunktno unijo n kopij grafa G.

2.2 Pragovni grafi

Seznanimo se sedaj s pragovnimi grafi.

Definicija 2.1 (Chvátal in Hammer [4])**.** Graf $G = (V, E)$ je *pragoven*, če je točkam $v \in V$ mogoče dodeliti take nenegativne realne uteži $w(v)$, da za vsako množico $S \subseteq V$ velja: S je neodvisna množica v grafu G natanko tedaj, ko velja $w(S) := \sum_{v \in S} w(v) \leq t$, kjer je $t \in \mathbb{R}_+$ *prag*, ki ga teža nobene neodvisne množice ne sme preseči. Par (w, t) imenujemo *pragovna struktura* grafa G.

Zdaj ko smo se spoznali z osnovno definicijo, definirajmo še eno pomembno lastnost pragovnih struktur pragovnih grafov.

Definicija 2.2. Pragovna struktura (w, t) grafa G je *povsod pozitivna* natanko tedaj, ko za vse točke $v \in V$ velja $w(v) > 0$.

Pomen koncepta povsod pozitivne pragovne strukture je razviden iz naslednje trditve.

Trditev 2.3 (Chvátal in Hammer [4])**.** *Vsak pragoven graf G premore neko povsod pozitivno pragovno strukturo (w, t).*

Pragovne grafe lahko definiramo tudi nekoliko drugače, s karakterističnimi vektorji.

Naj bo G graf z množico točk $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in množico povezav E. Za vsako množico $S \subseteq V$ definiramo *karakteristični vektor* množice S kot vektor $x^S = \left(x_1^S, \ldots, x_n^S\right) \in \{0,1\}^n$, ki za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$ zadošča pogoju

$$x^S = \begin{cases} 1, & \text{če je } v_i \in S; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Graf G je pragoven, če in samo če obstaja taka hiperravnina, ki n-dimenzionalno kocko $[0,1]^n$ prereže na dva dela tako, da so oglišča kocke v enem delu prostora (ali na hiperravnini) natanko karakteristični vektorji neodvisnih množic grafa G, oglišča kocke v drugem delu (vendar ne na hiperravnini), pa natanko karakteristični vektorji odvisnih množic grafa G.

Za zaključek tega poglavja kot zanimivost omenimo, da je za vsak graf mogoče definirati t.i. pragovno dimenzijo, ki predstavlja naravno posplošitev pojma pragovnih grafov (več o tem v [4] in [6]).

Definicija 2.4. *Pragovna dimenzija*, $\theta(G)$, grafa $G = (V, E)$ je najmanjše število k takih linearnih neenačb

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq t_1, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \leq t_k, \end{gathered}$$

da je množica $S \subseteq V$ neodvisna, če in samo če njen karakteristični vektor $x^S = (x_1^S, \ldots, x_n^S)$ zadošča tem linearnim neenačbam.

Graf G je pragoven natanko tedaj, ko je njegova pragovna dimenzija $\theta(G) \leq 1$. Graf ima pragovno dimenzijo 0 natanko tedaj, ko nima nobene povezave. Za graf brez povezav namreč prazna množica neenačb zadostuje pogoju, obstoj vsaj ene povezave pa implicira obstoj vsaj ene množice točk, ki ni neodvisna (in je torej potrebna vsaj ena neenačba).

3 Motivacija za študij pragovnih grafov

Motivacija za študij pragovnih grafov je povezana z naslednjim vprašanjem:
Ali lahko sistem linearnih enačb prevedemo na eno samo linearno enačbo, ki ohranja množico binarnih rešitev sistema?

V začetnem delu poglavja bomo zato obravnavali sisteme linearnih enačb (in kasneje tudi linearnih neenačb) oblike $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (oz. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$), pri čemer je $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_+^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_+^m$ in $\mathbb{Z}_+$ predstavlja množico nenegativnih celih števil. Zanimale nas bodo binarne rešitve sistema, tj. rešitve oblike $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$.
Da je odgovor na uvodoma omenjeno vprašanje vselej pritrdilen, nam pove naslednja trditev, ki v dokazu podaja tudi konstrukcijo željene linearne enačbe. Dokaz je povzet po [12].

Trditev 3.1 (Chvátal in Hammer [4])**.** *Pri danem sistemu linearnih enačb* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, *kjer sta* $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_+^{m\times n}$ *in* $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_+^m$, *lahko opišemo množico binarnih rešitev sistema z eno samo linearno enačbo*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \beta,$$

pri čemer so koeficienti α_j *in* β *nenegativna cela števila.*

Dokaz. Dokažimo trditev z indukcijo po m (tj. številu enačb).
Primer $m = 1$ je trivialen, zato predpostavimo, da je $m \geq 2$. Zapišimo $\mathbf{a_j}$ (tj. j-ti stolpec matrike $\mathbf{A}$) kot

$$\mathbf{a_j} = (\hat{\alpha}_j, \mathbf{a_j^*}) \tag{3.1}$$

kjer je $\hat{\alpha}_j \in \mathbb{Z}_+$ in $\mathbf{a_j^*} \in \mathbb{Z}_+^{m-1}$ za vse $j \in \{1,\ldots,n\}$. Podobno zapišimo $\mathbf{b}$ kot

$$\mathbf{b} = (\hat{\beta}, \mathbf{b}^*). \tag{3.2}$$

Po indukcijski predpostavki sedaj obstajajo taka števila $\alpha'_j, \beta' \in \mathbb{Z}_+$, da za vse vektorje $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ velja

$$\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{b}^* \quad \text{če in samo če} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j x_j = \beta', \tag{3.3}$$

pri čemer je $\mathbf{A}^* \in \mathbb{Z}_+^{(m-1)\times n}$ matrika, ki je sestavljena iz vseh vrstic matrike $\mathbf{A}$, razen prve. Naj bo sedaj $\alpha' = \sum_{j=1}^n \alpha_j'$ in naj bo N poljubno celo število, za katerega velja

$$N > \max\{\alpha', \beta'\}$$

ter definirajmo vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_+^n$ in število $\beta \in \mathbb{Z}_+$ kot

$$\mathbf{a} = N\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}' \quad \text{in} \quad \beta = N\hat{\beta} + \beta', \tag{3.4}$$

pri čemer sta $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)$ in $\mathbf{a}' = (\alpha_1', \dots, \alpha_n')$.
Trdimo, da za vse vektorje $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ velja

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{če in samo če} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \beta. \tag{3.5}$$

Obravnavajmo poljuben vektor $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$. Najprej predpostavimo, da velja enakost $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Skupaj z enakostma, podanima v (3.1) in (3.2), dobimo $\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j = \hat{\beta}$ in $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{b}^*$. Z uporabo enakosti (3.3) dalje dobimo $\sum_{j=1}^n \alpha_j' x_j = \beta'$. Enakost $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \beta$ sedaj sledi iz (3.4).

Predpostavimo sedaj, da velja enakost $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \beta$. Najprej opazimo, da v tem primeru zadošča pokazati enakost $\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j = \hat{\beta}$. Če ta velja, potem enačba $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \beta$ skupaj z enakostma podanima v (3.4) implicira, da je $\sum_{j=1}^n \alpha_j' x_j = \beta'$. Z uporabo enakosti (3.3) nato dobimo $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{b}^*$, ki je skupaj z enačbo $\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j = \hat{\beta}$ ekvivalentna izrazu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Enakost $\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j = \hat{\beta}$ bomo pokazali v dveh korakih. Če je $\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j \leq \hat{\beta} - 1$, potem velja

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = N\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j + \sum_{j=1}^n \alpha_j' x_j \leq N\hat{\beta} - N + \sum_{j=1}^n \alpha_j' x_j < N\hat{\beta} \leq N\hat{\beta} + \beta' = \beta$$

in pridemo v protislovje s predpostavko $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \beta$. Torej je $\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j \geq \hat{\beta}$.
Če je $\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j \geq \hat{\beta} + 1$, potem velja

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = N\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j + \sum_{j=1}^n \alpha_j' x_j \geq N\hat{\beta} + N > N\hat{\beta} + \beta' = \beta$$

in ponovno pridemo v protislovje s predpostavko $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \beta$.
S tem smo pokazali, da je $\sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j x_j = \hat{\beta}$ in zaključili dokaz. $\square$

Primer 3.2. Ali lahko pri pogoju: $\mathbf{x} \in \{0,1\}^3$ rešitve spodnjega sistema linearnih enačb opišemo z eno samo enačbo?

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 9 \qquad (e_1) \\ 3x_1 \qquad\quad + \; x_3 &= 4 \qquad (e_2) \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \qquad (e_3) \end{aligned}$$

Rešimo nalogo s pomočjo postopka v omenjenem dokazu. Obravnavo začnemo z eno samo enačbo (v našem primeru bo to (e_3)) in v vsakem koraku (tj. iteraciji postopka) sistemu dodamo eno enačbo. Z vsako iteracijo dobimo eno enačbo, ki nam opisuje vseh d do sedaj obravnavanih enačb iz danega sistema linearnih enačb. Uporabimo oznake kot v omenjenem dokazu, za izračune pa rekurzivne zveze: $N > \max\{\alpha', \beta'\}$ in $\mathbf{a} = N\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}'$ ter $\beta = N\hat{\beta} + \beta'$.

1. korak: Obravnavamo eno samo enačbo, tj. enačbo (e_3). Skladno z oznakami v rekurzivnih zvezah imamo:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' = (0,1,2) \quad \text{in}$$
$$\beta = \beta' = 2$$

2. korak: Enačbi, dobljeni v prejšnjem koraku, dodamo eno enačbo iz začetnega sistema. V našem primeru (e_2). Imamo torej:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= (3,0,1) \quad \text{in} \quad \hat{\beta} = 4 \quad \text{ter} \\ \mathbf{a}' &= (0,1,2) \quad \text{in} \quad \beta' = 2. \end{aligned}$$

Za izračun števila N uporabimo podano formulo. Ker je $N > \max\{0+1+2, 2\} = 3$, izberemo $N = 4$ in dalje dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= N\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}' = 4 \cdot (3,0,1) + (0,1,2) = (12,1,6) \\ \beta &= N\hat{\beta} + \beta' = 4 \cdot 4 + 2 = 18. \end{aligned}$$

Enačba, ki nam opisuje obe do sedaj obravnavani enačbi iz sistema linearnih enačb, je torej $12x_1 + x_2 + 6x_3 = 18$.

3. korak: Enačbi, dobljeni v prejšnjem koraku, dodamo še zadnjo enačbo iz začetnega sistema linearnih enačb, v našem primeru (e_1). Sedaj imamo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= (2,3,7) \quad \text{in} \quad \hat{\beta} = 9 \quad \text{ter} \\ \mathbf{a}' &= (12,1,6) \quad \text{in} \quad \beta' = 18 \end{aligned}$$

Najprej izračunamo novo vrednost N. Ker je $N > \max\{12 + 1 + 6, 18\} = 19$, naj bo $N = 20$. Tokrat dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= N\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{a}' = 20 \cdot (2, 3, 7) + (12, 1, 6) = (52, 61, 146) \\
\beta &= N\hat{\beta} + \beta' = 20 \cdot 9 + 18 = 198
\end{aligned}$$

Obravnavali smo vse enačbe začetnega sistema linearnih enačb, zato postopek zaključimo in lahko pritrdilno odgovorimo na zastavljeno vprašanje. Rešitev sistema lahko namreč zapišemo z eno samo enačbo, in sicer

$$52x_1 + 61x_2 + 146x_3 = 198.$$

Iz tega ni težko videti, da je $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ edina rešitev obravnavanega sistema linearnih enačb. ▲

Obravnavajmo sedaj sorodno vprašanje za sisteme linearnih neenačb.
Ali lahko pri danem sistemu linearnih neenačb

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

množico binarnih rešitev sistema opišemo z eno samo linearno neenačbo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j < \beta?$$

Opazimo, da je problem bolj zahteven, kar nakazujeta tudi naslednja primera.

Primer 3.3. Ali lahko pri pogoju $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^3$ rešitve spodnjega sistema linearnih neenačb opišemo z eno samo neenačbo?

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &\leq 9 \\
3x_1 \qquad + \ x_3 &\leq 4 \\
x_2 + 2x_3 &\leq 2
\end{aligned}$$

Če postopamo podobno, kot smo pri reševanju primera 3.2, pridemo do neenačbe $52x_1 + 61x_2 + 146x_3 \leq 198$. Opazimo lahko, da je $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ rešitev tega sistema, ampak ker imamo v tem primeru neenačbo, to ni edina rešitev. Bralec se bo zlahka prepričal, da neenačba $52x_1 + 61x_2 + 146x_3 \leq 198$ dejansko opiše vse binarne rešitve začetnega sistema linearnih neenačb. ▲

Binarne rešitve zgornjega sistema linearnih neenačb lahko opišemo tudi na preprostejši način, na primer z neenačbo $x_2+x_3 \leq 1$, saj v nobeni rešitvi danega sistema neenakosti x_2 in x_3 ne moreta biti hrati enaka 1. Bralec se lahko zlahka prepriča, da je vsaka binarna rešitev, ki zadošča podani neenakosti, tudi rešitev sistema.

Poglejmo si še en zgled.

Primer 3.4. Podobno kot v primeru 3.3, nas tudi tokrat zanima, ali lahko pri pogoju $\mathbf{x} \in \{0,1\}^3$ opišemo rešitve tega sistema z eno samo neenačbo.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 3 \qquad (e_1) \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 2 \qquad (e_2) \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 3 \qquad (e_3) \end{aligned}$$

Če postopamo podobno, kot smo pri reševanju primera 3.3, dobimo neenačbo $159x_1 + 304x_2 + 592x_3 \leq 423$. Opazimo, da ima neenačba, poleg trivialne rešitve $\mathbf{x} = (0,0,0)$ še natanko dve binarni rešitvi ($\mathbf{x} = (1,0,0)$ in $\mathbf{x} = (0,1,0)$), toda rešitev $(0,1,0)$ ustreza zgolj neenačbi (e_1), ne pa tudi neenačbama (e_2) in (e_3). Izpeljana neenačba torej ne ohranja množice vseh binarnih rešitev našega sistema. ▲

Primera 3.3 in 3.4 kažeta, da za opis množice binarnih rešitev sistema linearnih neenačb ne moremo uporabiti enakega postopka kot za linearne enačbe. To nas seveda ne preseneča. Kot bomo videli v nadaljevanju, množice binarnih rešitev sistema linearnih neenačb namreč ni vselej mogoče opisati z eno samo neenačbo. Ker je vsak sistem linearnih neenačb mogoče opisati z matriko, nam ravno te lahko pomagajo pri določanju, ali lahko dan sistem opišemo z eno samo neenačbo. Lastnost matrik sistema z binarnimi koeficienti, za katere je tak opis mogoč, če je desna stran sistema določena z vektorjem samih enic, podaja naslednja definicija.

Definicija 3.5. Binarna matrika $\mathbf{A} \in \{0,1\}^{m\times n}$ je *pragovna*, če in samo če obstaja ena sama linearna neenačba

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq 1,$$

katere rešitve so natanko binarne rešitve sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ta definicija je motivirana s sorodnim konceptom pragovnih Boolovih funkcij. Za več informacij o tem področju radovednega bralca napotimo na [2, 4, 7].

Poglejmo si sedaj definicijo, ki jo bomo potrebovali za razumevanje izreka, podanega v nadaljevanju.

Definicija 3.6. Naj bo $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Binarna matrika $\mathbf{A}$ velikosti $m \times n$ je *k-sumabilna*, če obstaja k (ne nujno različnih) binarnih rešitev sistema neenačb $\mathbf{Ax} \leq 1$, recimo jim $\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^k}$, in k (ne nujno različnih) binarnih vektorjev $\mathbf{y^1}, \mathbf{y^2}, \ldots, \mathbf{y^k}$, ki sistema ne rešijo, da velja $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{x^i} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{y^i}$. Če $\mathbf{A}$ ni k-sumabilna, potem je *k-asumabilna.*

Naslednji izrek sledi iz rezultata o karakterizaciji pragovnih Boolovih funkcij, ki sta ga podala Chow [3] in Elgot [8].

Izrek 3.7. *Binarna matrika* $\mathbf{A}$ *sistema* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$ *je pragovna natanko tedaj, ko je k-asumabilna za vse $k \geq 2$.*

Ideja dokaza. Predpostavimo najprej, da je matrika $\mathbf{A}$ pragovna. Tedaj obstaja linearna neenačba $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$, katere binarne rešitve so natanko binarne rešitve sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$. Predpostavimo, da za nek $k \geq 2$ matrika $\mathbf{A}$ ni k-asumabilna. Tedaj je k-sumabilna. Obstaja torej k (ne nujno različnih) binarnih rešitev sistema enačbe $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$, recimo jim $\mathbf{x^1}, \ldots, \mathbf{x^k}$, in k (ne nujno različnih) binarnih vektorjev $\mathbf{y^1}, \ldots, \mathbf{y^k}$, ki sistema ne rešijo, da velja $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{x^i} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{y^i}$. Za vse $i = 1, \ldots, k$ velja $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{\mathbf{i}} \leq b$. Seštejmo vse te neenačbe za $i = 1, \ldots, k$. Dobimo neenakost

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{\mathbf{i}} \leq kb,$$

ki je ekvivalentna neenakosti

$$\sum_{j=1}^{n} a_j (\mathbf{x^1} + \mathbf{x^2} + \ldots + \mathbf{x^k})_j \leq kb.$$

Po drugi strani pa za vse $i = 1, \ldots, k$ velja $\sum_{j=1}^{n} a_j y_j^{\mathbf{i}} > b$, saj vektorji $\mathbf{y^1}, \ldots, \mathbf{y^k}$ ne rešijo sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$ in torej tudi ne ustrezajo neenačbi $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$. Seštejmo vse zgornje neenačbe za $i = 1, \ldots, k$. Dobimo neenakost

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_j y_j^{\mathbf{i}} > kb,$$

ki je ekvivalentna neenakosti:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j (\mathbf{y^1} + \mathbf{y^2} + \ldots + \mathbf{y^k})_j > kb.$$

Po predpostavki velja $\mathbf{x^1} + \mathbf{x^2} + \ldots + \mathbf{x^k} = \mathbf{y^1} + \mathbf{y^2} + \ldots + \mathbf{y^k}$, iz česar sledi:

$$kb < \sum_{j=1}^{n} a_j (\mathbf{y^1} + \mathbf{y^2} + \ldots + \mathbf{y^k})_j = \sum_{j=1}^{n} a_j (\mathbf{x^1} + \mathbf{x^2} + \ldots + \mathbf{x^k})_j \leq kb,$$

s čimer pridemo do protislovja.
Za drugo smer dokaza se uporabi izrek o separaciji konveksnih množic oz. Farkaseva lema (glej npr. [11]). □

Pokažimo v nadaljevanju, da si lahko pri preverjanju pragovnosti binarnih matrik pomagamo z grafi. Povezava temelji na naslednji lemi.

Lema 3.8. *Naj bo* $\mathbf{A} \in \{0,1\}^{m\times n}$ *in naj bosta* $i, j \in \{1,\ldots,n\}$. *Tedaj imata stolpca* i *in* j *matrike* $\mathbf{A}$ *pozitiven skalarni produkt natanko tedaj, ko obstaja tak* $k \in \{1,\ldots,m\}$, *da velja* $a_{ki} = a_{kj} = 1$.

Dokaz. Naj bo $\mathbf{A} \in \{0,1\}^{m\times n}$ in naj bosta $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ stolpca matrike $\mathbf{A}$. Ločimo dva primera.
1. primer: Stolpca i in j imata pozitiven skalarni produkt, tj. $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} > 0$. Torej obstaja vsaj ena vrstica, recimo k, katere vrednost je v obeh stolpcih enaka 1, tj. $a_{ki} = a_{kj} = 1$.
2. primer: Skalarni produkt stolpcev i in j je enak 0. Takšna stolpca ne vsebujeta nobene vrstice, v kateri bi imela oba vrednost 1. □

Iz leme 3.8 sledi, da so binarne rešitve sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$ natanko določene že z množico parov stolpcev matrike $\mathbf{A}$, ki imajo pozitiven skalarni produkt. Tako množico lahko opišemo s simetrično binarno relacijo, torej z grafom.

Definicija 3.9. Matriki $\mathbf{A} \in \{0,1\}^{m\times n}$ priredimo *presečni graf* $G(\mathbf{A})$, definiran tako, da so točke grafa G v bijekciji s stolpci matrike $\mathbf{A}$ in sta dve različni točki sosednji, če in samo če imata pripadajoča stolpca pozitiven skalarni produkt.

Motivacija za uvedbo presečnega grafa je razvidna iz naslednje leme.

Lema 3.10. *Binarne rešitve sistema* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$ *so natanko karakteristični vektorji neodvisnih množic presečnega grafa* $G(\mathbf{A})$.

Dokaz. Naj bo S neodvisna množica grafa $G(\mathbf{A})$ in naj bo $\mathbf{x}$ karakteristični vektor množice S. Ker je S neodvisna množica v grafu $G(\mathbf{A})$, ne vsebuje nobene povezave. To pomeni, da množica stolpcev, indeksiranih z elementi množice S, ne vsebuje nobenega para stolpcev s pozitivnim skalarnim produktom. Od tod pa sledi, da je $\mathbf{x}$ rešitev sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$.
Naj bo sedaj $\mathbf{x}$ binarna rešitev sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$. Naj bo $S(\mathbf{x})$ množica koordinat j vektorja $\mathbf{x}$, za katere je $x_j = 1$. Tedaj je $\mathbf{x}$ karakteristični vektor množice $S(\mathbf{x})$, ki je podmnožica množice točk presečnega grafa $G(\mathbf{A})$. Po definiciji presečnega grafa množica $S(\mathbf{x})$ ne vsebuje nobenega para stolpcev s pozitivnim skalarnim produktom. Od tod sledi, da je množica $S(\mathbf{x})$ neodvisna v grafu $G(\mathbf{A})$. □

Z uporabo definicij 2.1 in 3.5 ter leme 3.10 izpeljemo naslednjo posledico.

Posledica 3.11. *Matrika* $\mathbf{A}$ *je pragovna natanko tedaj, ko je graf* $G(\mathbf{A})$ *pragoven.*

Torej lahko binarne rešitve sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$ za binarno matriko $\mathbf{A}$ opišemo z eno samo neenačbo natanko tedaj, ko je $G(\mathbf{A})$ pragoven graf.

Graf $G(\mathbf{A})$ lahko skonstruiramo po definiciji ali na sledeč način: Kot v definiciji naj bodo točke grafa G v bijekciji s stolpci matrike $\mathbf{A}$. Za vsako vrstico k matrike $\mathbf{A}$ naj bo $C(k)$ množica stolpcev j matrike $\mathbf{A}$, za katere je $a_{kj} = 1$. Tedaj vsaka dva različna stolpca i in j v množici $C(k)$ ustrezata sosednjima točkama grafa. Z drugimi besedami, množica $C(k)$ ustreza kliki v grafu $G(\mathbf{A})$. Nadalje, vsaka povezava presečnega grafa pripada eni izmed teh klik. Če torej začnemo z grafom brez povezav in gremo skozi vse vrstice matrike in za vsako vrstico k grafu dodamo vse povezave klike $C(k)$, dobimo na koncu postopka ravno presečni graf $G(\mathbf{A})$.

Uporabo posledice 3.11 ponazorimo na naslednjih dveh primerih.

Primer 3.12. S pomočjo presečnega grafa matrike sistema bomo ugotovili, ali obstaja ena sama neenačba, ki opiše binarno množico rešitev naslednjega sistema linearnih neenačb.

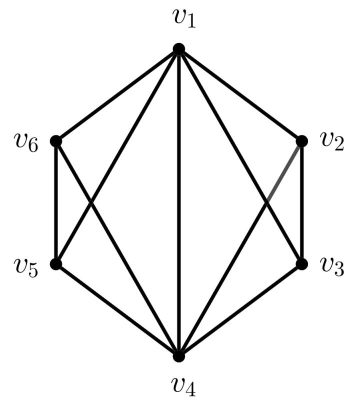
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4 + x_5 + x_6} &\leq 1 \qquad (e_1)\\
x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}+ x_5 + x_6} &\leq 1 \qquad (e_2)\\
x_1 \phantom{{}+ x_2 + x_3} + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 1 \qquad (e_3)
\end{aligned}$$

Zapišimo najprej matriko sistema, $\mathbf{A_1}$.

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrika $\mathbf{A_1}$ vsebuje vso informacijo, potrebno za izračun presečnega grafa $G(\mathbf{A_1})$.

Skladno s podano konstrukcijo presečnega grafa, začnimo z grafom na 6 točkah brez povezav in mu dodamo (iz prve vrstice matrike $\mathbf{A_1}$) kliko $\{v_1, v_2, v_3\}$. Nato (iz druge vrstice matrike $\mathbf{A_1}$) kliko $\{v_2, v_3, v_4\}$ ter (iz tretje vrstice matrike $\mathbf{A_1}$) kliko $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$. Dobljen graf, $G(\mathbf{A_1})$, je presečni graf matrike $\mathbf{A_1}$.



Slika 1: Presečni graf $G(\mathbf{A_1})$.

Preverimo, ali je $G(\mathbf{A_1})$ pragoven graf. Ugotovimo, da graf $G(\mathbf{A_1})$ vsebuje induciran podgraf $2K_2$ (ki ga dobimo tako, da iz grafa odstanimo točki v_1 in v_4), kar glede na trditev 4.11 (na str. 21) pomeni, da graf $G(\mathbf{A_1})$ ni pragoven. Ker presečni graf ni pragoven, sledi, da tudi matrika $\mathbf{A_1}$ ni pragovna, zato množice binarnih rešitev zgornjega sistema linearnih neenačb ni mogoče opisati z eno samo neenačbo. ▲

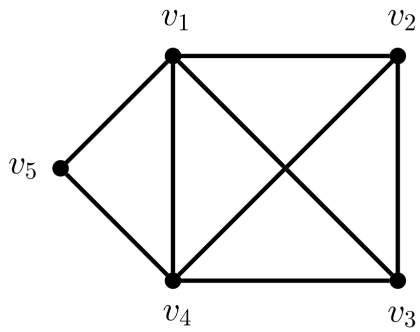
Zaključimo poglavje s primerom, kjer je zapis binarnih rešitev sistema linearnih neenačb z eno samo neenačbo mogoč.

Primer 3.13. S pomočjo presečnega grafa poiščimo eno samo neenačbo, ki bo opisala binarne rešitve naslednjega sistema linearnih neenačb.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &\leq 1 \qquad (e_1)\\
x_2 + x_3 + x_4 \qquad &\leq 1 \qquad (e_2)\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 &\leq 1 \qquad (e_3)
\end{aligned}$$

Ponovno zapišimo matriko sistema, $\mathbf{A_2}$, in narišimo presečni graf $G(\mathbf{A_2})$.

$$\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 2: Presečni graf $G(\mathbf{A_2})$.

Ugotovimo, da lahko točkam grafa $G(\mathbf{A_2})$ določimo takšne nenegativne uteži, da obstaja tako število (prag) t, da pogoj iz definicije 2.1 (množica S je neodvisna natanko tedaj, ko je $w(S) \leq t$) velja. Te uteži so: $w(v_1) = w(v_4) = 3, w(v_2) = w(v_3) = 2, w(v_5) = 1$, prag pa $t = 3$. To pomeni, da je graf $G(\mathbf{A_2})$ pragoven in posledično je tudi matrika $\mathbf{A_2}$ pragovna. Torej obstaja samo ena neenačba, ki opiše dani sistem linearnih neenačb in to lahko poiščemo s pomočjo uteži grafa $G(\mathbf{A_2})$. Dobimo $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 3$ oz. $x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{1}{3}x_5 \leq 1$. ▲

4 Osnove pragovnih grafov

Spomnimo se osnovne definicije pragovnih grafov, ki smo jo podali v razdelku 2.2. Graf $G = (V, E)$ je pragoven, če je točkam $v \in V$ mogoče dodeliti take nenegativne realne uteži $w(v)$, da za vsako množico $S \subseteq V$ velja: S je neodvisna množica v grafu G natanko tedaj, ko je $w(S) := \sum_{v \in S} w(v) \leq t$, kjer je $t \in \mathbb{R}_+$.

Opazimo, da za preverbo pragovnosti poljubnega grafa zadošča obravnava minimalnih odvisnih množic in maksimalnih neodvisnih množic. Podajmo najprej trditev, ki karakterizira minimalne odvisne množice.

Trditev 4.1. *Minimalne odvisne množice poljubnega grafa G so natanko njegove povezave.*

Dokaz. Naj bo $G = (V, E)$ graf in $\mathcal{O}$ množica vseh minimalnih odvisnih množic grafa G. Pokažimo, da velja tako $\mathcal{O} \subseteq E$ kot tudi $E \subseteq \mathcal{O}$.
Poglejmo najprej vsebovanost $\mathcal{O} \subseteq E$. Vzemimo poljubno množico S, za katero velja $S \in \mathcal{O}$. Množica S vsebuje, kot podmnožico, vsaj eno povezavo, npr. $\{x, y\} \in E$, pri čemer je $\{x, y\} \subseteq S$. Če velja $\{x, y\} \subset S$, potem S ni minimalna odvisna množica, s čimer pridemo do protislovja. Velja torej $S = \{x, y\}$ in posledično je $S \in E$. S tem smo pokazali, da je $\mathcal{O} \subseteq E$.
Pokažimo sedaj, da je tudi $E \subseteq \mathcal{O}$. Naj bo $\{x, y\} \in E$ poljubna povezava. Očitno je $\{x, y\}$ odvisna množica v grafu G. Če množici $\{x, y\}$ odstranimo eno točko, nam ostane samo ena točka in nimamo več povezave, kot tudi ne odvisne množice. Torej je vsaka povezava minimalna odvisna množica v grafu G. S tem smo pokazali, da velja tudi $E \subseteq \mathcal{O}$, kar pomeni, da so minimalne odvisne množice poljubnega grafa G natanko njegove povezave. □

Trditev 4.2. *Graf $G = (V, E)$ je pragoven natanko tedaj, ko je točkam $v \in V$ mogoče dodeliti take nenegativne realne uteži $w(v)$, da za vsako maksimalno neodvisno množico $S \subseteq V$ velja $w(S) \leq t$, za vsako povezavo $\{x, y\} \in E$ pa velja $w(\{x, y\}) > t$, kjer je t neko nenegativno realno število.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je G pragoven graf. Torej po definiciji 2.1 premore pragovno strukturo (w, t), ki zadošča pogoju pragovnosti, tj. za vse $S \subseteq V$ velja, da je S neodvisna množica natanko tedaj, ko je $w(S) \leq t$. Po definiciji pragovnosti torej

za vsako neodvisno množico $S \subseteq V$ velja $w(S) \leq t$, torej pogoj velja tudi za vsako maksimalno neodvisno množico. Poglejmo še odvisne množice. Po definiciji pragovnosti za vse odvisne množice $S \subseteq V$ velja $w(S) > t$. Po trditvi 4.1 so minimalne odvisne množice poljubnega grafa G natanko njegove povezave. Torej je za vsako povezavo $\{x, y\} \in E$ množica $S = \{x, y\}$ odvisna množica in po definiciji pragovnosti je njena teža $w(S) > t$.
Naj bo sedaj G graf, v katerem lahko točkam $v \in V$ dodelimo take nenegativne realne uteži $w(v)$, da za vsako maksimalno neodvisno množico $S \subseteq V$ velja $w(S) \leq t$, za vsako povezavo $\{x, y\} \in E$ pa velja $w(\{x, y\}) > t$, kjer je t neko nenegativno realno število. Pokazati moramo, da je G pragoven. Razmislimo najprej o neodvisnih množicah. Iz predpostavke vemo, da za vsako maksimalno neodvisno množico $S \subseteq V$ velja $w(S) \leq t$, torej ob upoštevanju dejstva, da so uteži nenegativne, pogoj velja tudi za vse neodvisne množice. Poglejmo sedaj še odvisne množice. Iz predpostavke vemo, da za vsako povezavo $\{x, y\} \in E$ velja $w(\{x, y\}) > t$. Po trditvi 4.1 so minimalne odvisne množice poljubnega grafa G natanko njegove povezave, kar pomeni, da množice, ki vsebujejo povezavo, vsebujejo minimalno odvisno množico, za katero velja $w(\{x, y\}) > t$, iz česar lahko sklepamo, ponovno ob upoštevanju dejstva, da so uteži nenegativne, da je tudi teža poljubne odvisne množice večja od t. Zaključimo, da je G pragoven graf. $\square$

Sedaj, ko smo definirali minimalne odvisne in maksimalne neodvisne množice ter njihovo vlogo pri preverjanju pragovnosti, si poglejmo nekatere operacije, ki pragovnost ohranjajo.

Za poljuben graf G naj $\mathcal{S}(G)$ označuje množico vseh maksimalnih neodvisnih množic grafa G.

Trditev 4.3. *Če je graf G pragoven, potem je tudi graf $G + K_1$ pragoven.*

Dokaz. Predpostavimo, da je graf G pragoven s pragovno strukturo (w, t), $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $V(K_1) = \{v_{n+1}\}$. Naj bo $\mathcal{S}(G)$ množica vseh maksimalnih neodvisnih množic grafa G. Tedaj očitno velja: $\mathcal{S}(G + K_1) = \{S \cup \{v_{n+1}\}; S \in \mathcal{S}(G)\}$. Preverimo sedaj definicijo pragovnosti za $G + K_1$. Definirajmo $w' : V(G + K_1) \to \mathbb{R}_+$ s predpisom $w'(v_i) = w(v_i)$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$ in $w'(v_{n+1}) = 0$ ter naj bo $t' = t$. Pokažimo, da je tako definiran par (w', t') pragovna struktura grafa $G + K_1$. Naj bo $S' \subseteq V(G + K_1)$. Če je S' maksimalna neodvisna množica, potem je $S' = S \cup \{v_{n+1}\}$ za neko množico $S \in \mathcal{S}(G)$ in velja $w'(S') = w'(S) + w'(v_{n+1}) = w(S) + 0 \leq t = t'$. Če pa je S' odvisna množica, potem je množica $S = S' \setminus \{v_{n+1}\}$ odvisna v grafu G in velja $w'(S') = w(S) > t = t'$. Pokazali smo, da za vsako podmnožico S' točk grafa $G + K_1$ velja, da je S' neodvisna množica natanko tedaj, ko je $w'(S') \leq t'$. Par (w', t') je torej res pragovna struktura grafa $G + K_1$ in $G + K_1$ je pragoven graf. $\square$

Trditev 4.4. *Če je graf G pragoven, potem je tudi graf $G * K_1$ pragoven.*

Dokaz. Predpostavimo, da je graf G pragoven s povsod pozitivno pragovno strukturo (w, t) (ta obstaja po trditvi 2.3) in naj bo $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ter $V(K_1) = \{v_{n+1}\}$. Tedaj velja: $\mathcal{S}(G * K_1) = \mathcal{S}(G) \cup \{\{v_{n+1}\}\}$. Preverimo definicijo pragovnosti za $G * K_1$. Definirajmo $w' : V(G * K_1) \to \mathbb{R}_+$ s predpisom $w'(v_i) = w(v_i)$, za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$, $w'(v_{n+1}) = t$ in naj bo $t' = t$. Pokažimo, da je tako definiran par (w', t') pragovna struktura grafa $G * K_1$. Naj bo $S' \subseteq V(G * K_1)$.
Če je S' maksimalna neodvisna množica grafa $G * K_1$, potem ločimo dva primera.
1. primer: Če je $S' \in \mathcal{S}(G)$, potem sledi $w'(S) = w(S) \leq t = t'$.
2. primer: Če je $S' = \{v_{n+1}\}$, potem sledi $w'(S') = t = t'$.
Če pa je S' odvisna množica, potem S' vsebuje vsaj eno povezavo $\{v_i, v_j\} \subseteq S'$ in tudi tukaj ločimo dva primera.
1. primer: $n + 1 \in \{i, j\}$. Brez škode za splošnost naj bo $n + 1 = i$. Vemo, da $\{v_{n+1}, v_j\} \subseteq S'$. Od tod sledi $w'(S') \geq w'(v_{n+1}) + w'(v_j) \geq t + w(v_j) > t = t'$.
2. primer: $n+1 \notin \{i, j\}$. V tem primeru je $w'(S') \geq w'(v_i) + w'(v_j) = w(v_i) + w(v_j) > t = t'$.
Pokazali smo, da za vsako podmnožico točk grafa $G * K_1$ velja, da je S' neodvisna natanko tedaj, ko je $w'(S') \leq t'$. Par (w', t') je torej res pragovna struktura grafa $G * K_1$ in $G * K_1$ je pragoven graf. □

Trditev 4.5. *Če je G pragoven graf in je H induciran podgraf grafa G, potem je tudi H pragoven graf.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $G = (V, E)$ pragoven graf, $U \subseteq V(G)$ in $H = G[U]$. Naj bo (w, t) pragovna struktura grafa G. Preverimo definicijo pragovnosti za H. Definirajmo $w' : V(H) \to \mathbb{R}_+$ in $t' \in \mathbb{R}_+$ s predpisom $w'(v) = w(v)$ za vse $v \in V(H)$ in $t' = t$. Pokažimo, da je tako definiran par (w', t') pragovna struktura grafa H. Naj bo $S \subseteq V(H)$. Obravnavamo dva primera.
1. primer: S je neodvisna množica v grafu H. Ker je H induciran podgraf grafa G, velja, da je S tudi neodvisna množica v grafu G. Ker je S neodvisna množica v grafu G, zanjo velja $w(S) \leq t$. Iz definicije (w', t') tako sledi, da je $w'(S) \leq t'$.
2. primer: S je odvisna množica v grafu H. Ker je H podgraf grafa G, velja, da je S odvisna množica v grafu G. Ker je S odvisna množica v grafu G, zanjo velja $w(S) > t$. Posledično velja tudi $w'(S) > t'$.
Pokazali smo, da je (w', t') pragovna struktura grafa H. Od tod sledi, da je H pragoven graf. □

V nadaljevanju bomo pozornost posvetili posebnim družinam pragovnih grafov ter dokaze ponazorili na zgledih.

Najprej si poglejmo polne grafe. Pragovnost polnih grafov je mogoče izpeljati iz pragovnosti grafa na eni točki in uporabo trditve 4.6, podali pa bomo direkten dokaz.

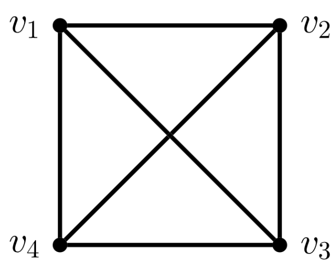
Trditev 4.6. *Za vse $n \in \mathbb{N}$ je graf K_n pragoven.*

Dokaz. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Preverimo definicijo pragovnosti za K_n. Definirajmo $w : V(K_n) \to \mathbb{R}_+$ s predpisom $w(v_i) = 1$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$ in naj bo $t = 1$. Pokažimo, da je tako definiran par (w, t) pragovna struktura grafa K_n. Naj bo $S \subseteq V(K_n)$. Če je S neodvisna množica, potem je $|S| \leq 1$ in velja $w(S) \leq 1 = t$. Če pa je S odvisna, potem S vsebuje vsaj eno povezavo, tj. obstajata taka različna indeksa $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, da velja $\{v_i, v_j\} \subseteq S$. Sledi $w(S) \geq w(v_i) + w(v_j) = 2 > 1 = t$. Pokazali smo, da za vsako podmnožico S velja, da je S neodvisna množica natanko tedaj, ko je $w(S) \leq t$. Par (w, t) je torej res pragovna struktura grafa K_n in K_n je pragoven graf. $\square$

Primer 4.7. Naj bo $G = (V, E)$ poln graf na 4 točkah, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in naj velja: $w(v_1) = w(v_2) = w(v_3) = w(v_4) = 1$ ter $t = 1$.

Podmnožice točk grafa G lahko razdelimo v dve skupini: odvisne množice in neodvisne množice. Za nas so po trditvi 4.1 pomembne zgolj:

- minimalne odvisne množice: $\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$
- maksimalne neodvisne množice: $\{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$



Slika 3: Graf K_4.

Bralec se bo z uporabo simetrije grafa (ali dokaza trditve 4.6) zlahka prepričal, da teža nobene maksimalne neodvisne množice grafa ne presega vrednosti praga t, teža poljubne minimalne odvisne množice pa to vrednost presega. ▲

Naslednjo trditev lahko izpeljemo iz trditev 4.3 in 4.4 ali pa neposredno s pomočjo uteži.

Trditev 4.8. *Za vse $n \in \mathbb{N}$ je graf $K_{1,n}$ pragoven.*

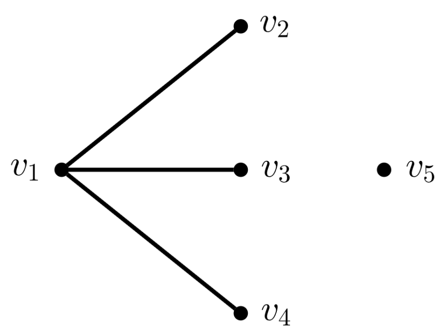
Dokaz. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $V(K_{1,n}) = \{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$, kjer je v_{n+1} univerzalna točka. Preverimo definicijo pragovnosti za $K_{1,n}$. Definirajmo $w : V(K_{1,n}) \to \mathbb{R}_+$ s predpisom

$$w(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{če je } i \leq n; \\ \text{n}, & \text{če je } i > n; \end{cases}$$

za vse $i \in \{1, \ldots, n, n+1\}$ in naj bo $t = n$. Pokažimo, da je tako definiran par (w, t) pragovna struktura grafa $K_{1,n}$. Naj bo $S \subseteq V(K_{1,n})$. Če je S neodvisna množica, ločimo dva primera. Obravnavajmo najprej primer, ko množica S vsebuje točko v_{n+1}. Potem je $|S| = 1$ in je $w(S) = n = t$. Ko pa S ne vsebuje točke v_{n+1}, potem je $|S| \leq n = t$. Če pa je S odvisna množica, potem S vsebuje vsaj eno povezavo tj. $\{v_{n+1}, v_i\} \subseteq S$ za nek $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sledi $w(S) \geq w(v_{n+1}) + w(v_i) = n + 1 > t$. Pokazali smo, da za vsako podmnožico točk grafa $K_{1,n}$ velja, da je S neodvisna natanko tedaj, ko je $w(S) \leq t$. Par (w, t) je torej res pragovna struktura grafa $K_{1,n}$ in $K_{1,n}$ je pragoven. $\square$

Sedaj ko smo se seznanili s posebno družino pragovnih grafov $K_{1,n}$, si poglejmo konkreten zgled grafa, dobljenega z operacijo disjunktne unije.

Primer 4.9. Poglejmo si primer za graf $K_{1,3} + K_1$ (glej sliko 4).



Slika 4: Graf $K_{1,3} + K_1$.

Točkam določimo uteži in prag tako, da najprej obravnavamo graf $K_{1,3}$ in šele nato graf $K_{1,3} + K_1$. Z uporabo dokaza trditve 4.8 določimo uteži za graf $K_{1,3}$: $w(v_1) = 3, w(v_2) = w(v_3) = w(v_4) = 1$ in prag $t = 3$.

Podmnožice točk grafa $K_{1,3}$ nato po trditvi 4.1 razdelimo v dve skupini:

- minimalne odvisne množice: $\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}\}$
- maksimalne neodvisne množice: $\{\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}$

Poglejmo zdaj še graf $K_{1,3} + K_1$. Z uporabo trditve 4.3 dobimo: $w'(v_1) = 3, w'(v_2) = w'(v_3) = w'(v_4) = 1, w'(v_5) = 0$ in prag $t' = t = 3$.

Ker za neodvisne množice grafa $K_{1,3} + K_1$ velja, da so te enake $S \cup \{v_5\}$, pri čemer je S neodvisna množica v grafu $K_{1,3}$, tokrat dobimo:

- minimalne odvisne množice: $\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}\}$
- maksimalne neodvisne množice: $\{\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}\}$

Preverimo sedaj ekvivalenco S neodvisna $\iff w'(S) \leq t'$.

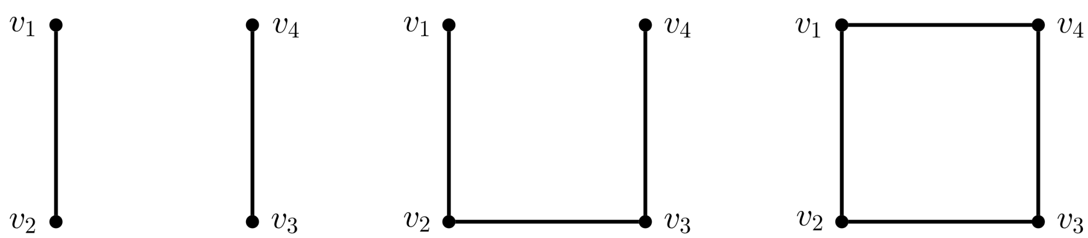
1. S neodvisna $\Rightarrow w'(S) \leq t'$
Tukaj sta maksimalni neodvisni množici teže $w'(\{v_2, v_3, v_4, v_5\}) = w'(\{v_1, v_5\}) = 3 \leq 3$.

2. S odvisna $\Rightarrow w'(S) > t'$
Za minimalne odvisne množice po trditvi 4.1 vemo, da so natanko povezave grafa, in sicer v našem primeru: $w'(\{v_1, v_2\}) = w'(\{v_1, v_3\}) = w'(\{v_1, v_4\}) = 4 > 3$.
Pokazali smo, da je $K_{1,3} + K_1$ pragoven graf. ▲

Pri določanju pragovnosti danega grafa imajo pomembno vlogo grafi $2K_2, P_4$ in C_4, ki jih definiramo, kot sledi: $V(2K_2) = V(P_4) = V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in $E(2K_2) = \{v_1v_2, v_3v_4\}$, $E(P_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3, v_4\}$ ter $E(C_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$ (glej sliko 5).

Trditev 4.10. *Če je $G \in \{2K_2, P_4, C_4\}$, potem G ni pragoven graf.*

Dokaz. Predpostavimo, da je (w, t) pragovna struktura poljubnega grafa in naj bo $w(v_i) = w_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, 4\}$.



Slika 5: Grafi $2K_2, P_4$ in C_4.

Vsem trem grafom je skupno, da imajo med neodvisnimi množicami točk množici $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}$ in med odvisnimi množicami točk množici $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}$. Za te štiri množice mora torej veljati:

$$w(\{v_1, v_3\}) = w_1 + w_3 \leq t \qquad w(\{v_1, v_2\}) = w_1 + w_2 > t$$
$$w(\{v_2, v_4\}) = w_2 + w_4 \leq t \qquad w(\{v_3, v_4\}) = w_3 + w_4 > t$$

Če sedaj seštejemo levi neenačbi, dobimo $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \leq 2t$, in če seštejemo desni neenačbi, dobimo $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 > 2t$, kar nas privede do protislovja. □

Z uporabo trditev 4.5 in 4.10 imamo sedaj enostaven način, da pokažemo, da nekateri grafi niso pragovni, in sicer tako, da izpostavimo induciran podgraf, ki je izomorfen enemu izmed grafov $2K_2, P_4$ ali C_4.

Posledica 4.11. *Vsak pragoven graf je* $\{2K_2, P_4, C_4\}$*-prost.*

Zaključimo poglavje s karakterizacijo acikličnih pragovnih grafov.

Trditev 4.12. *Naj bo G acikličen graf. Potem je G pragoven graf natanko tedaj, ko je izomorfen grafu* $K_{1,\ell} + nK_1$ *za poljubni števili* $\ell, n \geq 0$.

Dokaz. Naj bo G graf oblike $K_{1,\ell} + nK_1$ za $\ell, n \geq 0$. Obravnavamo dva primera.
1. primer: G je povezan. Potem je $n = 0$ in je G izomorfen grafu $K_{1,\ell}$ za nek $\ell \geq 0$. Glede na trditev 4.8 je graf takšne oblike pragoven.
2. primer: G ni povezan. Potem je $n > 0$ in je G izomorfen grafu $K_{1,\ell} + nK_1$ za nek $\ell \geq 0$. Graf takšne oblike je pragoven po trditvah 4.3 in 4.8.
Torej je vsak graf G oblike $K_{1,\ell} + nK_1$ za $\ell, n \geq 0$ pragoven.
Naj bo sedaj G acikličen pragoven graf. Pokažimo, da je takšen graf izomorfen grafu $K_{1,\ell} + nK_1$ za $\ell, n \geq 0$. Obravnavamo dva primera.
1. primer: G je acikličen pragoven graf brez povezav. Potem je G izomorfen grafu nK_1 za poljuben $n \geq 0$.
2. primer: G je acikličen pragoven graf, ki vsebuje ℓ povezav za nek $\ell \geq 1$. Če $\ell = 1$, potem je graf G izomorfen grafu $K_{1,1} + nK_1$. Če $\ell \geq 2$, potem morajo imeti vse povezave skupno krajišče. V nasprotnem primeru namreč graf G vsebuje induciran podgraf, izomorfen grafu $2K_2$ ali P_4, kar pa po posledici 4.11 ni mogoče. Torej je graf G izomorfen grafu $K_{1,\ell} + nK_1$ za nek $n \geq 0$.
Zaključimo, da je acikličen graf G pragoven natanko tedaj, ko je izomorfen $K_{1,\ell} + nK_1$ za poljubni števili $\ell, n \geq 0$. □

5 Karakterizacije in prepoznavanje pragovnih grafov

V prejšnjem poglavju smo se spoznali z osnovami pragovnih grafov. V tem poglavju bomo najprej podali številne karakterizacije pragovnih grafov in nato še učinkovit algoritem za prepoznavanje le-teh.

Izrek 5.1 (Chvátal in Hammer [4]). *Za vsak graf G so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. G je pragoven.

2. G je $\{2K_2, P_4, C_4\}$-prost.

3. Točke grafa G lahko razdelimo v disjunktni množici I in K, kjer je I neodvisna množica in K klika, pri čemer lahko točke v množici I razvrstimo kot $v_1, v_2, \ldots, v_k$, tako da velja $N(v_1) \subseteq N(v_2) \subseteq \ldots \subseteq N(v_k)$.

4. Graf G lahko dobimo iz grafa brez točk tako, da mu zaporedoma dodajamo po eno izolirano ali univerzalno točko.

Dokaz. 1. $\Rightarrow$ 2. To je natanko posledica 4.11.

2. $\Rightarrow$ 3. Naj bo G $\{2K_2, P_4, C_4\}$-prost graf in naj bo $I = V(G) \setminus K$, kjer je K takšna največja klika grafa G, da ima graf $G[I]$ najmanj povezav. Pokažimo najprej, da je I neodvisna množica. Da bi prišli do protislovja, predpostavimo, da graf $G[I]$ vsebuje poljubno povezavo xy. Glede na maksimalnost K nobena točka iz I ne more biti sosednja vsem elementom množice K. Če bi bili točki x in y sosednji z vsemi točkami v K, razen z eno, recimo ji z, bi bila klika $(K \setminus \{z\}) \cup \{x, y\}$ večja od K, kar je v nasprotju z maksimalnostjo klike K. Zato morata obstajati taki različni točki $u, v \in K$, da velja $xu \notin E(G)$ in $yv \notin E(G)$. Ker je graf G $\{2K_2, P_4, C_4\}$-prost, sledi, da je vsaj ena od povezav xv ali yu v $E(G)$, sicer dobimo induciran podgraf, izomorfen grafu $2K_2$. Če je natanko ena od povezav xv ali $yu \in E(G)$, potem dobimo induciran podgraf, izomorfen grafu P_4, in če velja $\{xv, yu\} \in E(G)$, potem dobimo induciran podgraf, izomorfen grafu C_4. Iz tega protislovja izpeljemo, da je I neodvisna množica. Poglejmo sedaj še drugi del dokaza o vsebovanosti soseščin. Pokazati moramo, da so soseščine točk iz množice I v grafu G paroma primerljive glede na relacijo inkluzije. Predpostavimo nasprotno in sicer, da obstajata sošeščini, ki nista primerljivi. V $\{2K_2, P_4, C_4\}$-prostem grafu G obravnavajmo različni točki $x, y \in I$. Glede na zgornji

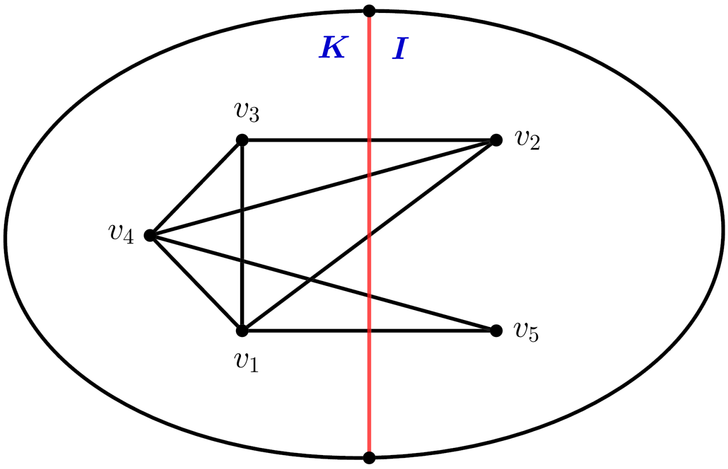
del dokaza vemo, da $xy \notin E(G)$. Predpostavimo, da $N_G(x) \nsubseteq N_G(y)$ in $N_G(y) \nsubseteq N_G(x)$. Naj bo u točka, ki je sosednja s točko x, ne pa tudi s točko y, in naj bo v točka, ki je sosednja s točko y, ne pa tudi s točko x. Tedaj sta točki u in v elementa klike K in posledično točke x, y, u, v inducirajo podgraf, izomorfen grafu P_4. S tem pridemo do protislovja. Dokazali smo, da morajo biti soseščine točk v množici I paroma primerljive. Od tod pa sledi, da točke množice I lahko razvrstimo kot $v_1, \ldots, v_k$, tako da velja $N(v_1) \subseteq N(v_2) \subseteq \ldots \subseteq N(v_k)$.

3. $\Rightarrow$ 4. Naj bo G graf, v katerem lahko točke razdelimo v disjunktni množici I in K, kjer je K klika in je $I = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ neodvisna množica, v kateri so točke razvrščene tako, da velja $N(v_1) \subseteq \cdots \subseteq N(v_k)$. Pokazali bomo, da obstaja takšno zaporedje odstranjevanja točk iz grafa G, ki bo v vsakem koraku odstranilo izolirano ali univerzalno točko.
Če v grafu G obstaja izolirana točka x, jo odstranimo. Predpostavimo sedaj, da graf G ne vsebuje nobene izolirane točke. Potem množica K ni prazna in lahko v njej izberemo točko x največje stopnje. Trdimo, da je točka x univerzalna v grafu G. Če ne bi bila, bi obstajala točka v_i v množici I, ki ni sosednja z x. Ker točka v_i ni izolirana, ima v množici K nekega soseda, recimo mu y. Ker pa je točka v_i sosednja s točko y, ne pa tudi s točko x, zaradi maksimalnosti stopnje točke x v množici I obstaja neka točka v_j, ki je sosednja s točko x, ne pa tudi s točko y. To pa je protislovje s pogojem, da sta soseščini točk v_i in v_j primerljivi. Sledi, da je x res univerzalna točka v grafu G. Opazimo, da (v obeh primerih) graf $G' = G - x$ še vedno ustreza opisu iz točke 3 izreka. Postopek lahko zato ponovimo na grafu G' in ga nadaljujemo na vseh naslednjih (manjših) grafih, dokler ne izbrišemo vseh točk grafa G. Če zaporedje, po katerem smo odstranjevali točke, obravnavamo v obratnem vrstnem redu, dobimo ravno zaporedje, ki ustreza točki 4 izreka.

4. $\Rightarrow$ 1. Pokažimo implikacijo z indukcijo po številu n točk grafa G.
Za $n = 1$ je graf K_1 pragoven po trditvi 4.6. Predpostavimo, da za neko celo število $n \geq 1$ trditev velja za grafe z $|V(G)| \leq n$ in pokažimo, da velja tudi za grafe na $n + 1$ točkah. Naj bo G graf na $n + 1$ točkah, $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$, ki smo ga dobili z nekim zaporedjem dodajanja izoliranih ali univerzalnih točk. Naj bo v_{n+1} izolirana ali univerzalna točka v grafu G in naj bo $G' = G - v_{n+1}$. Po indukcijski predpostavki je graf G' pragoven. Če je v_{n+1} univerzalna točka, potem je $G \cong G' * K_1$ pragoven graf po trditvi 4.4, če pa je v_{n+1} izolirana točka, potem je $G \cong G' + K_1$ pragoven graf po trditvi 4.3. □

Poglejmo si sedaj zgled, kako lahko pragovnost grafa na sliki 2 (str. 14) preverimo z uporabo strukturne karakterizacije pragovnih grafov, podane s pravkar dokazanim izrekom.

Primer 5.2. Spomnimo se presečnega grafa $G(\mathbf{A_2})$ na sliki 2, s pomočjo katerega smo poiskali eno samo neenačbo, ki je opisala binarne rešitve našega sistema linearnih neenačb. Kot smo ugotovili, je graf $G(\mathbf{A_2})$ pragoven, zato bomo sedaj ta graf narisali na podlagi točke 4 izreka 5.1.
Postopek je sledeč: Začnemo z grafom brez točk in mu zaporedoma dodajamo po eno izolirano ali univerzalno točko. V našem primeru začnemo z izolirano točko v_2, ki ji dodamo univerzalno točko v_3, tej sledita izolirana točka v_5 ter univerzalna točka v_1 in kot zadnja, univerzalna točka v_4. Kar dobimo, je presečni graf $G(\mathbf{A_2})$.
Poglejmo si sedaj sliko grafa $G(\mathbf{A_2})$ skladno s točko 3 izreka 5.1, kjer ustrezno razvrstitev točk iz I dobimo tako, da točke obravnavamo po vrsti (od tiste, ki je bila dodana najprej, do zadnje dodane), tj. $N(v_5) \subseteq N(v_2)$.



Slika 6: Presečni graf $G(\mathbf{A_2})$, skladno s točko 3 izreka 5.1. ▲

Lastnost pragovnosti lahko preverimo tudi na komplementu grafa.

Posledica 5.3. *Graf G je pragoven natanko tedaj, ko je njegov komplement pragoven.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je G pragoven graf. Torej po točki 4 izreka 5.1 lahko takšen graf dobimo iz grafa brez točk tako, da mu zaporedoma dodajamo po eno izolirano ali univerzalno točko. Komplement takšnega grafa je posledično tudi sestavljen iz izoliranih in univerzalnih točk ter po trditvah 4.9 in 4.4 pragoven.
Naj bo sedaj $\overline{G}$ pragoven graf. Ker je graf G komplement svojega komplementa, po že dokazanem sledi, da je G pragoven graf. □

Izrek 5.1 implicira, da so pragovni grafi bolj izjema kot pravilo. To lahko sklepamo iz ekvivalence med točkama 1 in 3 izreka 5.1, saj pridemo do zaključka, da število različnih pragovnih grafov s točkami $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ne presega $n!2^{n-1}$. Po drugi strani pa je število

vseh različnih grafov z enako množico točk natanko $2^{n(n-1)/2}$. Torej naključno izbran graf skoraj gotovo ne bo pragoven.
Sledi algoritem, ki za vsak graf G najde enega od treh prepovedanih induciranih podgrafov ali particijo in razvrstitev kot v točki 3 izreka 5.1. Pravilnost algoritma je utemeljena v [4].

Algoritem točke grafa G uredi kot $v_1, \ldots, v_n$ glede na njihove nepadajoče stopnje točk in obravnava urejeno particijo (P, S, Q) množice točk z naslednjimi lastnostmi:

- za vse $v_i \in P, v_j \in S, v_k \in Q$ velja $i < j < k$,
- vsaka točka $v_j \in P$ je sosedna vsem točkam v_i, za katere velja $i < j$, in je Q množica, v kateri vsaka točka $v_j \in Q$ ni sosedna nobeni od točk v_i za katere je $i > j$,
- vsaka točka $w \in S$ je sosedna vsem točkam iz množice P in nobeni točki iz množice Q.

Na začetku izvajanja algoritma je $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, množici P in Q pa sta prazni.

Algoritem 1: Algoritem za prepoznavanje pragovnih grafov

Vhod: Graf G

Izhod: Prepovedan induciran podgraf ali particija množice $V(G)$, opisana v točki 3 izreka 5.1

1 Točke grafa G uredimo nepadajoče glede na njihove stopnje: $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, kjer je $d_G(v_1) \geq \ldots \geq d_G(v_n)$.
2 Naj bo $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $P = Q = \emptyset$.
3 **če** $n = 1$ **potem**
4   ima zaporedje S samo en člen, poimenujemo to točko v_1;
5   če je $d_G(v_1) \in \{0, 1\}$, zamenjamo Q s $Q \cup \{v_1\}$, sicer zamenjamo P s $P \cup \{v_1\}$;
6   se ustavimo: množica P predstavlja kliko in množica Q neodvisno množico dobljenega pragovnega grafa G
7 **sicer**
8   naj bo v_1 prvi člen zaporedja S in v_n zadnji, torej je $n > 1$ in za vsak $v \in S$ velja $|P| + n - 1 \geq d_G(v_1) \geq d_G(v) \geq d_G(v_n) \geq |P|$
9   **če** $d_G(v_1) = |P| + n - 1$ **potem**
10         $u = v_1$;
11   izbrišemo u iz S;
12   v P dodamo točko $\{v_1\}$;
13   n zamenjamo z $n - 1$;
14   vrnemo se na vrstico 3
15   **sicer če** $d_G(v_n) = |P|$ **potem**
16         $u = v_n$;
17   izbrišemo u iz S;
18   v Q dodamo točko $\{v_n\}$;
19   n zamenjamo z $n - 1$;
20   vrnemo se na vrstico 3
21   **sicer če** $|P| < d_G(v_n) \leq d_G(v_1) < |P| + n - 1$ **potem**
22         $u_1 = v_1$;
23   poiščemo točko $u_3 \in S$, ki ni sosednja točki u_1;
24   poiščemo točko $u_2 \in S$, ki je sosednja točki u_3;
25   poiščemo točko $u_4 \in S$, ki je sosednja točki u_1, ampak ne u_2;
26   se ustavimo: točke u_1, u_2, u_3, u_4 inducirajo $2K_2, P_4$ ali C_4.

Poglejmo si delovanje algoritma 1 na zgledu.

Primer 5.4. Naj bo $G = K_{1,3} + K_1$. Potem je $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ in zaporedje stopenj točk v množici S je enako $(3, 1, 1, 1, 0)$, $n = 5$ in $P = Q = \emptyset$.

- Ker $n \neq 1$, gremo na vrstico 7. Za vsak $v \in S$ velja $0 + 5 - 1 > d_G(v_1) = 3 \geq d_G(v) \geq d_G(v_5) = |P| = 0$.
- Ker je $d_G(v_1) < |P| + n - 1$ in $d_G(v_n) = 0 = |P|$, nadaljujemo v vrstici 15:

  Definiramo u kot $u = v_n$, izbrišemo u iz S, torej je $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in zaporedje stopenj točk v množici S je enako $(3, 1, 1, 1)$, v Q dodamo u, torej je $Q = \{v_5\}$ in zmanjšamo n za 1, torej $n = 4$ ($P = \emptyset$ ostane nespremenjen).
- Ker $n \neq 1$, gremo na vrstico 7. Za vsak $v \in S$ velja $0 + 4 - 1 \geq d_G(v_1) = 3 \geq d_G(v) \geq d_G(v_4) = 1 \geq |P| = 0$.
- Ker je $d_G(v_1) = 3 = |P| + n - 1$, nadaljujemo v vrstici 9:

  Redefiniramo u kot $u = v_1$, izbrišemo u iz S, torej je $S = \{v_2, v_3, v_4\}$ in zaporedje stopenj točk v množici S je enako $(1, 1, 1)$, v P dodamo u, torej je $P = \{v_1\}$ in zmanjšamo n za 1, torej $n = 3$ ($Q = \{v_5\}$ ostane v tem koraku nespremenjen).
- Ker $n \neq 1$, gremo na vrstico 7. Za vsak $v \in S$ velja $0 + 3 - 1 \geq d_G(v_1) = 1 \geq d_G(v) \geq d_G(v_3) = 1 = |P|$.
- Ker je $d_G(v_1) < |P| + n - 1$ in $d_G(v_n) = 0 = |P|$, nadaljujemo v vrstici 15:

  Redefiniramo u kot $u = v_n$, izbrišemo u iz S, torej je $S = \{v_2, v_3\}$ in zaporedje stopenj točk v množici S je enako $(1, 1)$, v Q dodamo u, torej je $Q = \{v_4, v_5\}$ in zmanjšamo n za 1, torej $n = 2$ ($P = \{v_1\}$ ostane v tem koraku nespremenjen).
- Ponovno začnemo v vrstici 7. Za vsak $v \in S$ velja $0 + 2 - 1 \geq d_G(v_1) = 1 \geq d_G(v_2) = 1 = |P|$.
- Ker je $d_G(v_1) < |P| + n - 1$ in $d_G(v_n) = 0 = |P|$, nadaljujemo v vrstici 15:

  Redefiniramo u kot $u = v_n$, izbrišemo u iz S, torej je $S = \{v_2\}$ in zaporedje stopenj točk v množici S je enako (1), v Q dodamo u, torej je $Q = \{v_3, v_4, v_5\}$ in zmanjšamo n za 1, torej $n = 1$ ($P = \{v_1\}$ ostane tudi tokrat nespremenjen).
- Ker je $n = 1$ nadaljujemo v vrstici 3:

  Zaporedje S ima samo en člen, v_2. Poimenujmo to točko v_1. Ker je $d_G(v_1) = 1$, točko v_2 dodamo v Q, torej je $Q = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ in se ustavimo.

  Množica $P = \{v_1\}$ predstavlja kliko in množica $Q = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ neodvisno množico začetnega pragovnega grafa G. ▲

Poglejmo si sedaj primer poteka algoritma na nepragovnem grafu.

Primer 5.5. Naj bo $G = C_5$. Potem je $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ in zaporedje stopenj točk v množici S je enako $(2, 2, 2, 2, 2)$, $n = 5$ in $|P| = |Q| = 0$.

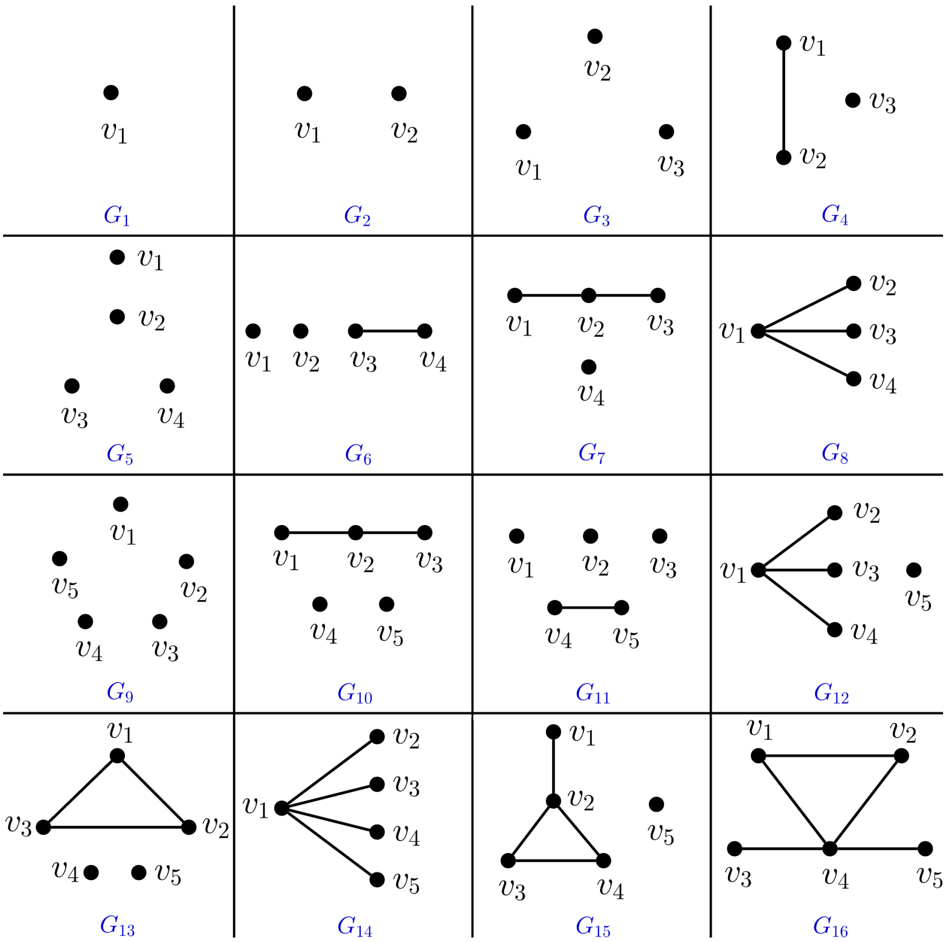
- Ker $n \neq 1$, gremo na vrstico 7. Za vsak $v \in S$ velja $0 + 5 - 1 \geq d_G(v_1) = 2 \geq d_G(v) \geq d_G(v_5) = 2 \geq |P|$.
- Ker je $0 = |P| < d_G(v_n) = 2 \leq d_G(v_1) = 2 < |P| + n - 1 = 4$, nadaljujemo v vrstici 21:

  Definiramo u_1 kot $u_1 = v_1$ ter poiščemo točke u_3, u_2 in u_4, recimo $u_3 = v_3, u_2 = v_2$ in $u_4 = v_5$ ter se ustavimo: točke u_1, u_2, u_3, u_4 v tem primeru inducirajo P_4. ▲

6 Seznam pragovnih grafov na največ 5 točkah

V nadaljevanju podajamo, do izomorfizma natančno, vse grafe na na največ 5 točkah, za katere velja $|E(G)| \leq |E(\overline{G})|$, ločeno glede na to, ali so pragovni ali ne. Pogoj $|E(G)| \leq |E(\overline{G})|$ je utemeljen s posledico 5.3.

Najprej poiščimo seznam vseh grafov G na največ 5 točkah (glej npr. [13]), ki imajo največ toliko povezav, kot njihovi komplementi. Ugotovimo, da je takšnih grafov 28 in izkaže se, da je med njimi 16 pragovnih in 12 nepragovnih grafov. Obravnavajmo najprej grafe, $G_1, \ldots, G_{16}$, ki so pragovni in so prikazani na sliki 7.



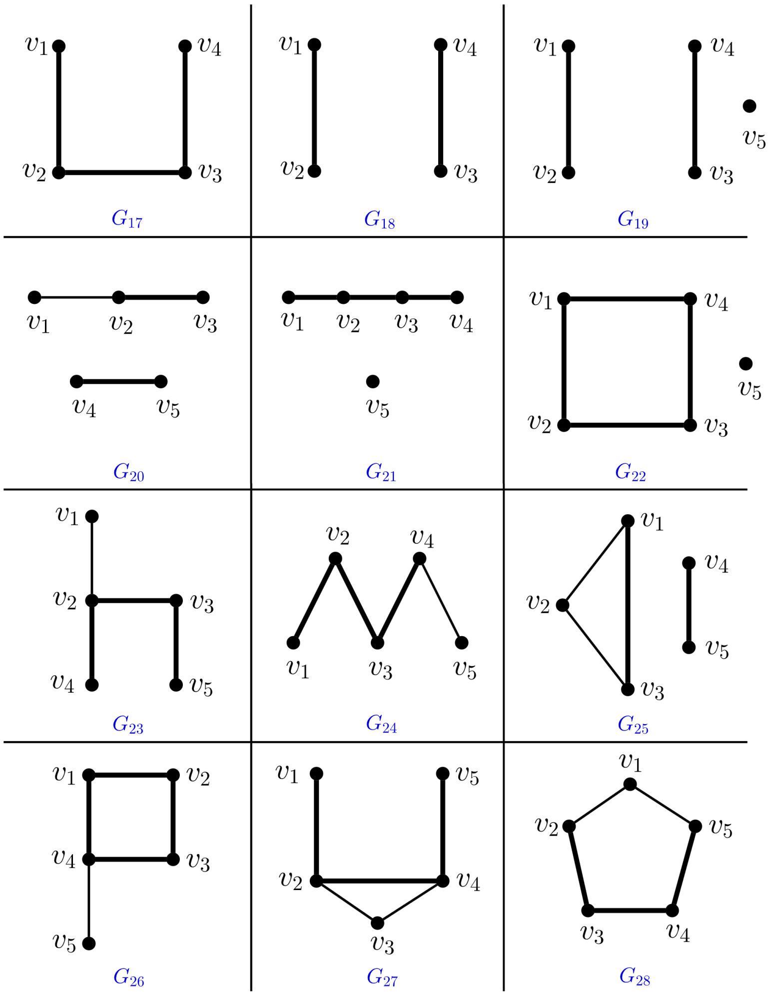
Slika 7: Pragovni grafi $G_1, \ldots, G_{16}$.

Z uporabo trditev v poglavju 4 lahko enostavno preverimo pragovnost teh grafov, kot je prikazano v tabeli 1:

Graf	Trditev	Razlog
G_1	4.6	$G_1 \cong K_1$
G_2	4.3 ali 4.6 in 5.3	$G_2 \cong G_1 + K_1$ $G_2 \cong \overline{K_2}$
G_3	4.3 ali 4.6 in 5.3	$G_3 \cong G_2 + K_1$ $G_3 \cong \overline{K_3}$
G_4	4.3 in 4.6 ali 4.8 in 5.3	$G_4 \cong K_2 + K_1$ $G_4 \cong \overline{K_{1,2}}$
G_5	4.3 ali 4.6 in 5.3	$G_5 \cong G_3 + K_1$ $G_5 \cong \overline{K_4}$
G_6	4.3	$G_6 \cong G_4 + K_1$
G_7	4.8 in 4.3	$G_7 \cong K_{1,2} + K_1$
G_8	4.8 ali 4.4	$G_8 \cong K_{1,3}$ $G_8 \cong G_3 * K_1$
G_9	4.3 ali 4.6 in 5.3	$G_9 \cong G_5 + K_1$ $G_9 \cong \overline{K_5}$
G_{10}	4.3	$G_{10} \cong G_7 + K_1$
G_{11}	4.3	$G_{11} \cong G_6 + K_1$
G_{12}	4.3	$G_{12} \cong G_8 + K_1$
G_{13}	4.3 in 5.3	$G_{13} \cong \overline{G_8} + K_1$
G_{14}	4.8 ali 4.4	$G_{14} \cong K_{1,4}$ $G_{14} \cong G_5 * K_1$
G_{15}	4.3 in 5.3	$G_{15} \cong \overline{G_7} + K_1$
G_{16}	4.4	$G_{16} \cong G_6 * K_1$

Tabela 1: Tabela za utemeljitev pragovnosti grafov $G_1, \ldots, G_{16}$

Poglejmo zdaj še nepragovne grafe na največ 5 točkah, ki imajo največ toliko povezav kot njihovi komplementi. Vsak izmed teh grafov vsebuje nek induciran podgraf, ki je izomorfen enemu izmed grafov $2K_2, P_4$ ali C_4, kot je prikazano na sliki 8 (odebeljeno), kar glede na posledico 4.11 zadošča za utemeljitev nepragovnosti.



Slika 8: Nepragovni grafi $G_{17}, \ldots, G_{28}$.

7 Zaključek

V zaključni nalogi smo se seznanili s pragovnimi grafi in zanje podali številne karakterizacije. Spoznali smo osnove pragovnih grafov, tj. grafov oblike $G = (V, E)$, katerih točkam $v \in V$ je mogoče dodeliti take nenegativne realne uteži $w(v)$, da za vsako množico $S \subseteq V$ velja: S je neodvisna množica v grafu G natanko tedaj, ko velja $w(S) := \sum_{v \in S} w(v) \leq t$, kjer je $t \in \mathbb{R}_+$ prag, ki ga teža nobene neodvisne množice ne sme preseči.
V poglavju o motivaciji smo nato obravnavali sisteme linearnih neenačb in prišli do spoznanja, da lahko množice binarnih rešitev sistema linearnih neenačb za binarno matriko $\mathbf{A}$, kjer je desna stran sistema določena z vektorjem samih enic, opišemo z eno samo neenačbo natanko tedaj, ko je presečni graf matrike, $G(\mathbf{A})$ pragoven.
Sledilo je najobsežnejše poglavje, kjer smo se posvetili minimalnim odvisnim množicam poljubnega grafa in ugotovili, da so to natanko njegove povezave. Obravnavali smo tudi posebne družine grafov, ki so pragovni, kot sta družini polnih grafov in zvezd ter nekatere operacije (kot sta disjunktna unija z grafom na eni točki in spoj z grafom na eni točki), ki ohranjajo pragovnost. Poglavje smo zaključili s karakterizacijo acikličnih pragovnih grafov. Z dokazom te trditve smo tudi prešli na osrednje poglavje zaključne naloge.
Osrednje poglavje sestavljata karakterizaciji pragovnih grafov s pomočjo prepovedanih induciranih podgrafov ter kompozicijskega strukturnega izreka. Strukturna karakterizacija pragovnih grafov prav tako implicira, da naključno izbran graf skoraj gotovo ne bo pragoven.
V zadnjem poglavju smo podali učinkovit algoritem za prepoznanje pragovnih grafov ter pregled pragovnih in nepragovnih grafov na največ 5 točkah, katerih število povezav ne presega števila povezav njihovega komplementa.

V zaključni nalogi smo že omenili nekatere posplošitve pragovnih grafov: pragovno dimenzijo grafa in pragovne Boolove funkcije. Dodatne posplošitve in koncepte, povezane s pragovnimi grafi, lahko radoveden bralec najde v knjigi Mahadeva in Peleda [10].

8 Literatura in viri

[1] G.H. Bradley, Transformation of integer programs to knapsack problems. *Discrete Math.* 1 (1971) 29-45. *(Citirano na strani 1.)*

[2] N. Chiarelli, *Novi koncepti in rezultati v teoriji dominacije in prirejanj v grafih*, doktorska disertacija, Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, 2016. *(Citirano na strani 9.)*

[3] C.K. Chow, Boolean functions realizable with single threshold devices. *Proc. IRE 49* (1961) 370-371. *(Citirano na strani 10.)*

[4] V. Chvátal in P.L. Hammer, Aggregation of inequalities in integer programming. *Annals os Discrete Math.* 1 (1977) 145–162. *(Citirano na straneh 3, 4, 5, 9, 22 in 25.)*

[5] V. Chvátal in P.L. Hammer, Set-packing problems and threshold graphs. *Combinatorics and Optimization Research Report CORR* 73-21 (1973) University of Waterloo. *(Citirano na strani 1.)*

[6] M.B. Cozzens in R. Leibowitz, Threshold dimension of graphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods* 5 (1984) 579-595. *(Citirano na strani 4.)*

[7] Y. Crama in P.L. Hammer, *Boolean Functions – Theory, Algorithms and Applications.* Cambridge University Press, 2011. *(Citirano na strani 9.)*

[8] C.C. Elgot, Truth functions realizable by single threshold organs. *IEE Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design* (1961) 225-245. *(Citirano na strani 10.)*

[9] P.B. Henderson in Y. Zalcstein, A graph-theoretic characterization of the $\mathrm{PV}_{\mathrm{chunk}}$ class of synchronizing primitives. *SIAM Journal on Computing* (1977) 6:88-108. *(Citirano na strani 1.)*

[10] N.V.R. Mahadev in U.N. Peled, *Threshold Graphs and Related Topics.* North Holland, 1995. *(Citirano na straneh 2 in 32.)*

[11] J. Matoušek in B. Gärtner, *Understanding and Using Linear Programming.* Springer, 2006. *(Citirano na strani 11.)*

[12] M. Milanič in G. Rudolf, Structural results for equistable graphs and related graph classes. *RUTCOR Research Report* 25-2009 (2009) Rutgers University. *(Citirano na strani 5.)*

[13] H.N. de Ridder, *Information System on Graph Classes and their Inclusions*, `http://www.graphclasses.org/smallgraphs.html`. (Datum ogleda: 7. 7. 2016.) *(Citirano na strani 29.)*

[14] M. Yannakakis, The complexity of the partial order dimension problem. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* (1982) 3:351-358. *(Citirano na strani 1.)*