Bojan Kuzma
ZBIRKA IZPITNIH VPRAŠANJ PRI PREDMETIH ANALIZA I
IN ANALIZA II

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 1)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje – TeMeNa,
Univerza na Primorskem
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper
Tel.: + 386 5 611 75 00
Fax.: + 386 5 611 75 30
E-mail: info@upr.si
http://www.upr.si

Koper, 2009

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517(075.8)(079.1)

KUZMA, Bojan
Zbirka izpitnih vprašanj pri predmetih Analiza I in Analiza II [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 1)

Način dostopa (URL): http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_1_DS.pdf

ISBN 978-961-92689-0-2

246642176

Zbirka izpitnih vprašanj pri predmetih Analiza I in Analiza II

Bojan Kuzma

Koper, 2009

Kazalo

1 Predgovor

Zaradi stalnih in ponavljajočih se želja slušateljev po primerkih starih izpitnih vprašanj sem se odločil izdati zbirko vseh kolokvijev in izpitov pri predmetih kjer sem svojčas sam vodil vaje in ki v grobem ustrezajo sedanjima Analiza I in Analiza II. Zbirka je nastajala skozi več let. V tem času sem vodil vaje na Univerzi v Mariboru in kasneje na Univerzi v Ljubljani, zato najbrž ne bo presenetljivo, da zasledite ponekod naslov "KOLOKVIJ IZ ANALIZE I," drugod pa "KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I". Tukaj ni odveč opozorilo, da so bili takrat vsi predmeti celoletni in ne semestrski. Tako npr. Analiza I pokriva celotno področje semestralnih predmetov Analiza I +II.

Tudi termin predavanja učne snovi je bil na eni univerzi malce drugačen kot na drugi - tako je npr. ponekod v curriculumu bil tudi delček linearne algebre. V kolikor je bila večina nalog na kakšnem od izpitov oz. kolokvijev iz tega področja, ga nisem uvrstil v pričujočo zbirko. Če pa so bile naloge iz linearne algebre v manjšini, mogoče ena ali dve, sem ga vključil. Na tem mestu bi rad dodal, da naloge niso moje. Večinoma sem jih črpal iz znanih zbirk nalog kot so

(i) M. Ušćumlić, P. Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike 1. Beograd. Naučna knjiga, 1984.

(ii) B. G. Sergeevič, B. P. Demidovič (prevajalec I. Uremović): Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke. Zagreb. Tehnička knjiga, 1978.

(iii) M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič: Rešene naloge iz analize I. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1972.

(iv) V. Batagelj: Diskretne strukture. 1 - naloge. Ljubljana, IMFM FNT, Oddelek za matematiko, 1979.

(v) M. Dobovišek, B. Magajna: Naloge iz algebre 1. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1984.

(v) M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre. Ljubljana, Pedagoška fakulteta, 1996.

(vi) P. Mizori-Oblak, B. Krušič (avtor dodatnega besedila): Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 1. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1997.

(vii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 2. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1991.

Tu in tam pa se najde tudi kakšna izvirna naloga.

Glede na raznovrstnost snovi sem bil dolgo časa v dilemi, v katerem vrstnem redu naj zbirko uredim. Odločil sem se za kronološki razpored. Naj na koncu zaželim obilo veselja pri reševanju.

2 Kolokviji

KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

2.3.1995

1. Ali je integral
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$
   (a) konvergenten?
   (b) abolutno konvergenten?

2. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje zanka, podana v polarnih koordinatah z
$$r(\varphi) := a|\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 6\varphi|$$

3. Izračunaj na 4 decimalke natančno integral
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx;$$
   utemelji vsak korak!
   (Nasvet: Taylorjeva formula.)

4. Za katere $x \in \mathbb{R}$ je definirana funkcija
$$f(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{x^2+n}?$$
   Ali konvergira absolutno? Ali je zvezna?
   (Nasvet: pri zveznosti lahko uporabiš Leibnitzev kriterij.)

5. Izračunaj
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{2^n}\ !$$

KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

6.12.1995

1. Dokaži, da je
$$\prod_{i=0}^{n}(1+x^{2^i}) = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} x^j.$$
(Nasvet: pomagaj si s popolno indukcijo.)

2. Bodi $z \in \mathbb{C}$ in $n \in \mathbb{N}$. Dokaži neenačbo
$$|(1+z)^n - 1| \leq (1+|z|)^n - 1.$$

3. Dano je zaporedje
$$\begin{aligned} a_0 &:= -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} &:= a_n^2 + 2a_n. \end{aligned}$$
Dokaži, da je monotono, omejeno in izračunaj limito.

4. Za katere realne x je vrsta
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$$
konvergentna? Za katere x konvergira absolutno in za katere pogojno?

KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

8.12.1995

1. Reši neenačbo
$$\left|\frac{x+4}{3x+2}\right| > \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Dokaži, da je
$$\cos\frac{x}{2^1}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

3. Dano je zaporedje
$$\begin{aligned} a_0 &:= -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} &:= a_n^2 + 2a_n. \end{aligned}$$
Dokaži, da je monotono, omejeno in izračunaj limito.

4. Naj bosta
$$g(x) := \begin{cases} 3x-1; & |x| \geq 3 \\ \sin x; & |x| > 3 \end{cases} \qquad\qquad f(x) := \begin{cases} x^3; & x > -1 \\ 1; & x \leq -1 \end{cases}$$
Poišči funkciji $(g \circ f)(x)$ in $(f \circ g)(x)$!

5. Izračunaj limito $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{x+1}-1}$

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

17.1.1996

1. Poišči naslednji limiti:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$

   (Nasvet: Zadnjo limito lahko izračunaš tudi tako, da najprej izraz kvadriraš.)

2. Poišči kot, pod katerim se sekata krivulji

$$x^2+y^2=2 \quad \text{in} \quad y=x^2.$$

3. Točka M se giblje po cikloidi, katere enačba je

$$x(t)=a(t-\sin t) \qquad y(t)=a(1-\cos t).$$

   Naj bo P pravokotna projekcija točke M na absciso, S pa naj bo presek abscise z normalo cikloide v točki M. Za katero točko M je površina trikotnika MPS maksimalna? Kolika je tedaj ploščina?

4. Integriraj

   (a) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\tan x}\,dx$

KOLOKVIJ IZ ANALIZE I za višješolce

19.1.1996

1. Poišči naslednji limiti

   (a) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\tan\dfrac{x}{2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{\tan x} \quad (a, b > 0)$

2. Določi definicijsko območje, ničle, asimptote ekstreme, prevojne točke in nariši funkcijo, podano z

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

3. Izmed vseh pravokotnih trikotnikov obsega $2s$ poišči tistega z največjo ploščino!

4. Napiši enačbo tangente in normale krivulje, podane parametrično z

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$$

   v točkah $t = 0$ in $t = 1$.

5. Integriraj

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int (x+2)e^{\sqrt{x+2}}\,dx$

KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

19.1.1996

1. Poišči naslednji limiti

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{\tan x} \quad (a, b > 0)$

2. Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote ekstreme, prevojne točke in nariši funkcijo, podano parametrično z

$$x = \cos t(\sqrt{2} \cot t + 1)$$
$$y = \sin t(\sqrt{2} \cos t - 1).$$

3. Izmed vseh pravokotnih trikotnikov obsega $2s$ poišči tistega z največjo ploščino!

4. Določi kot med levo in desno tangento krivulje

$$y = \sqrt{1 - e^{-(ax)^2}}$$

   v točki $x = 0$.

5. Integriraj

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} \, dx$

   (b) $\displaystyle\int (x + 2) e^{\sqrt{x+2}} \, dx$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

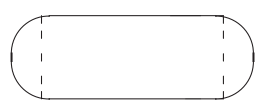
17.1.1997

1. Izračunaj limito
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$$
(Nasvet: Limito lahko izračunaš tudi tako, da najprej izraz kvadriraš, nato pa uporabiš L'Hospitalovo pravilo. Nazadnje moraš dobljeni rezultat še koreniti. Ali je rezultat pozitiven, ali negativen?)

2. Poišči odvod od funkcije $y(x) = x^{(x^x)}$ (torej je $y(3) = 3^{27}$).

3. Določi definicijsko območje, ničle, pole, asimptote, sodost oz. lihost ter ekstreme in s pomočjo teh podatkov čimbolj natančno nariši graf funkcije
$$y := \frac{x^2-3x+2}{2x^2-6x+18}$$

4. Teniško igrišče obsega $2s$ ima obliko pravokotnika, ki se na obeh straneh končuje s polkrogom. Kakšne so dimenzije igrišča, da bo površina pravokotnega dela maksimalna?



5. Integriraj
$$\int \frac{dx}{1+\tan x}\,dx$$

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

26.11.1997

1. Z uporabo popolne indukcije pokaži, da je

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \pm \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

2. Katere realne rešitve ima neenačba

$$\left|\frac{x+4}{3x+2}\right| > \frac{1}{x}$$

3. Poišči limite zaporedij

   (a) $a_n := \sqrt{an+b} - \sqrt{an+c}; \quad a > 0$

   (b) $\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$

4. Poišči definicijsko območje, ničle, pole, ekstreme ter asimptote in nato čimbolj natančno nariši funkcijo

$$y = xe^{-x^2}$$

5. Na abscisni osi sta dani točki $T_1(a,0)$ in $T_2(b,0)$; pri čemer je $0 \le a < b$. Poišči tako točko M na **ordinatni osi**, iz katere vidimo daljico $\overline{T_1T_2}$ pod največjim možnim kotom!

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

29.11.1997

1. Dano je zaporedje

$$\begin{aligned} x_0 &:= 2.5 \\ x_{n+1} &:= 9 - 5x_n + x_n^2 \end{aligned}$$

   (a) Dokaži, da je omejeno!

   (b) Dokaži, da je monotono!

   (c) Določi vsa njegova stekališča!

2. Naj za *kompleksni* števili a, b velja, da je $|a| \leq 1$ in $|b| \leq 1$. Pokaži, da je tedaj

$$|a + b| \leq |1 + \bar{a}b|.$$

   Kdaj velja enačaj?

3. Dana je množica realnih števil

$$M := \left\{\tfrac{m-\sqrt{m}}{m+1};\quad m \in \mathbb{N}\right\}$$

   Pokaži, da je $\min M = 0$, in da $\max M$ ne obstaja! Ali obstaja $\inf M$ oz. $\sup M$?

4. Poišči limite

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

4'. Število, ki ima v devetiškem sistemu naslednje števke: $37.(0873227014)_9$, zapiši v enajstiškem sistemu. (Števke, ki so v oklepaju, se periodično ponavljajo!)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I A

18.1.1998

1. Pokaži, da vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k!}} \qquad (k! = 1 \cdot 2 \cdots k)$$

   konvergira. Koliko členov moramo vzeti, in na koliko decimalk moramo zaokroževati delne rezultate, da bi jo izračunali na dve decimalki natančno. Kolika je njena vrednost (na dve decimalki!) (35 točk)

2. Poišči maksimum in minimum funkcije $f(x) := \sin(x^2)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. (30 točk)

3. Rekurzivno je podano zaporedje

$$a_1 := 1; \quad a_{n+1} := 2\sqrt{a_n}$$

   Preveri, da je monotono in navzgor omejeno, ter izračunaj limito. (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

26.1.1998

1. Poišči limiti
$$\text{a)} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin x^{-1}}{\sin x} \qquad \text{b)} \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

2. Preveri, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2+n)}$$
konvergira, in izračunaj njeno vsoto!

3. Razvij funkcijo
$$f(x) := \frac{2x+1}{1+x^2}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Za katere x vrsta konvergira?

4. Dana je funkcija
$$f(x) := xe^{-x^{-2}}.$$
Poišči njeno definicijsko območje, in jo razširi do zvezne funkcije na $\mathbb{R}$. Določi ekstreme, prevoje in asimptote ter jo čim natančneje nariši.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

2.12.1998

1. Naj bo $x \geq -1$ in $n \in \mathbb{N}$. S pomočjo popolne indukcije se prepričaj, da je
$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$
(35 točk)

2. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani s predpisom
$$g : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1; & x \geq 1 \\ \arctan x; & sicer \end{cases} \qquad f : x \mapsto \begin{cases} \sin x; & x > -1 \\ 1; & x \leq -1 \end{cases}$$
Poišči funkcijo $(g \circ f)(x)$! (35 točk)

3. Poišči vse rešitve enačbe $z^4 = 8i\overline{z}$, kjer $z \in \mathbb{C}$.
(Nasvet: Enačbo pomnoži z z in uporabi polarni zapis!) (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

2.12.1998

1. Naj bo $y \geq -1$ in $n \in \mathbb{N}$. S pomočjo popolne indukcije se prepričaj v veljavnost
$$(1+y)^n \geq 1 + ny$$
(35 točk)

2. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani s predpisom
$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1; & x \geq 1 \\ \arctan x; & sicer \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} \sin x; & x > -1 \\ 1; & x \leq -1 \end{cases}$$
Poišči funkcijo $(g \circ f)(x)$! (35 točk)

3. Poišči vse rešitve enačbe $z^4 = -27\overline{z}$, kjer $z \in \mathbb{C}$.
(Nasvet: Enačbo pomnoži z z in uporabi polarni zapis!) (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

1.12.1999

1. Poišči vse rešitve neenačbe
$$|x - |x+1|| \leq 1.$$
(35 točk)

2. Preveri, če je funkcija injektivna; poišči zalogo vrednosti in inverz, če obstaja.
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x}{2+|x|}$$
(35 točk)

3. Razcepi polinom $p(x) := x^4 + 2$ na produkt realnih polinomov stopnje največ 2. (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

1.12.1999

1. Poišči vse rešitve neenačbe
$$|x + |x-1|| \geq 1.$$
(35 točk)

2. Preveri, če je funkcija injektivna; poišči zalogo vrednosti in inverz, če obstaja.
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x}{2+|2x|}$$
(35 točk)

3. Razcepi polinom $p(x) := x^4 + 3$ na produkt realnih polinomov stopnje največ 2. (30 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

17.1.2000

1. Rekurzivno definiramo zaporedje na sledeč način:

$$a_1 := 1; \qquad a_{n+1} := \tfrac{1}{2}(a_n^2 - 2a_n)$$

   (a) Pokaži, da je zaporedje alternirajoče (torej so členi z lihimi indeksi pozitivni, s sodimi pa negativni), in da leži na $[-1, 1]$ (15 točk)

   (b) Izrazi a_{n+2} z a_n in odtod pokaži, da je podzaporedje sodih členov padajoče. Pokaži tudi, da je podzaporedje lihih členov monotono. (10 točk)

   (c) Pokaži, da je zaporedje $\big(a_n\big)_n$ konvergentno in poišči limito. (Nasvet: pomagaj si s prejšnjo točko) (10 točk)

2. Pod kakšnimi koti se sekata krivulji

$$y = \sin x, \quad y = \cos x$$

(35 točk)

3. Poišči ploščino lika, ki ga oklepa krivulja $y^2 = x^2 - x^4$. (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

27.11.2000

1. Preveri, da za poljubne množice A, B, C, D velja sledeče:

$$(A \times B) \setminus (C \times D) \subset \big(A \times (B \backslash D)\big) \cup \big((A \setminus C) \times B\big).$$

   Kdaj velja enakost? (30 točk)

2. Poišči $f \circ g$, in (če obstaja) f^{-1} za funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirani s predpisom

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}; & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}; & x < 0 \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} 4x - 5; & x > 3 \\ 2x + 1; & \text{sicer} \end{cases}$$

   (35 točk)

3. Poišči vse rešitve neenačbe $\big|5 - |x^2 - 4|\big| < 1$.
   (Nasvet: Če je $\alpha \geq 0$, je rešitev neenačbe $x^2 < \alpha$ interval $\big(-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}\big)$.
   Če je $\alpha < 0$, je rešitev prazna množica.) (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I B

27.11.2000

1. Preveri, da za poljubne množice X, Y, U, V velja sledeče:

$$(X \times Y) \setminus (U \times V) \subset \big(X \times (Y \setminus V)\big) \cup \big((V \setminus U) \times Y\big).$$

   Kdaj velja enakost? (30 točk)

2. Poišči $g \circ f$, in (če obstaja) g^{-1} za funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirani s predpisom

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}; & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}; & x < 0 \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} 4x - 5; & x > 3 \\ 2x + 1; & \text{sicer} \end{cases}$$

   (35 točk)

3. Poišči vse rešitve neenačbe $\big|16 - |x^2 - 9|\big| < 16$.
   (Nasvet: Če je $\alpha \geq 0$, je rešitev neenačbe $x^2 < \alpha$ interval $\big(-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}\big)$. Če je $\alpha < 0$, je rešitev prazna množica.) (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

15.1.2001

1. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^5 + \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{i}{2}\right)^{10}.$$

(30 točk)

2. Pokaži, da je rekurzivno podano zaporedje

$$a_1 := 0 \quad a_{n+1} := \sqrt{4 + 3a_n}$$

monotono. **Če je konvergentno**, mu izračunaj limito. (35 točk)

3. Poišči limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

(Nasvet: Uporabi $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$). (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

15.1.2001

1. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^5 - \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right)^{20}.$$

(30 točk)

2. Pokaži, da je rekurzivno podano zaporedje

$$a_1 := 1 \quad a_{n+1} := \sqrt{4 + 3a_n}$$

monotono. **Če je konvergentno**, mu izračunaj limito. (35 točk)

3. Poišči limiti

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$$

(Nasvet: Uporabi $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$). (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

26.11.2001

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe
$$|2x - |3x + 10|| \leq 10$$
(30 točk)

2. Uporabi Moivrovo formulo in poišči števila a, b, c, za katera je
$$\cos(5x) = a \cos x + b \cos x^3 + c \cos x^5.$$
Vstavi $x = \pi/5$ in izračunaj $\cos(\pi/5)$.
(Nasvet: $1 + 5\,x - 20\,x^3 + 16\,x^5 = (1 + x)\,\left(-1 - 2\,x + 4\,x^2\right)^2$). (35 točk)

3. Izračunaj $2{\cdot}600 \times 1{\cdot}100$, oceni napako in nato pravilno zaokroži rezultat, če režemo decimalke. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

26.11.2001

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe
$$5 \leq |2x - |3x + 10||$$
(30 točk)

2. Uporabi Moivrovo formulo in poišči števila a, b, c, za katera je
$$\sin(5x) = a \sin x + b \sin x^3 + c \sin x^5.$$
Vstavi $x = \pi/5$ in izračunaj $\sin(\pi/5)$. (35 točk)

3. Izračunaj $2{\cdot}60 \times 1{\cdot}01$, oceni napako in nato pravilno zaokroži rezultat, če zaokrožujemo decimalke. (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

14.1.2002

1. Preveri monotonost in omejenost zaporedja $\big(a_n\big)_n$ in poišči njegovo limito
$$a_1 := 0, \qquad a_{n+1} := \frac{4 + 3\,a_n}{3 + 2\,a_n}$$
(35 točk)

2. Razvij v potenčno vrsto funkcijo $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x^3}}$ okoli točke 0. Za katere x–e dobljena vrsta konvergira? (25+10=35 točk)

3. Poišči kot, pod katerim se sekata funkciji $y_1 := (x-2)^2$ in $y_2 := -4 + 6x - x^2$. (30 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

14.1.2002

1. Preveri monotonost in omejenost zaporedja $\big(a_n\big)_n$ in poišči njegovo limito
$$x_0 := 0, \qquad x_{n+1} := \frac{3\,x_n + 4}{2\,x_n + 3}$$
(35 točk)

2. Razvij v potenčno vrsto funkcijo $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x^2}}$ okoli točke 0. Za katere x–e dobljena vrsta konvergira? (25+10=35 točk)

3. Poišči kot, pod katerim se sekata funkciji $y_1 := (x+1)^2$ in $y_2 := 7 + 6x - x^2$. (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

25.11.2002

1. Poišči kompozitum $f \circ f$, če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, podana s predpisom
$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1+2x}; & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-2x}; & x < 0 \end{cases}$$
(35 točk)

2. Reši neenačbo
$$\big||2x+4| - |6-3x| - x\big| \leq 4$$
(30 točk)

3. Razcepi polinom $x^4 - 10x^2 + 1$ v produkt linearnih in kvadratičnih polinomov z realnimi koeficienti. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

25.11.2002

1. Poišči kompozitum $f \circ f$, če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, podana s predpisom
$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1+3x}; & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-3x}; & x < 0 \end{cases}$$
(35 točk)

2. Reši neenačbo
$$\big||2x+4| - |6-3x| + x\big| \leq 4$$
(30 točk)

3. Razcepi polinom $x^4 - 6x^2 + 1$ v produkt linearnih in kvadratičnih polinomov z realnimi koeficienti. (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

13.1.2003

1. Poišči $a, b \in \mathbb{R}$, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna, če je

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}\,, & x < 0 \\ b\,, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}\,, & x > 0 \end{cases}$$

(Nasvet: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$) (35 točk)

2. Preveri, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-1/2}$ konvergentna. Koliko členov moramo sešteti in na koliko decimalk rezati delne rezultate, da bi jo izračunali z natančnostjo 10^{-3}? (35 točk)

3. Poišči vse točke, kjer je odvod funkcije $f(x) := \arctan(\cos(\frac{1+x}{x^2}))$ enak 0. (30 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

13.1.2003

1. Poišči $a, b \in \mathbb{R}$, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna, če je

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}\,, & x < 0 \\ b\,, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}\,, & x > 0 \end{cases}$$

(Nasvet: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$) (35 točk)

2. Preveri, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-3/2}$ konvergentna. Koliko členov moramo sešteti in na koliko decimalk rezati delne rezultate, da bi jo izračunali z natančnostjo 10^{-3}? (35 točk)

3. Poišči vse točke, kjer je odvod funkcije $f(x) := \arctan(\cos(\frac{x-1}{x^2}))$ enak 0. (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

24.11.2003

1. Za funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirano z $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ preveri, kdaj je
$$(f \circ f)(x) = \frac{x}{1+2|x|}.$$
Ali je $(f \circ f)$ surjekcija? (15+20=35 točk)

2. Reši neenačbo
$$1 - 2\sqrt{x} \leq -\sqrt{1+x}$$
(30 točk)

3. Pokaži, da je rekurzivno podano zaporedje
$$a_1 := 0 \quad a_{n+1} := \sqrt{4 + 3a_n}$$
monotono. **Če je konvergentno**, mu izračunaj limito. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

24.11.2003

1. Za funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirano z $f : x \mapsto \frac{x}{1+2|x|}$ preveri, kdaj je
$$(f \circ f)(x) = \frac{x}{1+4|x|}.$$
Ali je $(f \circ f)$ surjekcija? (15+20=35 točk)

2. Reši neenačbo
$$\sqrt{1+x} - 2\sqrt{x} \geq -1$$
(30 točk)

3. Pokaži, da je rekurzivno podano zaporedje
$$a_1 := 1 \quad a_{n+1} := \sqrt{3a_n + 4}$$
monotono. **Če je konvergentno**, mu izračunaj limito. (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

12.1.2004

1. V kompleksni ravnini skiciraj vse točke $z \in \mathbb{C}$, ki rešijo enačbo $\mathrm{Im}\big((\frac{z}{z-1})^2\big) = 0$. (35 točk)

2. Seštej vsoto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (Nasvet: $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$) (35 točk)

3. Poišči vse točke, kjer je odvod funkcije $f(x) := \frac{\sqrt[3]{4-x^2+x^3}}{2x}$ enak nič. (30 točk)

3 Pisni izpiti

IZPIT IZ ANALIZE I

13.4.1994

1. Dano je rekurzivno zaporedje $x_{n+1} := (x_n^3 - 9x_n)/16$. Dokaži, da je zaporedje konvergentno za vsak $|x_0| \leq 5$ in poišči limito!

2. Ali je funkcija
$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$
   (a) zvezna
   (b) odvedljiva v $x = 0$
   (c) zvezno odvedljiva v $x = 0$?

3. Hodnik širine d_1 se nadaljuje pravokotno v hodnik širine d_2. Kako dolga sme biti deska, da jo bomo še lahko prenesli vodoravno skozi koleno hodnika?

4. Izračunaj integrale
   (a) $\int x \sin \sqrt{x}\, dx$
   (b) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$
   (c) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$

5. Funkciji $f(x) := \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 6x$ poišči ekstreme, asimptote,... in nariši njen graf. Z njegovo pomočjo nariši krivuljo, podano v polarni obliki
$$r = a \cdot |\sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 6\varphi|; \quad a > 0!$$

IZPIT IZ ANALIZE I

14.2.1995

1. Dokaži, da za vsako naravno število k velja:

$$15|\ (7k + 5k^3 + 3k^5)$$

2. Izračunaj brez uporabe L'Hospitalovega pravila naslednji limiti

   (a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

   (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

3. Poišči ničle, pole, ekstreme, prevoje, asimptote, $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{Z}_f$ funkcije

$$f(x) := \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$$

   in jo čim natančneje nariši.

4. Izpelji rekurzivno formulo za integral

$$I_n := \int x^n \cos(bx)\, dx$$

   in z njegovo pomočjo izračunaj integral

$$\int x^5 \cos(3x)\, dx\ .$$

5. Dokaži, da je dolžina odseka tangente med obema koordinatnima osema za astroido

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

   konstantna.

IZPIT IZ ANALIZE I

11.4.1995

1. Z indukcijo dokaži, da za vsako naravno število $n \geq 2$ velja:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

2. Naj bo zaporedje $a_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$. Ali je zaporedje monotono? Če je, pokaži to! Pokaži tudi, da je navzdol omejeno. Izračunaj stekališča in limito, če obstaja.
(Nasvet: monotonost najlažje preveriš s pomočjo funkcije $f(x) := \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$.)

3. Funkciji, podani parametrično z

$$x(t) := \frac{1+t}{t^3}, \quad y(t) := \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$$

poišči asimptote, ničle, samopresečišča, ekstremne točke, in nariši njen graf.

4. Izračunaj integrala

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$

5. Pod kakšnim kotom se sekata paraboli

$$y^2 = 4a(a-x) \qquad \text{in} \qquad y^2 = 4b(b+x)?$$

(Tu sta $a, b > 0$ konstanti.)

IZPIT IZ ANALIZE I

13.6.1995

1. Naj bosta

$$g(x) := \begin{cases} 3x - 1 & ; |x| \geq 3 \\ \cos x & ; |x| > 3 \end{cases} \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & ; x \leq -1 \\ x^3 & ; x > -1 \end{cases}$$

   Poišči funkciji $(g \circ f)(x)$ in $(f \circ g)(x)$! Ali sta tako dobljeni funkciji odvedljivi?

2. Nariši graf funkcije

$$y := \frac{x}{1 + \ln x};$$

   določi definicijsko območje, ekstreme, območja konveksnosti ter izračunaj asimptoto, če le-ta obstaja. Kako bi funkcijo definiral na $\mathbb{R}^-$, da bi postala soda funkcija?

3. Izračunaj limiti

   (a) $\lim\limits_{x \to 1+} (\ln x)^{\tan(x-1)}$,

   (b) $\lim\limits_{x \to 0+} (\dfrac{1}{\ln(1-x)} + \dfrac{1}{\sin x})$.

4. Definirajmo zaporedji

$$a_n := \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{n} \qquad b_n := \operatorname{arc\,tg}(n^2)$$

   Za vsako zaporedje posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

5. Integriraj

(a) $\displaystyle\int (\mathrm{arctg} x)^2 \mathrm{e}^{\arctan x} \frac{dx}{1+x^2}$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+2\cos x}{\sin x} dx$

IZPIT IZ ANALIZE I

4.7.1995

1. Naj bodo

$$y_1 := f(\frac{1}{x}), \qquad y_2 := xf(\frac{1}{x}), \qquad y_3 := x^2 f(\frac{1}{x}), \ \ldots$$

kjer je f poljubnokrat odvedljiva funkcija. Določi $y_1^{(1)}$, $y_2^{(2)}$ in $y_3^{(3)}$. Na osnovi dobljenega postavi hipotezo za $y_n^{(n)}$, kjer je $y_n := x^{n-1} f(\frac{1}{x})$. Dokaži domnevo z matematično indukcijo.

2. Določi definicijski območji funkcijama

$$f(x) := \ln\sqrt{1+\tan x} \qquad\qquad g(x) := \tan\sqrt{1+\ln x}$$

3. Poišči ničle, asimptote, ekstreme, prevoje funkcije

$$f(x) := \frac{x^2 - 3x - 4}{\mathrm{arctg} x}$$

in jo nariši!

4. Določi p in q v $\mathbb{R}$ tako, da bosta funkciji

$$f(x) := e^{x/2} \qquad\qquad g(x) := \sqrt{\frac{p+x}{q-x}}$$

imeli enak Taylorjev polinom druge stopnje razvit okoli točke $x_0 = 0$.

5. Izračunaj nedoločena integrala

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{3/10} + 2x^{2/5} + x^{1/2}}$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

IZPIT IZ ANALIZE I

29.8.1995

1. (a) Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo limita obstajala in jo izračunaj!

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan ax}{\ln(e + x^2) - 1}$$

   (b) Izračunaj limito

$$\lim_{x\to e+} \frac{e^{\frac{1}{x-e}}}{\ln(x - e)}.$$

2. Poišči točko na intervalu $[-1, 2]$, v kateri je tangenta na krivuljo $y = x^3$ vzporedna s premico skozi točki $T_1(-1, -1)$ in $T_2(2, 8)$.

3. Dokaži, da je

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n\,x}{2}\ \sin(\frac{x}{2} + \frac{n\,x}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

4. Poišči rešitev neenačb

   (a) $|1 - |x - 1|| < 1$

   (b) $||x + 1| - |x - 1|| < 1$

5. Poišči nedoločeni integral

$$\int \frac{\sin \ln^n x \ln^{n-1} x}{(1 + \cos \ln^n x)} \frac{dx}{x}$$

IZPIT IZ ANALIZE I

13.9.1995

1. (a) Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo limita končna!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x - \sin ax}{x^3}$$

   (b) Izračunaj

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

2. Naj bo

$$f(x) := \frac{x}{\ln x}.$$

Določi definicijsko območje funkcije, limite v točkah $x = 0$ in $x = 1$, asimptote, lokalne ekstreme, območja konveksnosti, območja strogega naraščanja in skiciraj graf.

3. Določi a in b tako, da bosta funkciji

$$f(x) := e^{x/2} \qquad\qquad g(x) := \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}$$

imeli enak Taylorjev polinom druge stopnje razvit okoli točke $x_0 = 0$.

4. Izračunaj nedoločena integrala

   (a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,(\sqrt[3]{x} + 1)^2\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$

5. Definirajmo zaporedji

$$a_n := \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{n} \qquad\qquad b_n := \operatorname{arc\,tg}(n^2)$$

Za vsako zaporedje posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

IZPIT IZ ANALIZE I

13.2.1996

1. Dokaži, da je število
$$4^{2n} - 3^{2n} - 7$$
deljivo s 84 (tu je $n = 1, 2, \ldots$).

2. Naj bosta
$$f(x) := \frac{1}{\exp \sin x} \qquad \text{in} \qquad g(x) := \frac{1}{\sin \exp x}.$$
Preuči periodičnost obeh funkcij. Če je funkcija periodična, ji poišči osnovno periodo, če ni, to dokaži! Nato določi obema funkcijama še naravni definicijski območji!

3. V polkrog s polmerom r včrtaj trapez z največjo ploščino!

4. Brez L'Hospitalovega pravila izračunaj limiti
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4} \qquad \text{in} \qquad \lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

5. Izračunaj integrala
$$(a) \quad \int x^2 \arctan x \, dx \qquad\qquad (b) \quad \int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}.$$

IZPIT IZ ANALIZE I

11.6.1996

1. Dokaži, da je vsota treh zaporednih naravnih števil vedno deljiva z 9!

2. Poišči levo in desno limito funkcije

$$f(x) := \frac{e^{\frac{1}{x}} + a^2 + a}{e^{\frac{1}{x}} + 2}$$

   v točki $x = 0$. Za katere vrednosti konstante a obtaja $\lim_{x \to 0} f(x)$?

3. Poišči definicijsko območje, asimpote, ekstreme, intervale naraščanja oz. padanja, konveksnost in nariši funkcijo

$$\frac{e^{x+1}}{x+2}$$

4. Izračunaj razdaljo od koordinatnega izhodišča do tangente na krivuljo, podano v polarnih koordinatah

$$r = ae^{k\phi} \quad (a > 0,\ k \in \mathbb{R}).$$

5. Izračunaj integrala

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1+\tan t}{\sin 2t}\, dt$

IZPIT IZ ANALIZE I za višješolce

11.6.1996

1. Dokaži, da je
$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$
za vsako naravno število n deljivo s 133.

2. Poišči definicijsko območje, asimpote, ekstreme, intervale naraščanja oz. padanja, konveksnost in nariši funkcijo
$$\frac{e^{x+1}}{x+2}$$

3. Izračunaj limiti
   (a) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$
   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

4. Izračunaj kot, pod katerim se sekata paraboli
$$y^2 = 4ax + 4a^2 \quad \text{in} \quad y^2 = -4bx + 4b^2; \qquad (a > 0,\, b > 0)$$

5. Izračunaj integrala
   (a) $\displaystyle\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{1 + \tan t}{\sin 2t}\, dt$

IZPIT IZ ANALIZE I

25.6.1996

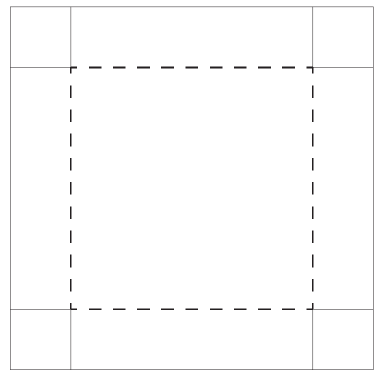
1. Dokaži, da je za vsako naravno število n naravno tudi število
$$\frac{1}{15}(3n^5 + 5n^3 + 7n)\,.$$

2. Dokaži, da je zaporedje
$$a_0 := 2; \qquad a_{n+1} := 2^{n+1} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{a_n}{2^n}\right)^2}}$$
monotono.

3. Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote in ekstreme ter nariši funkcijo
$$y = x + \sin x$$

4. Izračunaj integrala
   1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$
   2. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$

5. Iz kvadratnega kosa kartona velikosti 18×18 na robovih izrežemo štiri skladne kvadratke. Preostal kos kartona zložimo v odprto škatlo tako, da prepognemo robove, ki so na sliki črtkani. Kako dolge stranice morajo imeti izrezani kvadratki, da bo prostornina tako dobljene škatle največja?



IZPIT IZ ANALIZE I za višješolce

25.6.1996

1. Dokaži, da je za vsako naravno število n naravno tudi število

$$\frac{1}{15}(3n^5 + 5n^3 + 7n)\,.$$

2. *Brez uporabe L'Hospitalovega pravila* izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \quad .$$

3. Aproksimiraj funkcijo $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$ s Taylorjevim polinomom stopnje 3 okrog točke $x = 0$ in oceni napako, če s pomočjo tega polinoma računaš vrednosti funkcije za $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

4. Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote in ekstreme ter nariši funkcijo

$$y = x + \sin x$$

5. Izračunaj integrala

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$

IZPIT IZ ANALIZE I

20.8.1996

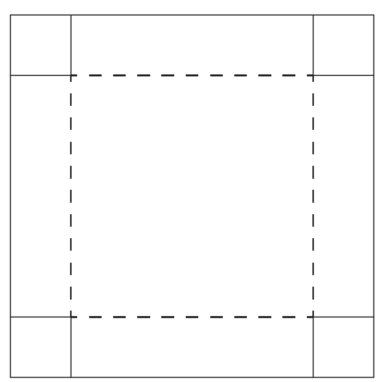
1. Nariši graf funkcije
$$f(x) := |1 - |2 - |3 - x|||$$

2. Poišči vsa stekališča zaporedij
   (a) $a_n := \cos^n(n\pi)$
   (b) $a_n := \frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}$

3. Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote in ekstreme ter nariši graf funkcije
$$g(x) = x + \sin x$$

4. Izračunaj integral $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$

5. Iz kvadratnega kosa kartona velikosti 18×18 na robovih izrežemo štiri skladne kvadratke. Preostal kos kartona zložimo v odprto škatlo tako, da prepognemo robove, ki so na sliki črtkani. Kako dolge stranice morajo imeti izrezani kvadratki, da bo prostornina tako dobljene škatle največja?



IZPIT IZ ANALIZE I

27.8.1996

1. Dokaži, da je za poljubni naravni števili a, n število $(a^{4n+1} - a)$ deljivo s 30.

2. Reši neenačbo
$$\left|x^2 + x - 2\right| + \left|x^2 - x - 2\right| = 2.$$

3. Izračunaj limiti
$$\lim_{x\to\infty} x^2 \ln \frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\tan x}{\cos 2x}.$$

4. Dokaži, da je funkcija
$$f(x) := \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}; & x \neq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$
zvezna in odvedljiva. Poišči njene ničle, pole, ekstreme, prevoje ter asimptote in jo nariši!

5. Izračunaj integral
$$\int \frac{x^3}{x^2 + x + 1}\, dx$$

IZPIT IZ ANALIZE I za višješolce

27.8.1996

1. Dokaži, da je število $(5^n + 2^{n+1})$ pri vsakem $n \in \mathbb{N}$ deljivo s 3.

2. Nariši množico točk v ravnini, ki ustrezajo neenačbi
$$|x| + |y| - 1 < 0.$$

3. Izračunaj limito
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cos 2x}.$$

4. Poišči razmerje med polmerom R in višino H pokončnega valja, da bo njegova površina pri danem volumni največja.

5. Izračunaj integrala

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2 + x + 1}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

IZPIT IZ ANALIZE I

10.9.1996

1. Naj bo
$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ ax + b & 0 \le x \le 3 \\ \mathrm{arctg}\frac{1}{x-3} & x > 3 \end{cases}$$
Poišči a in b tako, da bo funkcija $f(x)$ zvezna povsod. Potem jo nariši in ji določi ekstremne točke in področja konkavnosti. Ali je funkcija gladka?

2. Dokaži, da je
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Človek, višine $\check{C}$ metrov se oddaljuje s hitrostjo v metrov na sekundo od ulične svetilke, ki je h metrov nad tlemi. S kakšno hitrostjo se giblje vrh njegove sence?

4. Definirajmo zaporedji
$$a_n := \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n} \qquad\qquad b_n := \mathrm{arc\,tg}(n^2)$$
Za vsako zaporedje posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

5. Poišči integrala
   (a) $\displaystyle\int \frac{(\arccos x)^{1/2}}{1-(\arccos x)^{1/3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
   (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}\, dx$

IZPIT IZ ANALIZE I za višješolce

10.9.1996

1. Naj bo
$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ ax + b & 0 \leq x \leq 3 \\ \mathrm{arctg}\frac{1}{x-3} & x > 3 \end{cases}$$
Poišči a in b tako, da bo funkcija $f(x)$ zvezna povsod. Potem jo nariši in ji določi ekstremne točke in področja konkavnosti. Ali je funkcija gladka?

2. Dokaži, da je
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Reši neenačbo
$$|x+1| - |2x-3| \leq 2.$$

4. Definirajmo zaporedji
$$a_n := \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n} \qquad\qquad b_n := \mathrm{arc\,tg}(n^2)$$
Za vsako zaporedje posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

5. Poišči integrala
   (a) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$

IZPIT IZ ANALIZE I

21.1.1997

1. Za katere vrednosti realnega parametra α je kompleksno število $z := 1 + \alpha i$ bližje koordinatnemu izhodišču kot številu $z' := 1 + \frac{i}{\alpha}$?

2. Določi $f^{(100)}(1)$, kjer je funkcija f podana z

$$f(x) := \frac{1}{3 - 2x + x^2}$$

   (Nasvet: Razvij f v Taylorjevo vrsto okoli točke $x = 1$.)

3. Poišči ničle, asimptote, preuči sodost oz. lihost ter skiciraj graf funkcije

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}\sin^2 x; & x \neq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

   Ali je f zvezna in odvedljiva v točki 0? Ali je tudi zvezno odvedljiva pri $x = 0$?

4. Integriraj

   (a) $\displaystyle\int (\mathrm{arctg}x)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{arctg}x} \frac{dx}{1 + x^2}$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^4}$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

24.1.1997

1. Poišči naslednji limiti:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{(n+1)^4}$

2. Poišči tisto realno število α, da bodo vektorji

$$\begin{aligned}\vec{a} &:= \alpha\vec{\imath}+\vec{\jmath}+4\vec{k}\\ \vec{b} &:= \vec{\imath}-2\alpha\vec{\jmath}\\ \vec{c} &:= 3\alpha\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+4\vec{k}\end{aligned}$$

   komplanarni. Ali lahko izbereš α, da bodo celo kolinearni?

3. Določi definicijsko območje, ničle, pole, asimptote, sodost oz. lihost ter ekstreme in s pomočjo teh podatkov čimbolj natančno nariši graf funkcije

$$y := \frac{x\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+1}$$

4. Poišči rešitev neenačbe

$$|x+2|-|x-4| < |x+5|-|x-6|$$

5. Integriraj

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

IZPIT IZ ANALIZE I

4.2.1997

1. Z indukcijo dokaži, da za vsako naravno število $n \geq 2$ velja:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

2. Naj bo zaporedje $a_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$. Ali je zaporedje monotono? Pokaži tudi, da je navzdol omejeno. Izračunaj stekališča in limito, če obstaja.
(Nasvet: monotonost najlažje preveriš s preučevanjem funkcije $f(x) := \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$.)

3. Funkciji, podani parametrično z

$$x(t) := \frac{1+t}{t^3}, \quad y(t) := \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$$

poišči asimptote, ničle, samopresečišča, ekstremne točke, in nariši njen graf.

4. Izračunaj integrala

(a) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 5}{x^2 + 4}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

7.2.1997

1. Dani so vektorji $\vec{a} := (2\alpha, 1, 1-\alpha)$, $\vec{b} := (-1, 3, 0)$, $\vec{c} := (5, -1, 8)$.

   (a) Poišči parameter α, pri katerem vektor $\vec{a}$ oklepa enake kote z vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

   (b) Pri tako dobljenem α izračunaj kot med vektorjem $\vec{c}$ in ravnino skozi vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

2. Za katero vrednost parametra m ima sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} mx & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & my & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & mt & = & 0 \end{array}$$

   netrivialno rešitev? To rešitev tudi poišči!

3. Poišči definicijsko območje, ničle, asimptote, ekstreme, ter razišči sodost oz. lihost funkcije

$$f(x) := xe^{-\frac{1}{x}}$$

   Funkcijo f s pomočjo gornjih podatkov tudi nariši.

4. Integriraj

   (a) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5}{x^2-5x+4}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$

IZPIT IZ ANALIZE I

6.6.1997

1. Dano je rekurzivno zaporedje $x_{n+1} := (x_n^3 - 9x_n)/16$. Dokaži, da je zaporedje konvergentno za vsak $|x_0| < 5$ in poišči limito!
(Nasvet: Najprej pokaži, da ne more biti $x_{n+1}^2 \gneqq x_n^2$. Odtod sklepaj, da je zaporedje po absolutni vrednosti monotono padajoče.)

2. Funkciji $f(x) := \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 6x$ poišči ničle, ekstreme, periodo in nariši njen graf. Z njegovo pomočjo skiciraj krivuljo, podano v polarni obliki
$$r = |\sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 6\varphi| \;!$$

3. Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y = \sin x$ in $y = \cos x$?

4. Izračunaj nedoločeni integral
$$\int \frac{dx}{x^6 - x^2} \quad .$$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

9.6.1997

1. Reši neenačbo
$$|2x-1|-|x|<1$$

2. Dan je pravilni šesterokotnik $0ABCDE$. Naj bo $\overrightarrow{0A}=\vec{a}$ in $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Izrazi vektorja $\overrightarrow{0D}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EB}$ in $\overrightarrow{0C}$ s pomočjo $\vec{a}$ oz. $\vec{b}$.

3. Poišči rešitev sistema enačb v odvisnosti od parametra a. Ali obstaja tak a, da sistem nima rešitev?
$$\begin{array}{ccccccccc}
(1+a)x & + & y & + & z & + & u & = & 2 \\
x & + & (1+a)y & + & z & + & u & = & 3 \\
x & + & y & + & (1+a)z & + & u & = & -1 \\
x & + & y & + & z & + & (1+a)u & = & 0
\end{array}$$

4. Na krivulji
$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$
poišči točko, v kateri normala na krivuljo poteka skozi koordinatno izhodišče.

5. Izračunaj integral
$$\int \sqrt{2x^2-3x}\,dx$$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

20.6.1997

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži binomsko formulo $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

2. Naj za vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ velja, da je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Bodi še $\alpha := |\vec{a}|, \beta := |\vec{b}|$ in $\gamma := |\vec{c}|$. Izrazi $\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ s pomočjo števil α, β ter γ.

3. Izmed vseh pravokotnikov, ki imajo oglišča na enotski krožnici poišči tistega z največjo ploščino.

4. Integriraj

   (a) $\displaystyle\int \frac{2x^3-7x^2+2x-4}{2x^2-5x-3}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$

IZPIT IZ ANALIZE I

20.6.1997

1. Poišči rešitve enačbe v kompleksnih številih

$$z^2 - iz = |z - i|.$$

2. Zaporedje realnih števil je podano rekurzivno z

$$a_0 := 2; \qquad a_{n+1} := \sqrt{4a_n - 3}.$$

   Z matematično indukcijo pokaži, da je zaporedje monotono in omejeno, ter izračunaj limito.

3. Določi p in q v $\mathbb{R}$ tako, da bosta funkciji

$$f(x) := e^{x/2} \qquad\qquad g(x) := \sqrt{\frac{p+x}{q-x}}$$

   imeli enak Taylorjev polinom prve stopnje razvit okoli točke $x_0 = 0$.

4. Izračunaj nedoločena integrala

   (a) $\displaystyle\int x \arctan \sqrt{x}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

IZPIT IZ ANALIZE I

29.8.1997

1. Dokaži, da je število
$$4^{2n} - 3^{2n} - 7$$
deljivo s 84 (tu je $n = 1, 2, \ldots$).

2. V polkrog s polmerom r včrtaj trapez z največjo ploščino!

3. Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Poišči limiti
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin ax}{\sin bx} \qquad \text{in} \qquad \lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

4. Izračunaj integrala
$$(a) \quad \int x^2 \arctan x \, dx \qquad\qquad (b) \quad \int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}.$$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

1.9.1997

1. Z uporabo popolne indukcije dokaži, da je vsota kubov treh zaporednih naravnih števil vedno deljiva z devet (tj. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ je deljivo z 9)

2. Dani so vektorji

$$\vec{a} := \alpha\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k} \quad \vec{b} := \vec{\imath} - 2\alpha\vec{\jmath} \quad \vec{c} := 3\alpha\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

   Določi število α, da bodo ležali v isti ravnini.

3. Skiciraj potek krivulj $y = x^2$ ter $y = \frac{1}{x}$. Nato izračunaj, pod kakšnim kotom se sekata.

4. Določi ničle, ekstreme, prevoje ter asimptote in skiciraj graf funkcije

$$y = xe^{-x^2}$$

5. Integriraj
   (a) $\displaystyle\int x^2 e^{\frac{x}{2}}\, dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}\, dx$

IZPIT IZ ANALIZE I

12.9.1997

1. Pokaži, da za vsako naravno število n velja:

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n.$$

2. Izračunaj limiti

   (a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

   (b) $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{m - 2m^2}{m^2 + 4} \qquad (m \in \mathbb{N});$

   pri zadnjem primeru tudi določi infimum in supremum.

2'. Ali sta funkciji

   (a) $\frac{1}{\ln \tan(x^2)}$ in

   (b) $e^{\frac{1}{\sqrt{\sin^3(x-1)}}}$

   periodični? Če sta, jima tudi izračunaj periodo. Vsak korak utemelji!

3. Čimbolj natančno nariši funkcijo, podano v polarnih koordinatah

$$r(\phi) = \cos^2(\phi).$$

   Pretvori jo v parametrično obliko, in poišči def. območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, ekstreme in asimptote.

4. Izračunaj integrale

   (a) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x \sin^5 x}}$

   (b) $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

15.9.1997

1. Nariši funkcijo
$$f(x) := |1 - |1 + x||$$

2. Preveri, za katere vrednosti konstante a je sistem linearnih enačb nerešljiv:
$$\begin{array}{rcccccl} -3\,x & + & 2\,a\,y & + & 2\,a\,z & = & 1 \\ 2\,x & - & (1+a)\;y & + & 2\,z & = & 0 \\ 4\,x & + & 4\,y & + & (1-a) & = & -1 \end{array}$$

3. Naj bo $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 5$; kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa naj meri $\frac{\pi}{4}$. Izračunaj ploščino trikotnika, napetega nad vektorjema $2\vec{b} - \vec{a}$ oz. $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

4. V pravokotni trikotnik, katerega hipotenuza meri c metrov, in je eden od kotov enak $60°$ bi radi položili pravokotno ploščico vzporedno s hipotenuzo. Poišči dimenzije te ploščice, da bo čimvečja površina trikotnika pokrita.

5. Poišči nedoločeni integral
$$\int \frac{\sin(\ln^n x)\,\ln^{n-1} x}{(1 + \cos\ln^n x)}\,\frac{dx}{x}$$

IZPIT IZ ANALIZE I

27.1.1998

1. Poišči vse rešitve enačbe
$$(z+1)^n = (z-i)^n; \qquad (z \in \mathbb{C})$$

2. Poišči limito zaporedja
$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

3. Pokaži, da velja za vsak $x \neq 1$ in poljubno naravno število n identiteta
$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

4. Krivulja je podana parametrično z
$$x := a(t \sin t + \cos t), \quad y := a(\sin tt - t\cos t).$$
Poišči na njej vse tiste točke, kjer je tangetna vzporedna koordinatnima osema, in vse točke, kjer je normala vzporedna koordinatnima osema.

5. Točkasto telo se giblje po daljici $T(0,a)\,T(x,0)$ s hitrostjo v_1, in po daljici $T(x,0)\,T(b,c)$ s hitrostjo v_2. Določi x, da bo na tak način čimhitreje pripotovalo iz $T(0,a)$ do $T(b,c)$.

IZPIT IZ ANALIZE I

27.1.1998

1. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ zapiši množico vseh rešitev enačbe

$$(z+1)^n = (z-i)^n; \qquad (z \in \mathbb{C})$$

2. Poišči limito zaporedja

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

3. Pokaži, da za vsak $x \neq 1$ in poljubno naravno število n velja identiteta

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

4. Krivulja je podana parametrično z

$$x := a(t\sin t + \cos t), \quad y := a(\sin t - t\cos t).$$

   Poišči na njej vse tiste točke, kjer je tangenta vzporedna koordinatnima osema, in vse točke, kjer je normala vzporedna koordinatnima osema.

5. Točkasto telo se giblje po daljici $T(0,a)\,T(x,0)$ s hitrostjo v_1, in po daljici $T(x,0)\,T(b,c)$ s hitrostjo v_2. Določi x tako, da bo čas potovanja iz $T(0,a)$ do $T(b,c)$ najkrajši!

IZPIT IZ MATEMATIKE I

3.2.1998

1. Reši neenačbo
$$|x+1| - |2x-3| \leq 2$$

2. Poišči limito
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{x}\right)$$

3. Poišči definicijsko območje, pole, ničle, asimptote, ekstreme, ter razišči sodost oz. lihost funkcije
$$f(x) := \frac{-4+x^2}{4\,x-4\,x^2+x^3}$$
Funkcijo f s pomočjo gornjih podatkov tudi nariši.

4. Integriraj
$$\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos x}\,dx$$

5. Dana sta vektorja $\vec{a} := (2a^{\lambda}, \lambda, \lambda-1)$, $\vec{b} := (\lambda+1, \lambda-2, 0)$. Poišči parameter λ, pri katerem imata vektorja isto dolžino. Pri tako izbranem λ izračunaj še kot, ki ga oklepata.

IZPIT IZ ANALIZE I

25.2.1998

1. Bodi $n \in \mathbb{N}$. Poišči vsa kompleksna števila z, ki zadoščajo enačbi
$$\overline{z} = z^n$$
(Nasvet: enačbo pomnoži z z, nato pa uporabi polarne koordinate.)

2. Zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ je dano s splošnim členom
$$a_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}}},$$
kjer nastopa n korenov. Zapiši ga v rekurzijski obliki $a_{n+1} = f(a_n)$, pokaži, da je monotono in omejeno ter izračunaj limito.

3. (a) Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo limita končna!
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x - \sin ax}{x^3}$$
(b) Izračunaj
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

4. Naj bo
$$f(x) := \frac{x}{\ln x}.$$
Določi definicijsko območje funkcije, limite v točkah $x = 0$ in $x = 1$, asimptote, lokalne ekstreme, območja konveksnosti, območja strogega naraščanja in skiciraj graf.

5. Razvij funkcijo
$$f(x) := \frac{2x+1}{\sqrt{1+x^3}}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Za katere x vrsta konvergira?

IZPIT IZ MATEMATIKE I

25.2.1998

1. Z uporabo popolne indukcije dokaži, da je $2^{4n} - 1$ deljivo s 15 za vsak naraven n.

2. Skiciraj potek krivulj $y = x^2$ ter $y = \frac{1}{2x}$. Nato izračunaj, pod kakšnim kotom se sekata.

3. Poišči vse rešitve sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -k & + & x & + & 3\,y & & & = & 2 \\ -2\,k & + & 2\,x & + & 4\,y & + & z & = & 9 \\ -2\,k & + & 2\,x & + & 12\,y & - & 3\,z & = & -11 \\ -4\,k & + & 4\,x & + & 6\,y & + & 3\,z & = & 23 \end{array}$$

4. Naj za vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ velja, da je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$. Bodi še $\alpha := |\vec{a}|, \beta := |\vec{b}|$ in $\gamma := |\vec{c}|$. Izrazi $\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ s pomočjo števil α, β ter γ.

5. Izračunaj integral

$$\int \frac{-1 + 2\,t^3}{2 - 3\,t + t^3}\,dt$$

---

6. Zapiši Taylorjev polinom funkcije

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

7. Poišči ekstreme in prevoje funkcije

$$3\,x^2 - 3\,x^4 + x^6$$

8. Čimbolj natančno nariši graf funkcije

$$\frac{-2\,x^2 - x^3 + x^4}{2 - 3\,x + x^3}$$

IZPIT IZ ANALIZE I

3.6.1998

1. Poišči vse rešitve enačbe $z^4 = 8i\overline{z}$, kjer $z \in \mathbb{C}$.
   (Nasvet: Uporabi polarni zapis!)

2. Dano je rekurzivno zaporedje $x_{n+1} := \sqrt[3]{x_n + 6}$. Dokaži, da je zaporedje konvergentno za vsak $x_0 \in \mathbb{R}$ in poišči limito!
   (Nasvet: Loči možnosti, ko je $x_0 > 2$, $x_0 = 2$ in $x_0 < 2$.)

3. Ali je funkcija
$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$
   (a) zvezna
   (b) odvedljiva v $x = 0$
   (c) zvezno odvedljiva v $x = 0$?

   Poišči tudi njene asimptote, ničle in ekstreme in jo nariši.

4. Izračunaj integrala
   (a) $\displaystyle\int x \sin\sqrt{x}\, dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

3.6.1998

1. Izračunaj limiti

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(1-\cos t))}{\sin^2 t} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

2. Izračunaj $\ln(0{\cdot}96)$ na tri decimalke natančno; vsi izračuni morajo biti narejeni brez uporabe kalkulatorja.
(Nasvet: Taylorjeva formula za $\ln(1+x)$)

3. Poišči vse rešitve sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & 6k & = & -1 \\ -x & + & y & - & 2z & + & 6k & = & 1 \\ 3x & + & 3y & & & + & 6k & = & -3 \\ -4x & - & 2y & - & 2z & & & = & 4 \end{array}$$

4. Dani sta premici

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z}{1} \qquad x+y+z=0 \text{ in } 2x-3z=1.$$

Ali se sekata?

5. Izračunaj integral

$$\int \frac{2\,t^3-1}{t^3+t^2-t-1}\,dt$$

IZPIT IZ ANALIZE I

24.6.1998

1. Dokaži, da za vsako naravno število k velja:

$$15|\ (7k + 5k^3 + 3k^5)$$

2. Brez uporabe L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednji limiti

   (a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

   (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

3. Izpelji rekurzivno formulo za integral

$$I_n := \int x^n \cos(bx)\, dx$$

   in z njegovo pomočjo izračunaj integral

$$\int x^5 \cos(3x)\, dx\ .$$

4. Dokaži, da je dolžina odseka tangente med obema koordinatnima osema za astroido

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

   konstantna.

IZPIT IZ MATEMATIKE I

24.6.1998

1. Dokaži, da za vsako naravno število k velja:

$$15|\ (7k + 5k^3 + 3k^5)$$

2. Napiši enačbo ravnine, ki poteka skozi točko $T(2, -1, 1)$ in premico

$$\frac{x-1}{0} = \frac{2-y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

3. Reši matrično enačbo $AXB = C$, kjer so A, B in C matrike

$$A := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Poišči definicijsko območje, ničle, asimptote, ekstreme, ter razišči sodost oz. lihost funkcije

$$f(x) := xe^{-\frac{1}{x}}$$

Funkcijo f s pomočjo gornjih podatkov tudi nariši.

5. Integriraj $\displaystyle\int \frac{2x^3+5}{x^2-5x+4}\,dx$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

20.8.1998

1. Poišči vse rešitve neenačbe
$$|1-|1-x||<1$$

2. Poišči rešitev matrične enačbe $AXB+XB=C$, kjer je
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C=A$$

3. Poišči vrednost limite
$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sin t}-\frac{1}{t^2}\right)$$

4. Izračunaj ploščino *trikotnika* z oglišči v točkah $T_1(3,3,0)$, $T_2(-1,3,1)$, $T_3(2,2,4)$.

5. Poišči nedoločeni integral
$$I(x) := \int \frac{\sin(\ln^n x)\ln^{n-1} x}{(1+\cos\ln^n x)}\frac{dx}{x}$$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

7.9.1998

1. Poišči vse rešitve sistema

$$|1-x|+|1+x| \leq 2$$

2. Reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x-y+z &= 0 \\ 3x-y-z+2 &= 0 \\ 4x-y-2z-3 &= 0 \end{aligned}$$

3. Poišči pole, ničle, asimptote in čimbolj natančno nariši funkcijo

$$y=\frac{x^2-x-2}{x^3-5x^2+8x-4}$$

4. Na krivulji

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

poišči točko, v kateri normala na krivuljo poteka skozi koordinatno izhodišče.

5. Integriraj

$$\int \frac{5x+1}{4x^2-12x+9}\,dx$$

IZPIT IZ MATEMATIKE I

7.9.1998

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži binomsko formulo $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

2. Poišči parameter λ, da se bodo ravnine

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 3x - y - z + 2 &= 0 \\ 4x - y - 2z + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

   sekale vzdolž iste premice!

3. Pošči vektor $\vec{x}$, ki reši enačbe

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = 1; \quad \vec{b} \cdot \vec{x} = 2; \quad \vec{x} \cdot \vec{c} = 3;$$

   tu je $\vec{a} := (2, -4, 3)$, $\vec{b} := (3, -1, 5)$ in $\vec{c} := (1, -2, 4)$

4. Na krivulji

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

   poišči točko, v kateri normala na krivuljo poteka skozi koordinatno izhodišče.

5. Integriraj

$$\int \frac{x^5}{x^6 - x^3 - 2}\, dx$$

IZPIT IZ ANALIZE I

7.9.1998

1. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^2 = \bar{z}; \qquad z \in \mathbb{C}$$

2. Dano je zaporedje

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

   Pokaži, da je monotono padajoče in da je konvergentno.
   (Nasvet: Pri dokazu konvergentnosti ti bo mogoče v pomoč neenačba $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$.)

3. Skiciraj krivuljo, podano v polarni obliki z $r = 2e^{3\phi}$; nato izračunaj razdaljo med koordinatnim izhodiščem in tangento nanjo.

4. Izračunaj nedoločena integrala

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{3/10} + 2x^{2/5} + x^{1/2}}$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{x^2}\, dx$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

22.1.1999

1. Z uporabo popolne indukcije pokaži, da je
$$4^{2n} - 1$$
deljivo s 15 pri vsakem $n \in \mathbb{N}$.

2. Poišči vse rešitve enačbe
$$z^7 = \frac{1-i}{z^2}$$

3. Bodi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neskončnokrat odvedljiva funkcija in naj bodo $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ funkcije, definirane z
$$y_1 : x \mapsto f\left(\tfrac{1}{x}\right), \quad y_2 : x \to xf\left(\tfrac{1}{x}\right), \quad y_3 : x \to x^2 f\left(\tfrac{1}{x}\right)$$
Določi $y_1'(x), y_2''(x)$ in $y_3'''(x)$.

4. Skiciraj potek krivulj $y = x^2$ ter $y = \frac{1}{x}$, in izračunaj, pod kakšnim kotom se sekata.

5. Poišči ploščino lika med krivuljami $y = x$, $y = 1/x^2$, ter $x = 5$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

29.1.1999

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe

$$||x+1| - |x-1|| \geq 1$$

2. Definirajmo zaporedji

$$a_n := \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n} \qquad\qquad b_n := \operatorname{arc\,tg}(n^2)$$

   Za vsako zaporedje posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

3. Poišči točko na intervalu $[-1, 2]$, v kateri je tangenta na krivuljo $y = x^3$ vzporedna s premico skozi točki $T_1(-1, -1)$ in $T_2(2, 8)$.

4. Pokaži, da je

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \qquad (x \geq 0)$$

   Kdaj velja enačaj?

5. Lik A je omejen s parabolo $y^2 = 2px$ in premico $x = 2a$. $(p, a \gneq 0)$. Kakšno pravokotno ploščico lahko še vložimo vanj, da bo ploščina neprekritega dela čim manjša?

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

24.3.1999

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe
$$|1 - |x - 1|| < 1$$

2. Dane so funkcije $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$a)\ y_1(x) \equiv x^2 - 1 \quad b)\ y_2(x) \equiv \sqrt[3]{1 - x^3} \quad c)\ y_3(x) \equiv x|x|$$
Za vsako odgovori na vprašanje: Je injektivna? Je surjektivna? Je bijektivna? Pri vsaki poišci tudi inverz, če obstaja.

3. Pokaži, da ima enačba $x - 1 = \ln x$ natanko eno rešitev. Katero?

4. Reši enačbo
$$z^3 = \bar{z}/2; \quad z \in \mathbb{C}$$
(Nasvet: Uporabi polarne koordinate.)

5. Poišči ploščino lika, omejenega s krivuljami
$$x = 1/2,\ y = x - 1,\ y = \ln x$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

7.6.1999

1. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^2 = \bar{z}^3|z|; \qquad (z \in \mathbb{C})$$

(Nasvet: polarne koordinate!)

2. Dana je množica realnih števil

$$M := \left\{\tfrac{m-\sqrt{m}}{m+1};\ \ m \in \mathbb{N}\right\}$$

Pokaži, da je $\min M = 0$, in da $\max M$ ne obstaja! Ali obstaja $\inf M$ oz. $\sup M$?

3. Ali je funkcija

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\mapsto (a^2 - b^2, 2ab) \end{aligned}$$

injektivna/surjektivna/bijektivna?

4. Dano je zaporedje

$$\begin{aligned} x_0 &:= 2.5 \\ x_{n+1} &:= 9 - 5x_n + x_n^2 \end{aligned}$$

   (a) Dokaži, da je monotono!
   (b) Dokaži, da je omejeno, navzdol z 2 in navzgor s 3.
   (c) Določi vsa njegova stekališča!

5. Poišči razmerje med polmerom R in višino H pokončnega valja, da bo njegova površina pri danem volumnu največja.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

30.8.1999

1. Pokaži, da je $7^{n+1} - 2^{2n}$ deljivo s 3 pri vsakem naravnem številu n.

2. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani s predpisom $g : x \mapsto (x-1)^2$ in

$$f : x \mapsto \begin{cases} -x; & x > 1 \\ 2; & x = 1 \\ -2; & x < 1 \end{cases}$$

   Poišči $f \circ g$, $g \circ f$ ter $g \circ g$.

3. S pomočjo odvoda preveri, da je

$$2 + (x+1)\ln x \geq 2x \qquad (x \geq 1)$$

4. Pokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n(2n-1)}$$

   konvergira. Poišči število potrebnih členov in število potrebnih decimalk, na katere moramo zaokroževati delne rezultate, da bi jo izračunali na 2 decimalki natančno. Poišči tudi njeno vsoto (na dve decimalki!).

5. Poišči ploščino med $\ln x$ in $\ln^2 x$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

15.11.1999

1. Poišči vse rešitve neenačbe

$$|1-2x| \leq |4-x^2|; \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Razcepi polinom x^5+1 na produkt samih linearnih in kvadratnih faktorjev.
(Nasvet: $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos(\frac{3\pi}{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$)

3. Poišči kot, pod katerim se sekata krivulji

$$xy = 2; \qquad x^2 - y^2 = 3$$

4. Krožni izsek s kotom ϕ, zvijemo, da dobimo stožec. Pri katerem ϕ bo njegova prostornina največja, in pri katerem najmanjša?
(Volumen stožca računamo po formuli $V = \frac{1}{3}ho$, kjer je h višina in o ploščina osnovne ploskve.)

5. Pokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(-3)^n(3n+4)}$$

konvergira. Poišči število potrebnih členov in število potrebnih decimalk, na katere moramo zaokroževati delne rezultate, da bi jo izračunali na 1 decimalko natančno. Poišči tudi njeno vsoto (na dve decimalki!).

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

21.1.2000

1. Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$|z| - \frac{z}{|z|} = 1$$

2. Izračunaj limito zaporedja

$$a_m := \frac{m - 2m^2}{m^2 + 4} \qquad (m \in \mathbb{N});$$

   in določi infimum, supremum, maksimum ter minimum.

   Ali je funkcija $f(x) := e^{\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2(x-1)}}}$ periodična? Če je, ji izračunaj periodo. Vsak korak utemelji!

3. Poišči lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) := e^{\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2(x-1)}}}$$

4. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji

$$y = x^2 + 2x, y^2 + 2y = x$$

IZPIT IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

27.1.2000

1. Dokaži, da je za poljubni naravni števili a, n število $(a^{4n+1} - a)$ deljivo s 30.

2. Reši enačbo
$$\left|x^2 + x - 2\right| + \left|x^2 - x - 2\right| = 2.$$

3. Brez uporabe L'Hospitalovega pravila izračunaj limito
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

4. Poišči razmerje med polmerom R in višino H pokončnega valja, da bo njegova površina pri danem volumnu največja.

5. Izračunaj integral
$$\int \frac{-4 - 3\,x + 3\,x^2}{3 - 5\,x + x^2 + x^3}\,dx$$

IZPIT IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

27.1.2000

1. Če je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f : x \mapsto \begin{cases} x+1; & x \geq 0 \\ (x+1)/x; & \text{sicer} \end{cases}$$
bijekcija, ji poišči inverz.

2. Reši enačbo
$$\left|x^2 + x - 2\right| + \left|x^2 - x - 2\right| = 2.$$

3. Brez uporabe L'Hospitalovega pravila izračunaj limito
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

4. Poišči razmerje med polmerom R in višino H pokončnega valja, da bo njegova površina pri danem volumnu največja.

5. Izračunaj integral
$$\int \frac{-4 - 3\,x + 3\,x^2}{3 - 5\,x + x^2 + x^3}\,dx$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

20.3.2000

1. Reši neenačbo
$$|1-|3-x|| \leq 1; \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Poišči vse rešitve enačbe
$$z^2 = \bar{z}^{-1}; \qquad z \in \mathbb{C}$$

3. Poišči vsa stekališča zaporedij
   (a) $a_n := \cos^n(n\pi)$
   (b) $a_n := \frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}$

4. Poišči ekstreme funkcije
$$f(x) := \cos(2x^2)\sin x^2$$
na intervalu $[0, \sqrt{\pi}]$.
(Nasvet: Na koncu ti bo morebiti v pomoč formula $\sin(t/2) = \sqrt{(1-\cos t)/2}$ ali pa $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

5. Izračunaj ploščino elipse s polosema a in b.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

5.6.2000

1. Pokaži, da je zaporedje
$$a_0 := \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2a_n}$$
monotono. Če je konvergentno, mu poišči limito.

2. S pomočjo formule $(\cos t + i \sin t)^\alpha = \cos \alpha t + i \sin \alpha t$, izrazi $\cos^3 t$ z vsoto cosinusov večkratnih kotov.

3. Poišči vse točke na intervalu $[1/(2\pi), 1/\pi]$, v katerih je tangenta na krivuljo $y = x + \sin(1/x)$ vzporedna s premico $Y = X$.

4. V elipso $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ včrtaj pravokotnik največje površine, ki ima stranice vzporedne koordinatnim osem. Kolika je njegova ploščina?

5. Izračunaj površino ploskve, ki jo omejujeta krivulji $y = x^2$ ter $y^2 = 8x$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

28.8.2000

1. Pokaži, da je zaporedje
$$a_0 := -1/4, \qquad a_{n+1} := 3a_n^2 + 2a_n$$
monotono. Če je konvergentno, mu poišči limito.

2. Poišči rešitev neenačbe $|2x+1| - |x-1| \leq 1$.

3. Poišči vse tiste točke na elipsi z enačbo $2x^2 + y^2 = 1$, v katerih normala poteka skozi koordinatno izhodišče.

4. S pomočjo odvoda preveri neenakost $1 - \cos x \leq x$ za pozitivne x.

5. Integriraj
$$\int x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$$
(Nasvet: $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2\,t)}{2}$.)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

15.11.2000

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe

$$|1 - |x - 1|| < 1$$

2. Reši enačbo

$$z^3 = \bar{z}/2; \quad z \in \mathbb{C}$$

   (Nasvet: Uporabi polarne koordinate.)

3. Zaporedje $\big(a_n\big)_n$ je rekurzivno podano z

$$a_1 := 1; \qquad a_{n+1} := \frac{3 + 4a_n}{1 + a_n}$$

   Preveri, da je monotono in omejeno. Če je konvergentno, mu izračunaj tudi limito. (Nasvet: $\sqrt{21} \simeq 4.58....$)

4. S pomočjo odvajanja pokaži, da ima enačba $x - 1 = \ln x$ natanko eno rešitev. Katero?

5. Poišči ploščino lika, omejenega s krivuljami

$$x = 1/2,\ y = x - 1,\ y = \ln x$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

19.1.2001

1. Brez uporabe Vennovih diagramov preveri, da za poljubni množici A, B velja
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

2. Poišči vse realne rešitve neenačbe
$$|x+1| \geq 1 + 2|x-1|$$

3. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom $f : x \mapsto 2x^2 - x$. Poišči vsa realna števila, ki rešijo enačbo $(f \circ f)(x) = x$.

4. Poišči limito L zaporedja $a_n := \frac{2n-2}{5n+1}$. Koliko členov tega zaporedja je od L oddaljeno za *več kot* 10^{-2}?

5. Z uporabo kvocientnega kriterija preveri, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$
konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na 2 decimalki natančno?

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

25.1.2001

1. Naj bo $A \subset B$. Preveri, če tedaj za vsako množico C velja:

$$C \backslash B \subset C \backslash A$$

2. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2; & x \geq 0 \\ -x^2; & \text{sicer} \end{cases}$$

   Preveri njeno bijektivnost, in poišči inverz, če obstaja.

3. Poišči limito zaporedja

$$a_n := n\big(\sqrt{n^2+1} - n\big)$$

4. Poišči vse realne rešitve neenačbe

$$\sqrt{1+2\,x} \geq \frac{1}{x-1}$$

5. Preveri da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 - n}$$

   konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na 2 decimalke natančno?
   (Nasvet: Leibnitzev kriterij.)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

25.1.2001

1. Naj bo $A \subset B$. Preveri, če tedaj za vsako množico C velja:

$$A \backslash C \subset B \backslash C$$

2. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom

$$f : x \mapsto \begin{cases} -(-x)^2; & x \geq 0 \\ x^2; & \text{sicer} \end{cases}$$

   Preveri njeno bijektivnost, in poišči inverz, če obstaja.

3. Poišči limito zaporedja

$$a_n := n\left(\sqrt{n^2 - n} - n\right)$$

4. Poišči vse realne rešitve neenačbe

$$\sqrt{2 + x} \leq \frac{2}{x - 1}$$

5. Preveri da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - n + 1}$$

   konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na 2 decimalke natančno?
   (Nasvet: Leibnitzev kriterij.)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

5.6.2001

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe

$$\sqrt{x^2 - x} > x + 1$$

2. Poišči vsa kompleksna števila, ki rešijo

$$\overline{z}^5 = -3i|z|$$

3. Preveri, da je rekurzivno podano zaporedje

$$a_1 := \tfrac{3}{2}; \qquad a_{n+1} := a_n^2 - 2a_n + 2$$

   konvergentno. Poišči tudi njegovo limito.

4. Poišči vsa realna števila a, da bo

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2; & x \leq 0 \\ \frac{1-\sqrt[3]{1-ax^3}}{x^3}; & \text{sicer} \end{cases}$$

   zvezna povsod.

5. Preveri da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

   konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na 2 decimalke natančno?

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

27.8.2001

1. Preveri, če je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f : x \mapsto \frac{x - x^2}{1 + |x|}$$
bijektivna. Poišči tudi njen inverz, če obstaja.

2. S pomočjo popolne indukcije pokaži veljavnost formule
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

3. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo enačbi
$$|z|^2 - z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{22} + 5$$

4. Poišči naravno definicijsko območje funkcije
$$f(x) := \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$$
Ali jo lahko razširiš, da bo zvezna povsod na $\mathbb{R}$?

5. Preveri da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2+1}$$
konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na 2 decimalke natančno?

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

13.11.2001

1. Poišči vse rešitve neenačbe
$$|x - |2x + 4|| < 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Poišči vsa kompleksna števila, ki rešijo
$$\overline{z}^5 - 432 = (3 - \sqrt{3}i)^5$$

3. Preveri, da je rekurzivno podano zaporedje
$$a_1 := \tfrac{3}{2}; \qquad a_{n+1} := a_n^2 - 2a_n + 2$$
konvergentno. Poišči tudi njegovo limito.

4. Poišči vsa realna števila a, da bo
$$f : x \mapsto \begin{cases} 2; & x \leq 0 \\ \frac{1-\sqrt[3]{1-ax^3}}{x^3}; & \text{sicer} \end{cases}$$
zvezna povsod.

5. Preveri da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n^2}{(-2)^n}$$
konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na 2 decimalke natančno?
(Nasvet: $2^{10} = 1024 > 10^3$.)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

17.1.2002

1. Poišči realne rešitve neenačbe
$$\sqrt{4-x+x^2} \leq 3-\sqrt{1+x^2}$$

2. Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo
$$z^4 = i\bar{z}$$

3. Koliko členov zaporedja se od svoje limite razlikuje za manj kot $\varepsilon := 10^{-2}$, če je
$$a_n := \frac{2n+1}{3n-2}$$

4. Razvij funkcijo $f(x) := \sqrt{2+x^2}$ v potenčno vrsto po potencah x, in preveri, kdaj dobljena vrsta konvergira.

5. V lik, ki ga omejujeta krivulji $y = 4x^2$ in $y = 16$ vpišemo pravokotnik s stranicami, vzporednimi koordinatnima osema. Kdaj bo njegova ploščina največja?

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

24.1.2002

1. Reši neenačbo
$$\sqrt{1+x^2} \leq 3 - |x|; \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Poišči vse rešitve enačbe
$$z^3 = -2\bar{z}^{-1}; \qquad z \in \mathbb{C}$$

3. Poišči limito zaporedja
$$a_n := \frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{2n+1} - \frac{n^2+1}{2\,n-1}$$
(Nasvet: $1+2+3+\cdots+2n+1 = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}$)

4. V elipso $x^2/4 + y^2 = 1$ včrtamo enakokrak trikotnik z enim od oglišč v $T_1(0,1)$. Poišči absciso preostalih dveh oglišč, da bo ploščina trikotnika največja.

5. Integriraj
$$\int \frac{2+x+x^2}{(x-1)\,(1+x)^2}\,dx$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

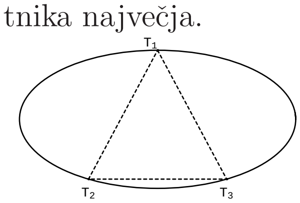
24.1.2002

1. Reši neenačbo
$$\sqrt{1+x^2} \leq 3 - |x|; \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Poišči vse rešitve enačbe
$$z^3 = -2\bar{z}^{-1}; \qquad z \in \mathbb{C}$$

3. Poišči limito zaporedja
$$a_n := \frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{2n+1} - \frac{n^2+1}{2\,n-1}$$
(Nasvet: $1+2+3+\cdots+2n+1 = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}$)

4. V elipso $x^2/4 + y^2 = 1$ včrtamo enakokrak trikotnik z enim od oglišč v $T_1(0,1)$. Poišči absciso preostalih dveh oglišč, da bo ploščina trikotnika največja.



5. Integriraj
$$\int \frac{3\,x}{-2+x+x^2}\,dx$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

24.1.2002

1. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^2 = \bar{z}^{-1}; \qquad z \in \mathbb{C}$$

2. Dano je zaporedje

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

   Pokaži, da je monotono padajoče in da je konvergentno.
   (Nasvet: Pri dokazu omejenosti ti bo mogoče v pomoč neenačba $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$.)

3. Podana je hiperbola $f(x) = 4/x$. Skozi točko $T(x_0, f(x_0))$ potegnemo tangento nanjo. V kakšnem razmerju razdeli ta točka odsek tangente, ki leži med koordinatnima osema?

4. Izračunaj nedoločeni integral $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{x^2}\, dx$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
A

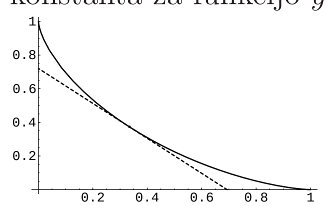
18.3.2002

1. Reši neenačbo
$$|x| > 1 - \sqrt{1-x}; \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Rekurzivno je podano zaporedje
$$a_0 := 1; \qquad a_{n+1} := \frac{a_n + 1}{a_n + 2}$$
Pokaži, da so vsi členi pozitivni. Preveri monotonost in izračunaj limito.

3. Preveri, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na dve decimalki? (Nasvet: $1/n^3 \leq 1/((n-1)n)$ za $n \geq 2$.)

4. Pokaži, da je dolžina odseka tangente med obema koordinatnima osema konstanta za funkcijo $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$.



5. Integriraj
$$\int \frac{x-2}{x^2 - 2x + 1}\, dx$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I
B

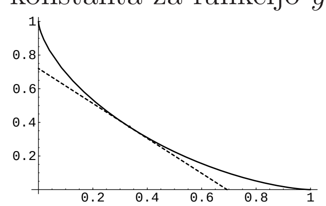
18.3.2002

1. Reši neenačbo
$$x > 1 - \sqrt{2-x}; \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Rekurzivno je podano zaporedje
$$x_0 := 2; \qquad x_{n+1} := \frac{x_n + 2}{x_n + 3}$$
Pokaži, da so vsi členi pozitivni. Preveri monotonost in izračunaj limito.

3. Preveri, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na dve decimalki? (Nasvet: $1/n^4 \leq 1/((n-1)n)$ za $n \geq 2$.)

4. Pokaži, da je dolžina odseka tangente med obema koordinatnima osema konstanta za funkcijo $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$.



5. Integriraj
$$\int \frac{2-t}{1-2t+t^2}\, dt$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

3.6.2002

1. Poišči vse rešitve neenačbe
$$|x - |2x + 4|| < 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
2. Poišči množico točk, ki reši enačbo
$$\frac{3z^2}{16} + \frac{5}{8}|z|^2 + \frac{3\bar{z}^2}{16} = 1 \qquad (z \in \mathbb{C})$$
3. Poišči limito zaporedja $a_n := \frac{n+n^2}{1+n^2}$. Koliko členov se od limite razlikuje za manj kot $\varepsilon := 10^{-3}$?
4. S pomočjo odvoda preveri, da za vsak $x > 0$ velja $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x$.
5. Razvij v potenčno vrsto funkcijo $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$. Za katere x dobljena vrsta konvergira?

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

26.8.2002

1. Poišči vse rešitve enačbe
$$z^2 = \bar{z}^{-1}; \qquad z \in \mathbb{C}$$

2. Dano je zaporedje
$$a_n := \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$
Pokaži, da je monotono padajoče in da je konvergentno.
(Nasvet: Pri dokazu omejenosti ti bo mogoče v pomoč neenačba $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$.)

3. Podana je hiperbola $f(x) = 4/x$. Skozi točko $T(x_0, f(x_0))$ potegnemo tangento nanjo. V kakšnem razmerju razdeli ta točka odsek tangente, ki leži med koordinatnima osema?

4. Izračunaj nedoločeni integral $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{x^2}\, dx$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

26.8.2002

1. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^2 = \bar{z}^{-1}; \qquad z \in \mathbb{C}$$

2. Dano je zaporedje

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

   Pokaži, da je monotono padajoče in da je konvergentno.
   (Nasvet: Pri dokazu omejenosti ti bo mogoče v pomoč neenačba $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$.)

3. Podana je hiperbola $f(x) = 4/x$. Skozi točko $T(4, 1)$ potegnemo tangento nanjo. V kakšnem razmerju razdeli ta točka odsek tangente, ki leži med koordinatnima osema?

4. Izračunaj nedoločeni integral $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{x^2}\,dx$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

13.11.2002

1. Poišči vse rešitve enačbe $z^4 = 8i\overline{z}$, kjer $z \in \mathbb{C}$.

2. Dano je rekurzivno zaporedje $x_{n+1} := \sqrt[3]{x_n + 6}$. Dokaži, da je zaporedje konvergentno za vsak $x_0 \geq 2$ in poišči limito!
(Nasvet: $6 + x - x^3 = -\left(-2 + x\right)\left(3 + 2\,x + x^2\right)$)

3. Na krivulji
$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
poišči točko, v kateri normala na krivuljo poteka skozi koordinatno izhodišče.

4. Izračunaj integral $\displaystyle\int x \sin\sqrt{x}\,dx$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

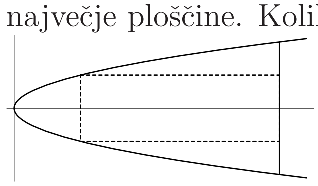
23.1.2003

1. Z uporabo popolne indukcije pokaži, da je
$$4^{2n} - 1$$
deljivo s 15 pri vsakem $n \in \mathbb{N}$. 10 točk

2. Poišči vse rešitve enačbe
$$z^7 = \frac{1-i}{\bar{z}^2}$$
30 točk

3. Pokaži, da je rekurzivno podano zaporedje
$$x_1 := 1, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n}{1+x_n}$$
monotono. Če konvergira, mu izračunaj limito. 20 točk

4. Skiciraj potek krivulj $y = x^2$ ter $y = \frac{1}{x^2}$, in izračunaj, pod kakšnim kotom se sekata.
20 točk

5. V lik, omejen z enačbama $y^2 = 2x$, ter $x = 2a$ vpiši pravokotnik največje ploščine. Koliko merijo njegove stranice?

20 točk

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

30.1.2003

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe

$$|2x - |1 - x|| < 1$$

2. Reši enačbo

$$z^3 = \bar{z}/2; \quad z \in \mathbb{C}$$

3. Zaporedje $\big(a_n\big)_n$ je rekurzivno podano z

$$a_1 := 1; \qquad a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{5}{a_n}$$

   Preveri, da je monotono in omejeno. Če je konvergentno, mu izračunaj tudi limito.

4. Poišči enačbo tangente na $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ v točki $x = 3/5$. Kolikšna je dolžina njenega odseka med obema koordinatnima osema?

5. Preveri, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{2^n}$ konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali z natančnostjo 10^{-2}?
   (Nasvet: primerjaj jo z neko znano vrsto)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

17.3.2003

1. Če je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x+1)^3; & \text{če } x \geq 0 \\ 2x+1; & \text{če } x < 0 \end{cases}$$

   obrnljiva, ji poišči inverz.
   (Nasvet: Če je $x < 0$, je $2x + 1 < 1$.)

2. Poišči limito zaporedja $a_n := \frac{2n-1}{5n-3}$. Koliko členov zaporedja je od limite oddaljeno za več kot $\varepsilon := 10^{-3}$?

3. Pod katerim kotom se sekata paraboli $y = (x-2)^2$ in $y = -4+6x-x^2$?

4. Preveri, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali z natančnostjo 10^{-2}?

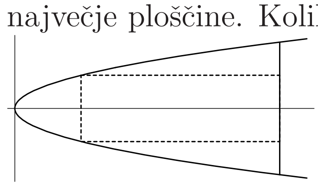
POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

4.6.2003

1. Pokaži, da je $7^{n+1} - 2^{2n}$ deljivo s 3 pri vsakem naravnem številu n.

2. Izračunaj
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x) - 2\,\sin(h+x) + \sin(2\,h+x)}{h^2}$$
(Nasvet: $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\,\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$;
$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\,\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\,\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})$.)

3. V lik, omejen z enačbama $y^2 = 3x$, ter $x = 2a$ vpiši pravokotnik največje ploščine. Koliko merijo njegove stranice?



20 točk

4. Pokaži, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n(2n-1)}$$
konvergira. Poišči število potrebnih členov in število potrebnih decimalk, na katere moramo zaokroževati delne rezultate, da bi jo izračunali na 2 decimalki natančno.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

25.8.2003

1. Preveri, če je funkcija $f : \mathbb{R} \to (-1/2, 1/2)$, definirana z
$$f : x \mapsto \frac{x}{1 + 2|x|}$$
obrnljiva. Če je, ji poišči inverz.
(Nasvet: $f(x) > 0$ le za pozitivne argumente.)

2. Reši neenačbo
$$|1 + x| \leq |1 - x|$$

3. S pomočjo kompleksnega števila $\alpha := \cos x + i \sin x$ preveri formulo
$$\cos^5 x = \frac{10\,\cos x + 5\,\cos(3\,x) + \cos(5\,x)}{16}$$

4. Poišči najkrajšo razdaljo od koordinatnega izhodišča do hiperbole $y = 1/x$.

5. Preveri, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+2}$ konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali z natančnostjo 10^{-2}?

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

12.11.2003

1. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana z
$$f : x \mapsto \frac{x}{1+2|x|}.$$
Poišči $f \circ f$, in preveri, kdaj je $(f \circ f)(x) = \frac{x}{1+4|x|}$. Ali je $f \circ f$ surjektivna?

2. Reši neenačbo
$$|1+x| \leq |1-2x|$$

3. Izračunaj limito
$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$
(Nasvet: $1 - \cos x = 2\sin^2(\frac{x}{2})$.)

4. Poišči točko na grafu funkcije $y = \sqrt{x}$, ki je najbližje točki $T(1, 2)$.

5. Preveri, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2n}{n^2+3}$ konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali z natančnostjo 10^{-2}?

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

12.11.2003

1. Za funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirano z
$$f : x \mapsto \frac{x}{1 + 2|x|}$$
poišči $f \circ f$, in preveri, kdaj je $(f \circ f)(x) = \frac{x}{1+4|x|}$. Ali je $f \circ f$ surjektivna?

2. Reši neenačbo
$$|1 + x| \leq |1 - 2x|$$

3. Izračunaj limito
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$
(Nasvet: $1 - \cos x = 2\sin^2(\frac{x}{2})$.)

4. Poišči točko na grafu funkcije $y = \sqrt{x}$, ki je najbližje točki $T(1, 2)$.

5. Preveri, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{n^2+3}$ konvergira. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali z natančnostjo 10^{-2}?

RAČUNSKI DEL IZPITA IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

29.1.2004

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe

$$||x+1|-|x-1|| \geq 1$$

2. Zaporedje je podano rekurzivno z $a_1 := 2$ in $a_{n+1} := \frac{1+5\,a_n}{4+2\,a_n}$. Pokaži, da je monotono, omejeno, in poišči njegovo limito.

3. Poišči točko na intervalu $[-1,2]$, v kateri je tangenta na krivuljo $y = x^3 + x$ vzporedna s premico skozi točki $T_1(-1,-2)$ in $T_2(2,10)$.

4. Lik A je omejen s parabolo $y^2 = 2px$ in premico $x = 2a$. $(p, a \gneq 0)$. Poišči pravokotnik maksimalne ploščine, katerega stranice so vzporedne koordinatnim osem da ga še lahko vložimo v A.

RAČUNSKI DEL IZPITA IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

6.2.2004

1. Poišči vse realne rešitve neenačbe
$$5 - \sqrt{1+x} \leq x$$

2. Pokaži, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ konvergentnta. Koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali z natančnostjo 10^{-3}?

3. Poišči vsa kompleksna števila $z = x + iy$, da je $\frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R}$.

4. Krožni izsek enotskega kroga zvijemo v pokončen stožec.

   (a) Pokaži, da je njegov volumen enak $V = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{1-r^2}$, kjer je r polmer njegove osnovne ploskve.

   (b) Pri katerem kotu ϕ bo njegov volumen maksimalen?

   (Nasvet: Volumen stožca z višino h in polmerom osnovne ploskve r je $V = \pi r^2 h/3$)

RAČUNSKI DEL IZPITA IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

24.3.2004

1. Z uporabo popolne indukcije pokaži, da je $4^{2n} - 1$ deljivo s 15 pri vsakem $n \in \mathbb{N}$.

2. Poišči vsa kompleksna števila $z = x + iy$, da je $\frac{z^2}{z+1} \in \mathbb{R}$.

3. Koliko členov moramo sešteti, da bi izračunali vsoto $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{n(n+1)}$ na tri decimalke natančno?

4. Poišči pravokotnik največje površine, ki ga še lahko včrtamo elipsi $x^2 + y^2/4 = 1$, da so njegove stranice vzporedne koordinatnim osem.

IZPIT IZ MATEMATIČNE ANALIZE I (9.6.2004)

1. Reši neenačbo $\left|x^2 + x - 2\right| + \left|x^2 - x - 2\right| = 2$.

2. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^2 = \bar{z}^3|z|; \qquad (z \in \mathbb{C})$$

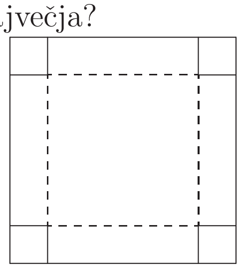
   (Nasvet: polarne koordinate!)

3. Preveri, če je zaporedje

$$\begin{aligned} x_0 &:= 2.5 \\ x_{n+1} &:= 9 - 5x_n + x_n^2 \end{aligned}$$

   monotono in če je omejeno, navzdol z 2 in navzgor s 3. Poišči tudi njegovo limito, če obstaja!

4. Iz kvadratnega kosa kartona velikosti 18×18 na robovih izrežemo štiri skladne kvadratke. Preostal kos kartona zložimo v odprto škatlo tako, da prepognemo robove, ki so na sliki črtkani. Kako dolge stranice morajo imeti izrezani kvadratki, da bo prostornina tako dobljene škatle največja? (25 točk)



RAČUNSKI DEL IZPITA IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

30.8.2004

1. Pokaži, da je $7^{n+1} - 2^{2n}$ deljivo s 3 pri vsakem naravnem številu n.

2. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani s predpisom $g : x \mapsto (x-1)^2$ in
$$f : x \mapsto \begin{cases} -x; & x > 1 \\ 2; & \text{x=1} \\ -2; & x < 1 \end{cases}$$
Poišči $f \circ g$ ter $g \circ g$.

3. S pomočjo odvoda preveri, da je
$$2 + (x+1)\ln x \geq 2x \qquad (x \geq 1)$$

4. V kompleksni ravnini skiciraj vse točke $z \in \mathbb{C}$, ki rešijo enačbo $\mathrm{Im}\big((\frac{z+1}{z-1})^2\big) = 0$

4 Teoretična vprašanja

Kolokvij – teorija

Analiza 1/Matematika 1

29. oktober 2007

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Napišite definicijo supremuma in maksimuma množice. Kakšna je razlika med njima?

(3 točke)

2. Napišite definicijo stekališča in limite zaporedja. Kakšna je razlika med njima?

(3 točke)

Izpit – teorija

Analiza 1/Matematika 1

26. november 2007

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Ali ima vsako realno zaporedje vsaj eno stekališče? (pokažite, da to velja ali pa navedite protiprimer)

(8 točke)

2. Kako smo definirali funkcijo $\arccos y$? Koliko je $\arccos(\cos(2\pi))$?

(8 točke)

3. Napišite vsaj 3 lastnosti, ki jih ima vsaka zvezna funkcija na omejenem, zaprtem intervalu $[a, b]$.
Za vsako od napisanih lastnosti poiščite tudi primer zvezne funkcije na odprtem intervalu $(0, 1)$, ki te lastnosti nima.

(9 točke)

Izpit – teorija

Analiza II

15. april 2008

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Kaj točno pomeni, če rečemo, da funkcija f v točki $x = x_0$ zavzame lokalni ekstrem? Kako s pomočjo odvoda iščemo lokalne ekstreme, in kako preverimo ali gre za lokalni minimum/maksimum (opišite metodo višjih odvodov in metodo spremembe predznaka prvega odvoda).

(8 točke)

2. Kaj je konvergenčni polmer potenčne vrste? Kako ga izračunamo?

(8 točke)

3. Kako smo definirali določeni (Riemannov) integral omejene funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$? Za katere funkcije prav gotovo obstaja?

(9 točke)

Izpit – teorija

Analiza 1/Matematika 1

1. julij 2008

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Kako smo definirali kompleksna števila? Kako jih zapišemo (kanonični, polarni zapis)? Kaj geometrijsko pomeni seštevanje in kaj množenje kompleksnih števil?

(8 točke)

2. Kdaj pravimo, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira? Kaj je njena vsota? Napišite tudi vsaj dva kriterija za konvergenco vrste.

(8 točke)

3. Napišite vsaj 2 lastnosti, ki jih ima vsaka zvezna funkcija na omejenem, zaprtem intervalu $[a, b]$.
Za vsako od napisanih lastnosti poiščite tudi primer zvezne funkcije na odprtem intervalu $(0, 1)$, ki te lastnosti nima.

(9 točke)

Izpit – teorija

Analiza 1/Matematika 1

29. september 2008

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Ali ima vsako realno zaporedje vsaj eno stekališče? (pokažite, da to velja ali pa navedite protiprimer)

(8 točke)

2. Kako smo definirali funkcijo $\arcsin y$? Koliko je $\arcsin(\sin(2\pi))$?

(8 točke)

3. Napišite vsaj 3 lastnosti, ki jih ima vsaka zvezna funkcija na omejenem, zaprtem intervalu $[a, b]$.
Za vsako od napisanih lastnosti poiščite tudi primer zvezne funkcije na odprtem intervalu $(0, 1)$, ki te lastnosti nima.

(9 točke)

Kolokvij – teorija **5. november 2008**

Analiza 1/Matematika 1/Matematika

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Kdaj pravimo, da je neka funkcija $f : A \to B$ injektivna, kdaj je surjektivna in kdaj je bijektivna? Kaj je njen inverz in kdaj ga funkcija sploh ima? (7 točk)

2. Kaj pravi zadnji, Dedekindov aksiom o polnosti realnih števil? Denimo, da je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Kako v praksi preverimo, da je število s supremum množice Ω? (7 točk)

3. Kako smo definirali kompleksna števila? Kako sta bili definirani operaciji na njih?

(6 točk)

Izpit – teorija (A) **25. november 2008**

Analiza 1/Matematika 1

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Kako smo definirali funkcijo arccos? Kaj je njegovo naravno definicijsko območje in kaj zaloga vrednosti? (10 točk)

2. Kaj je limita zaporedja in kakšna je razlika med limito in stekališčem? (10 točk)

3. Kdaj pravimo, da je funkcija zvezna, in kdaj je zvezna v točki? Ali je $x \mapsto 1/x$ zvezna?

(10 točk)

4. Kaj je kartezični in kaj polarni zapis kompleksnega števila? Kakšna je povezava med njima? Kako je z enoličnostjo zapisa? (10 točk)

5. Kako preverimo, da je število s infimum množice Ω? Kaj imata skupnega infimum in minimum, in kje se razlikujeta? (10 točk)

Izpit – teorija (B) **25. november 2008**

Analiza 1/Matematika 1

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Kako smo definirali funkcijo arcsin? Kaj je njegovo naravno definicijsko območje in kaj zaloga vrednosti? (10 točk)

2. Kaj je stekališče zaporedja in kakšna je razlika med stekališčem in limito? (10 točk)

3. Kdaj pravimo, da je funkcija zvezna, in kdaj je zvezna v točki? Ali je $x \mapsto 1/x^2$ zvezna? (10 točk)

4. Kaj je kartezični in kaj polarni zapis kompleksnega števila? Kakšna je povezava med njima? Kako je z enoličnostjo zapisa? (10 točk)

5. Kako preverimo, da je število s supremum množice Ω? Kaj imata skupnega supremum in maksimum, in kje se razlikujeta? (10 točk)