UNIVERZA NA PRIMORSKEM

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Osnove numeričnega računanja: Zbirka kolokvijev in izpitov

izr. prof. dr. Vito Vitrih, dr. Karla Ferjančič

DRUGO UČNO GRADIVO

78 strani

Matematika in Matematika v ekonomiji in financah
dodiplomska študijska programa

DRUGA IZDAJA

Koper, 2020

Predgovor

Pred vami je zbirka kolokvijev in pisnih izpitov, ki so se zvrstili med leti 2008 in 2019 pri predmetu Osnove numeričnega računanja, ki je obvezni predmet drugega letnika na dodiplomskem študiju Matematike ter Matematike v ekonomiji in financah na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Univerze na Primorskem. Snov, ki je obravnavana pri tem predmetu in posledično zajeta v gradivu te skripte, med drugim vključuje reševanje nelinearnih enačb in sistemov nelinearnih enačb, reševanje kvadratnih in predoločenih sistemov linearnih enačb, računanje lastnih vrednosti, interpolacijo, numerično odvajanje in integracijo ter Bézierove krivulje.

Kazalo

POGLAVJE 1

KOLOKVIJI

KOLOKVIJ

4. december 2008

[10] **1.** Za iskanje ničel realne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poznamo več metod.

(a) Naštej vsaj tri izmed njih in eno opiši.

Poišči pravilen odgovor za naslednje trditve:

(b) O tem, ali navadna iteracija v bližini rešitve konvergira ali ne, odloča

(i) prvi odvod iteracijske funkcije,
(ii) drugi odvod iteracijske funkcije,
(iii) tretji odvod iteracijske funkcije.

(c) Metoda s kvadratično konvergenco v bližini rešitve v primerjavi z metodo z linearno konvergenco

(i) počasneje kovergira,
(ii) hitreje konvergira,
(iii) hitrost konvergence je za obe metodi enaka.

(d) Pri tangentni metodi moramo na začetku poznati

(i) en začetni približek,
(ii) dva začetna približka,
(iii) enako število začetnih približkov kot pri sekantni metodi.

(e) Tangentna metoda ima v bližini rešitve α kubično konvergenco, če velja

(i) $f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0,$
(ii) $f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0,\ f''(\alpha) = 0,$
(iii) $f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) \neq 0,\ f''(\alpha) = 0.$

[10] **2.** Za reševanje linearnih sistemov $Ax = b$, z obrnljivo matriko A, uporabljamo LU razcep ($A = L \cdot U$).

(a) Kaj velja za matriki L in U?

(b) V kakšnem primeru LU razcep odpove? Kakšno modifikacijo LU razcepa uporabimo v tem primeru? Kaj naredimo na vsakem koraku?

(c) Kakšna je časovna zahtevnost LU razcepa?

(d) Za posebne matrike lahko podoben razcep naredimo v pol krajšem času. Za kakšne matrike to velja? Kako imenujemo ta razcep?

[10] **3.** Linearni sistem $Ax = b$ lahko rešujemo tudi iterativno.

(a) Naštej dva primera, kdaj se poslužimo tega postopka.

(b) Zapiši Jacobijevo metodo v obliki iteracije.

(c) Zapiši Gauss-Seidelovo metodo v obliki iteracije.

(d) Privzemimo, da je matrika A zgornje trikotna. Katera izmed metod iz točk (b) in (c) v tem primeru konvergira hitreje? Odgovor utemelji.

[10] **4.** Zapiši število -111.625 v dvojni natančnosti v premični piki (64 bitov).

[15] **5.** Naj bo $f_\mu(x) = x^{\mu+2} - a\,x^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, $a > 0$. S tangentno metodo želimo izračunati $\sqrt{a}$ kot ničlo funkcije f_μ.

(a) Določi parameter μ tako, da bo red konvergence tangentne metode v bližini $\sqrt{a}$ vsaj kubičen.

(b) Zapiši tangentno metodo za izračunani μ iz točke (a) in z njo izračunaj $\sqrt{10}$ na 4 decimalna mesta natančno, pri čemer za začetni približek vzemi $x_0 = 3$.
Če točke (a) ne znaš rešiti, vzemi $\mu = -\frac{1}{2}$.

[15] **6.** Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definirana kot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ in $\|A\|_F$. Poskusi še čimbolje oceniti $\|A\|_2$ za $n = 4$.

[15] **7.** Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokaži ali ovrži naslednje trditve:

(a) Če je $\|A\|_\infty = \|A\|_1$, potem je A simetrična.

(b) Če je A simetrična, potem je $\|A\|_\infty = \|A\|_1$.

(c) Če je $\|A\|_\infty \le 1$, potem je $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \le n$.

[15] **8.** Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj LU razcep matrike A brez pivotiranja.

KOLOKVIJ

13. maj 2010

[10] **1.** Obkroži pravilne trditve:

(a) Bisekcija ni primerna metoda za iskanje ničel sodih stopenj.

(b) Različne iteracijske funkcije lahko imajo različne rede konvergenc v bližini rešitev.

(c) Tangentna metoda ima v okolici trojne ničle kubično konvergenco.

(d) Konvergenca tangentne metode je zagotovljena za vsak začetni približek.

(e) Metoda, ki ima kvadratično konvergenco v bližini rešitve, lahko daleč stran od rešitve konvergira počasneje od metode, ki ima linearno konvergenco v bližini rešitve.

(f) Newtonova metoda za reševanje nelinearnih sistemov je posplošitev tangentne metode za reševanje ene nelinearne enačbe.

(g) Za matriko A rečemo, da je pozitivno definitna, če za vsak vektor $x \neq 0$ velja $x^T A^{-1} x > 0$.

(h) Operatorske norme matrik so posebni primeri matričnih norm, za katere ne velja trikotniška neenakost.

(i) Za ortogonalne matrike velja $(AA^T)^{-1} = I$.

(j) Za vsako matriko obstaja lastna vrednost, ki je po absolutni vrednosti večja od spektralne norme matrike.

[15] **2.** Odgovori na naslednja vprašanja:

(a) Za reševanje linearnih sistemov $Ax = b$, z obrnljivo matriko A, uporabljamo LU razcep ($A = L \cdot U$). Kaj velja za matriki L in U?

(b) Recimo, da je matrika A diagonalna matrika. Kakšni sta potem matriki L in U v LU razcepu. Koliko operacij potrebujemo za izračun LU razcepa v tem primeru?

(c) Kakšna je časovna zahtevnost LU razcepa za splošno matriko? Za posebne matrike lahko podoben razcep naredimo v pol krajšem času. Za kakšne matrike to velja? Kako imenujemo ta razcep?

(d) Ali je matrika A, za katero velja $\det A = -1$, lahko pozitivno definitna matrika? Odgovor utemelji.

(e) Če uporabljamo LU razcep z delnim pivotiranjem, so v matriki L vsi elementi po absolutni vrednosti ≤ 1. Zakaj?

[15] **3.** Zapiši število -80.34375 v enojni natančnosti v premični piki (32 bitov).

[15] **4.** Izračunaj negibne točke iteracijske funkcije

$$x_{r+1} = g(x_r) = \frac{2x_r - 1}{x_r^2}.$$

Določi, katere od teh točk so privlačne in katere odbojne. Določi red konvergence v bližini privlačnih točk.

[15] **5.** Za naslednji sistem nelinearnih enačb naredi en korak Newtonove metode z začetnim približkom $(x_0, y_0)^T = (-1, -2)^T$:

$$x^3 + y^3 = -2, \quad x^2 + xy + y = 1.$$

[15] **6.** Naj bo

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Izračunaj LU razcep matrike A_n brez pivotiranja. S pomočjo tega razcepa izračunaj $\det A_n$.

[15] **7.** Naj bo A_n matrika iz naloge 6. Izračunaj $\|A_n\|_1$, $\|A_n\|_\infty$, $\|A_n\|_F$ in $N_\infty(A_n)$. Poskusi še čimbolje oceniti $\|A_n\|_2$ za $n = 5$.

KOLOKVIJ

4. november 2010

[20] **1.** Obkroži pravilne trditve (obkroži največ 5 odgovorov):

(a) Pomembno je, da je napaka metode D_m bistveno manjša od neodstranljive napake D_n.

(b) Z bisekcijo ne moremo poiskati ničel 3. stopnje.

(c) Tangentna metoda ima kubično konvergenco v okolici ničle α, če velja $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$ in $f''(\alpha) = 0$.

(d) Tangentna metoda konvergira za poljubni začetni približek.

(e) Identična matrika je simetrična pozitivno definitna matrika.

(f) Frobeniusova norma ni operatorska norma, je pa matrična norma.

(g) Če je matrika obrnljiva, potem lahko vedno izvedemo LU razcep z delnim pivotiranjem.

(h) Sistem $Ax = b$ rešujemo tako, da poiščemo inverz matrike A.

(i) Prema in obratna substitucija sta časovno manj zahtevni od LU razcepa.

(j) Za ortogonalne matrike Q velja $Q^{-1} = Q^{-T}$.

[15] **2.** Zapiši število 2010.65625 v enojni natančnosti v premični piki (32 bitov).

[15] **3.** Poišči negibne točke iteracijske funkcije

$$x_{r+1} = g(x_r) = (\gamma + 1)x_r - x_r^2, \quad \frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1.$$

Za vsako od fiksnih točk določi ali je odbojna ali privlačna točka za funkcijo g. Za katere γ ima metoda kvadratično konvergenco v okolici privlačnih točk?

[15] **4.** Za naslednji sistem nelinearnih enačb naredi en korak Newtonove metode z začetnim približkom $(x_0, y_0)^T = (1, -1)^T$:

$$x^2 + 3y^2 = 1, \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

[20] **5.** Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Razcepi matriko A na produkt $A = L \cdot U$, kjer je L spodnje in U zgornje trikotna matrika, pri čemer naj velja:

(a) diagonalni elementi matrike L so enaki 1,

(b) diagonalni elementi matrike U so enaki 1,

(c) $U = L^T$.

[15] **6.** Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Dokaži ali ovrzi (poišči protiprimer) neenakosti

(a) $\left\| \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right\|_1 \leq \sqrt{\|A\|_1^2 + \|B\|_1^2}$,

(b) $\left\| \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \sqrt{\|A\|_\infty^2 + \|B\|_\infty^2}$,

KOLOKVIJ

5. december 2011

1. Odgovorite na naslednja vprašanja:

   a) Dana je enačba $x+x^2+e^x = 0$. Katere numerične metode za reševanje te enačbe poznate? Eno izmed njih opišite.

   b) Opišite razcep Choleskega. Kaj velja za matriko A, za katero ta razcep obstaja?

   c) Zapišite iteracijsko funkcijo Jacobijeve in Gauss-Seidelove metode. Opišite razliko med obema. Kdaj metodi konvergirata?

2. Za poljubno pozitivno število a lahko računamo kvadratni koren $\sqrt{a}$ z iteracijskim predpisom

$$x_{r+1} = \frac{1}{2}\left(x_r + \frac{a}{x_r}\right).$$

   a) Poiščite obe negibni točki iteracije in določite ali sta privlačni ali odbojni. Določite red konvergence v bližini $\sqrt{a}$.

   b) Zapišite, kako bi to metodo predstavili v Octavu.

3. Naj bo dana tridiagonalna simetrična matrika

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & n-1 & 1 \\ & & & & 1 & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

   Izračunajte $\|A_n\|_1$, $\|A_n\|_\infty$, $\|A_n\|_\mathrm{F}$ in $N_\infty(A_n)$. Zapišite tudi najboljšo oceno norme $\|A_n\|_2$ za primer $n = 4$.

4. Izračunajte LU razcep matrike

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   z delnim pivotiranjem. S pomočjo tega razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je $b = [0\ 6\ 12]^\mathrm{T}$.

KOLOKVIJ

13. december 2012

1. [10] Odgovorite na naslednja vprašanja:

   a) Ali je matrika
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$
   simetrična pozitivno definitna matrika? Odgovor utemeljite. Kateri je najcenejši način, da to preverite?

   b) Katere metode za računanje QR razcepa poznate? Katero metodo bi uporabili za QR razcep matrike
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}?$$

   c) Naj bo $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ identična matrika. Izračunajte $\|I_n\|_1$, $\|I_n\|_\infty$, $\|I_n\|_2$ in $\|I_n\|_F$.

   d) Zapišite iteracijsko funkcijo Jacobijeve in Gauss-Seidelove metode za sistem $Ax = b$, kje je
   $$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
   V čem se metodi razlikujeta?

2. [10] Zapišite število -20.4 v IEEE aritmetiki s premično piko v dvojni natančnosti. Določite predznak s, mantiso m in eksponent e.

3. [10] Tabelarično podano funkcijo

x	0.1	0.2	0.5	1
y	100	25	5	2

   aproksimirajte s funkcijo $f(x) = \frac{a}{x^2} + b$ po metodi najmanjših kvadratov.

4. [10] Želimo poiskati ničle funkcije $f(x) = x^n - a$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

   a) Katere metode poznate? Eno natančno opišite.

   b) Izberemo tangentno metodo. Določite iteracijsko funkcijo in negibno točko iteracije. Dokažite, da metoda konvergira za poljuben začetni približek $x_0 = (0, \infty)$. Kakšen je red konvergence?

KOLOKVIJ

25. november 2013

1. [2] S pomočjo bisekcije iščemo ničle funkcije $f(x) = x(x-1)^3(x-2)$.
H kateri ničli bo metoda skonvergirala, če izberemo začetni interval $[-1, 4]$?
Kaj pa v primeru, ko izberemo začetni interval $[0.5, 3]$?

2.[4] Katero število (v desetiškem zapisu) je v IEEE aritmetiki s premično piko v dvojni natančnosti predstavljeno kot

$$1 \quad 10000000001 \quad 101\underbrace{0\ldots0}_{49} \quad ?$$

3. [4] S tangentno metodo rešujemo enačbo $x^5 = 3$. Zapišite ustrezno iteracijsko funkcijo. Kaj lahko poveste o redu konvergence?

4. [7] Dana je iteracijska funkcija $g(x) = -ax^2 + 2x$, kjer je $a > 0$. Določite negibne točke iteracije. Poiščite največji možen interval na katerem bo iteracijska funkcija konvergirala k neničelni negibni točki. Za katere začetne približke nam konvergenco zagotavlja konvergenčni izrek?

5. [8] Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Izračunajte $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ in ocenite $\|A\|_2$.

b) Izračunajte razcep oblike $A = P^\top LU$, kjer je P permutacijska matrika, L spodnje trikotna z enicami na diagonali, U pa zgornje trikotna matrika in s pomočjo dobljenega razcepa izračunajte determinanto matrike A.

6. [5] Naj bo A simetrična pozitivno definitna matrika dimenzije $n \times n$. Za poljuben $x \in \mathbb{R}^n$ definiramo normo $\|x\| = \sqrt{x^\top Ax}$. Pokažite, da je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$.

KOLOKVIJ

9. december 2014

1. [2] Kje so težave s stabilnostjo, če želimo numerično izračunati $x\sqrt{1+x}-x\sqrt{x}$? Zapišite izraz v stabilnejši obliki za računanje.

2. [8] V enačbi
$$c = \ln x + x^2 \tag{1.1}$$
naj bo c določen tako, da je rešitev enačbe (2.4) enaka $\alpha = \frac{1}{3}$. Odločimo se, da bomo poskusili enačbo rešiti iterativno s funkcijama
$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sqrt{c - \ln x}, \\ g_2(x) &= \frac{2}{11}\left(x + \frac{9}{2}e^{c-x^2}\right). \end{aligned}$$
Pokažite, da je fiksna točka vsake iteracijske funkcije rešitev enačbe (2.4). Za vsako iteracijsko funkcijo preverite ali imamo konvergenco v bližini α in določite red konvergence.

3. [10] Dana je matrika
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$
   a) Izračunajte $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ in $\|A\|_F$.
   b) S pomočjo razcepa Choleskega rešite sistem $Ax = b$, kjer je $b = (1, 0, 1, 0)^\top$.

4. [3] Poiščite Givensovo rotacijo, ki zavrti vektor $x = (\frac{1}{3}, -1)^\top$ v vektor $y = (\beta, 0)^\top$, $\beta \in \mathbb{R}$. Določite β!

5. [7] Naj bo $\|\cdot\|$ poljubna vektorska norma na $\mathbb{C}^n$. Za poljubno matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiramo
$$\alpha(A) = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$
Pokažite, če je $\alpha(A) > 0$, potem velja:
   a) A je obrnljiva,
   b) $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha(A)}$.

KOLOKVIJ

9. december 2015

1. [4] (a) Poiščite iteracijsko funkcijo za enačbo $x + 1 = \tan x$, za katero je vsaka fiksna točka tudi privlačna točka.

   (b) Iščemo rešitve enačbe $f(x) = 0$ za $f(x) = 2 - x + \ln x$. Z uporabo tangentne metode in začetnega približka $x_0 = 3$ poiščite naslednja dva približka.

2. [6] Privzemimo, da ima enačba $x^2 + ax + b = 0$ dve različni realni ničli α in β. Dokažite, da je iterativna metoda

   (a) $x_{k+1} = -(ax_k + b)/x_k$ konvergentna v bližini $x = \alpha$, če velja $|\alpha| > |\beta|$.

   (b) $x_{k+1} = -(x_k^2 + b)/a$ konvergentna v bližini $x = \alpha$, če velja $2|\alpha| < |\alpha + \beta|$.

3. [5] Rešite naslednji nelinearen sistem

$$x^2 + y = 2,$$

$$y^2 - x^2 = 0.$$

   Naredite dva koraka Newtonove metode z začetnim približkom $(x_0, y_0)^T = (-1, -1)^T$.

4. [7] (a) Sistem enačb $Ax = b$ rešujemo iterativno z iteracijo $x^{(r+1)} = R\,x^{(r)} + b$.
   Naj bo $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2k & 1 \end{pmatrix}$, $k \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $k \in \mathbb{R}$. Poiščite potreben in zadosten pogoj na k, da Jacobijeva metoda konvergira.

   (b) Dana je matrika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Utemeljite, ali Gauss-Seidlova metoda konvergira k rešitvi sistema $Ax = b$.

5. [8] Naj bo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dokažite, da velja $\|A\|_2 \leq 6$.

   (b) Uporabite Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo za izračun QR-razcepa matrike A.

KOLOKVIJ

25. april 2017

1. [5] Katero število (v desetiškem zapisu) je v IEEE aritmetiki s premično piko v dvojni natančnosti predstavljeno kot

1	01111111101	$11\underbrace{0\ldots0}_{50}$	?

2. [2] Če za iskanje ničel funkcije $f(x) = x^5 - x^3 + 1$ uporabimo tangentno (Newtonovo) metodo in je približek $x_n = -1$, kakšna je vrednost približka na naslednjem koraku, x_{n+1}?

3. [8] Naj bo dana iteracijska formula

$$x_{r+1} = (1 + 3x_r)^{\frac{1}{3}}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

   a) Pokažite, da obstaja negibna točka iteracije na intervalu $[1, 2]$.
   b) Pokažite, da iteracija konvergira za poljuben začetni približek $x_0 \in [1, 2]$.
   c) Določite red konvergence v bližini negibne točke.

4. [8] Izračunajte LU razcep matrike

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

z delnim pivotiranjem. S pomočjo tega razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je $b = (10,\ 0,\ 20)^{\mathrm{T}}$.

5. [7] Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Pokažite, da velja

$$\|A^H\|_2 = \|A\|_2 \quad \text{in} \quad \|A^H A\|_2 = \|A\|_2^2.$$

KOLOKVIJ

9. april 2018

1. [4] Kako bi numerično stabilno izračunali vrednost funkcije

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2}$$

za majhne x? Utemeljite, zakaj pride do težav. S kalkulatorjem stabilno izračunajte vrednosti $f(x)$ za $x = 10^{-5}, 10^{-8}$ ter določite limito $\lim_{x \to 0} f(x)$.

2. [7] (a) S pomočjo tangentne metode določite vrednost $\sqrt[3]{2}$ na tri decimalna mesta natančno.

   (b) Enačbo $x = b\,x(1 - x)$ rešujemo za različne vrednosti parametra b. V kakšnih mejah se mora gibati parameter b, da iteracija

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n),$$

   s primerno izbiro začetnega približka, konvergira k pozitivni rešitvi enačbe?

3. [5] Rešite naslednji nelinearen sistem

$$x^2 + 2y^2 = 2,$$

$$y^2 - 2x = -1.$$

Naredite en korak Newtonove metode z začetnim približkom $(x_0, y_0) = (1, 1)^T$. Skicirajte obe krivulji. Koliko je vseh realnih rešitev?

4. [8] (a) Pokažite, da lahko sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode in zapišite tretjo iteracijo. Za začetni približek vzemite vektor $\mathbf{0}$.

   (b) Pokažite, da za sisteme dimenzije 2×2 Jacobijeva iteracija konvergira natanko takrat, ko konvergira Gauss-Seidelova iteracija.

5. [6] (a) Naj $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -9 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Izračunajte $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ in ocenite $\|A\|_2$.

   (b) Dokažite, da za unitarno matriko U velja $\|UB\|_2 = \|B\|_2$.

KOLOKVIJ

8. april 2019

1. [6] (a) Zapišite število -2018.75 v IEEE aritmetiki s premično piko v **dvojni** natančnosti.

   (b) Katero število (v desetiškem zapisu) je v IEEE aritmetiki s premično piko v **enojni** natančnosti predstavljeno kot

1	11111111	$\underbrace{0\ldots0}_{23}$

?

2. [6] Na bosta x in y predstavljivi števili. V aritmetiki s plavajočo vejico z osnovno zaokrožitveno napako u računamo vrednost izraza z na dva načina:

   (a) $z = x^2 - 2xy + y^2$,

   (b) $z = (x-y)^2$

   Analizirajte oba algoritma. Izpeljite oceno za relativno napako $\left|\frac{fl(z)-z}{z}\right|$. Ali je kateri od algoritmov direktno/obratno stabilen?

3. [7] Iščemo ničle funkcije $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

   (a) Pokažite, da obstaja natanko ena pozitivna in dve negativni ničli funkcije f.

   (b) Pokažite, da so negibne točke iteracije

$$x_{r+1} = (1 + 3x_r)^{\frac{1}{3}}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

   zares ničle funkcije f. Pokažite tudi, da dano zaporedje iteracij konvergira proti pozitivni ničli funkcije f za vsak $x > 0$ in določite red konvergence v bližini iskane ničle.

   (c) Zapišite tangentno metodo za iskanje ničel funkcije f in izračunajte naslednji približek x_1 tangentne metode, če je začetni približek $x_0 = 2$.

4. [6] Naj bo $||\cdot||$ poljubna operatorska norma. Dokažite: če je $||A|| < 1$, potem je $I + A$ nesingularna matrika in velja

$$||(I+A)^{-1}|| \leq \frac{||I||}{||I|| - ||A||}.$$

POGLAVJE 2

IZPITI

2.1 Študijsko leto 2008/2009

Študijsko leto 2008/2009

IZPIT

5. februar 2009

[10] **1.** Poišči pravilen odgovor za naslednje trditve:

(a) LU razcep uporabljamo pri

(i) reševanju nelinearnih enačb,
(ii) reševanju linearnih sistemov,
(iii) reševanju linearnih sistemov s simetrično matriko,
(iv) računanju lastnih vrednosti.

(b) LU razcep ima časovno zahtevnost

(i) $\mathcal{O}(n^2)$,
(ii) $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$,
(iii) $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$,
(iv) $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

(c) Kako preko LU razcepa rešimo sistem $Ax = b$?

(i) naredimo razcep $A = LU$, rešimo sistema $Ly = b$ ter nato $Ux = y$,
(ii) naredimo razcep $A = LU$, rešimo sistema $Uy = b$ ter nato $Lx = y$,
(iii) naredimo razcep $A = LU$, izračunamo $y = Lb$ ter nato $x = Uy$.
(iv) naredimo razcep $A = LU$, izračunamo $y = Ub$ ter nato $x = Ly$.

(d) LU razcep z delnim pivotiranjem uporabimo na matriki A

(i) samo v primeru, če so vsi pivoti enaki 0,
(ii) samo v primeru, če so vsi pivoti različni od 0,
(iii) če je kateri izmed pivotov enak 0,
(iv) če je kateri izmed pivotov različen od 0.

(e) Za matriki L in U iz LU razcepa velja:

(i) obe sta zgornje trikotni,
(ii) obe sta spodnje trikotni,
(iii) L je zgornje trikotna, U pa spodnje trikotna,
(iv) L je spodnje trikotna, U pa zgornje trikotna.

[10] **2.** Za matrike dimenzije vsaj 5 ne obstaja eksaktna formula za izračun lastnih vrednosti in lastnih vektorjev, zato jih moramo računati numerično.

(a) Zapiši definicijo lastne vrednosti in lastnega vektorja.

(b) Ena izmed metod za računanje lastnih parov matrike je potenčna metoda. Ta metoda nam da približek za lastni vektor, ki pripada največ- ji lastni vrednosti po absolutni vrednosti. Kako nato s pomočjo pri- bližka za lastni vektor dobimo najboljši približek za lastno vrednost?

(c) Če želimo izračunati približek za lastni vektor, katerega pripadajoča lastna vrednost ni največja po absolutni vrednosti, katero metodo lahko uporabimo?

(d) Gerschgorinov izrek nam določa območje v kompleksni ravnini, kjer ležijo vse lastne vrednosti matrike. Zapiši ta izrek.

[10] **3.** V teoriji aproksimacije je pomembno področje polinomska interpolacija.

(a) Koliko vnaprej predpisanih točk lahko v splošnem zadanemo z interpolacijskim polinomom stopnje n?

(b) Zapiši formulo za interpolacijski polinom stopnje n.

(c) Kaj je deljena diferenca? Zapiši rekurzivno zvezo za izračun deljenih diferenc.

(d) Z besedami opiši, kakšna je povezava med interpolacijskim polinomom in Newton- Cotesovimi integracijskimi pravili.

[10] **4.** Za matriko

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad n \geq 3,$$

izračunaj $\|A_n^T A_n\|_\infty$ in $\|A_n^T A_n\|_1$.

[15] **5.** V iteracijski formuli

$$x_{r+1} = g(x_r) = \alpha x_r + \frac{\beta}{x_r}, \quad r = 0, 1 \ldots$$

določi koeficienta α in β tako, da bo za $a > 0$ zaporedje $\{x_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konvergiralo k limiti $\sqrt{a}$ vsaj s kvadratično konvergenco.

[15] **6.** Za matriko A in vektor b,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

poišči rešitev predoločenega sistema $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^3$, po metodi najmanjših kvadratov. Uporabi normalni sistem in ga reši z LU razcepom brez pivotiranja.

[15] **7.** Za funkcijo $f(x) = x^6$ poišči interpolacijski polinom p, za katerega velja

$$p(-1) = f(-1),\ p'(-1) = f'(-1),\ p(0) = f(0),$$

$$p'(0) = f'(0),\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1).$$

[15] **8.** Izpelji odprto Newton-Cotesovo integracijsko pravilo

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = Af(x_1) + Bf(x_2) + Cf^{(m)}(\xi).$$

IZPIT

11. junij 2009

[10] **1.** Obkroži pravilne trditve:

(a) Naj bo α rešitev enačbe $x = g(x)$ in naj velja $g^{(k)}(\alpha) = 0$ za $k = 1, 2, \ldots, p$, in $g^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$. Potem pravimo, da je red konvergence iteracije $x_{r+1} = g(x_r)$ v bližini α enak p.

(b) Metoda z visokim redom konvergence povsod konvergira hitreje kot metoda z nižjim redom konvergence.

(c) Tangentna metoda ima za enostavne ničle vsaj kvadratično konvergenco v bližini te ničle.

(d) Matriko A imenujemo simetrična matrika, če velja $A = A^T$.

(e) Za matrično normo mora med drugim veljati $\|A\,B\| \geq \|A\|\|B\|$.

(f) Za vsako matrično normo in poljubno lastno vrednost λ matrike A velja $|\lambda| \leq \|A\|$.

(g) LU razcep s pivotiranjem uporabljamo za simetrične pozitivno definitne matrike.

(h) Matrika A je simetrična pozitivno definitna, če velja $A = A^T$ in $x^T Ax > 0$ za vsak $x \neq 0$.

(i) Za razcep Choleskega potrebujemo $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ operacij.

(j) Rešitev normalnega sistema $A^T Ax = A^T b$ maksimizira $\|Ax - b\|_2$.

[10] **2.** Linearni sistem $Ax = b$ lahko zapišemo v obliki $x = Rx + c$ in ga rešujemo iterativno kot $x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + c$.

(a) Kaj mora veljati za $\rho(R) := \max |\lambda(R)|$ iteracijske matrike R, da zaporedje $x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + c$, $r = 0, 1, \ldots$, konvergira za poljuben začetni približek $x^{(0)}$?

(b) Zapiši Jacobijevo metodo v obliki iteracije.

(c) Zapiši Gauss-Seidelovo metodo v obliki iteracije.

(d) Privzemimo, da je matrika A zgornje trikotna. Katera izmed metod iz točk (b) in (c) v tem primeru konvergira hitreje? Odgovor utemelji.

[10] **3.** V teoriji aproksimacije je pomembno področje polinomska interpolacija.

(a) Zapiši formulo za interpolacijski polinom stopnje n.

(b) Ali je interpolacijski polinom primeren za interpolacijo velikega števila interpolacijskih točk? Odgovor utemelji.

(c) Z besedami opiši, kakšna je povezava med interpolacijskim polinomom in Newton-Cotesovimi integracijskimi pravili.

(d) Kakšna je razlika med odprtim in zaprtim tipom Newton-Cotesovih pravil? Naštej in na kratko opiši dva pravila zaprtega tipa.

[15] **4.** S pomočjo Gerschgorinovega izreka določi območje v $\mathbb{C}$, kateremu pripadajo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Za natančnejšo določitev območja uporabi Gerschgorinov izrek tudi na A^T.

[15] **5.** Dokaži, da je red konvergence iteracije

$$x_{r+1} = g(x_r) := \frac{x_r(1 - \ln x_r)}{1 + 2x_r}, \quad r = 0, 1 \ldots,$$

za reševanje nelinearne enačbe $e^{2x} - \frac{1}{x} = 0$, vsaj dva.

[15] **6.** Izračunaj LU razcep brez pivotiranja za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -5 & -10 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

[15] **7.** Za funkcijo $f(x) = \sin x$ poišči interpolacijski polinom p, za katerega velja

$$p\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f\left(k\frac{\pi}{2}\right), \quad p'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(k\frac{\pi}{2}\right),$$

za $k = -1, 0, 1$.

[10] **8.** Iščemo rešitev nelinearnega sistema

$$x^2 + y = 2, \quad y^2 - x^2 = 0.$$

Naredi dva koraka Newtonove metode z začetnim približkom $(x_0, y_0) = (-1, -1)^T$.

IZPIT

26. junij 2009

[10] **1.** Za iskanje ničel realne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poznamo več metod.

(a) Naštej vsaj tri izmed njih in eno opiši.

Poišči pravilen odgovor za naslednje trditve:

(b) O tem, ali navadna iteracija v bližini rešitve konvergira ali ne, odloča

(i) prvi odvod iteracijske funkcije,
(ii) drugi odvod iteracijske funkcije,
(iii) tretji odvod iteracijske funkcije.

(c) Metoda s kvadratično konvergenco v bližini rešitve v primerjavi z metodo s kubično konvergenco

(i) počasneje kovergira,
(ii) hitreje konvergira,
(iii) hitrost konvergence je za obe metodi enaka.

(d) Pri sekantni metodi moramo na začetku poznati

(i) en začetni približek,
(ii) dva začetna približka,
(iii) enako število začetnih približkov kot pri tangentni metodi.

(e) Tangentna metoda ima v bližini rešitve α kubično konvergenco, če velja

(i) $f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0,$
(ii) $f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0,\ f''(\alpha) = 0,$
(iii) $f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) \neq 0,\ f''(\alpha) = 0.$

[10] **2.** Za reševanje linearnih sistemov $Ax = b$, z obrnljivo matriko A, uporabljamo LU razcep ($A = L \cdot U$).

(a) Kaj velja za matriki L in U?

(b) V kakšnem primeru LU razcep odpove? Kakšno modifikacijo LU razcepa uporabimo v tem primeru? Kaj naredimo na vsakem koraku?

(c) Kakšna je časovna zahtevnost LU razcepa?

(d) Za posebne matrike lahko podoben razcep naredimo v pol krajšem času. Za kakšne matrike to velja? Kako imenujemo ta razcep?

[10] **3.** Za matrike dimenzije vsaj 5 ne obstaja eksaktna formula za izračun lastnih vrednosti in lastnih vektorjev, zato jih moramo računati numerično.

(a) Zapiši definicijo lastne vrednosti in lastnega vektorja.

(b) Ena izmed metod za računanje lastnih parov matrike je potenčna metoda. Ta metoda nam da približek za lastni vektor, ki pripada največ- ji lastni vrednosti po absolutni vrednosti. Kako nato s pomočjo pri- bližka za lastni vektor dobimo najboljši približek za lastno vrednost?

(c) Če želimo izračunati približek za lastni vektor, katerega pripadajoča lastna vrednost ni največja po absolutni vrednosti, katero metodo lahko uporabimo?

(d) Gerschgorinov izrek nam določa območje v kompleksni ravnini, kjer ležijo vse lastne vrednosti matrike. Zapiši ta izrek.

[10] **4.** Naj bo

$$A_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Izračunaj $\|A_n\|_\infty$, $\|A_n\|_1$ in $\|A_n\|_F$.

[15] **5.** Z Jacobijevo iteracijo rešujemo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Za začetni približek vzemi $x_1 = 1, x_2 = 1$ in $x_3 = -1$ ter poišči naslednji približek.

[15] **6.** Naj bosta

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 2 & 10 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

Določi zgornje trikotno matriko U, da bo veljalo $A = L \cdot U$. Zapiši vse korake računanja.

[15] **7.** Po metodi najmanjših kvadratov poišči rešitev predoločenega sistema $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[15] **8.** Iščemo rešitev nelinearnega sistema

$$xy = 2, \quad xz = 3, \quad yz = 6.$$

Naredi en korak Newtonove metode z začetnim približkom $x = y = z = 1$.

IZPIT

31. avgust 2009

[10] **1.** Obkroži pravilne trditve:

(a) Tangentna metoda v okolici dvojne ničle konvergira kvadratično.

(b) Pri metodi s kvadratično konvergenco se v bližini rešitve število točnih decimalk na vsakem koraku podvoji.

(c) Za matriko A rečemo, da je pozitivno definitna, če za vsak vektor $x \neq 0$ velja $x^T A\, x > 0$.

(d) Operatorska norma matrike A je definirana kot $\|A\| = \max\limits_{\substack{\|x\|=0 \\ x\in\mathbb{C}^n}} \|Ax\|$.

(e) Sistem $Ax = b$ je najbolje reševati kot $x = A^{-1}b$.

(f) Linearen sistem $Ax = b$ rešujemo iterativno, če je matrika A velika in ima malo neničelnih elementov.

(g) Če rešujemo sistem $A^T A\, x = A^T b$, pravimo, da rešujemo normalni sistem (prirejen sistemu $Ax = b$).

(h) Reyleighov kvocient je formula, s katero dobimo dober približek za lastni vektor.

(i) Polinom, ki se z dano funkcijo ujema v izbranih točkah, imenujemo interpolacijski polinom.

(j) Interpolacija z zlepki je v praksi povsem neuporabna.

[10] **2.** V teoriji aproksimacije je pomembno področje polinomska interpolacija.

(a) Zapiši formulo za interpolacijski polinom stopnje n.

(b) Ali je interpolacijski polinom primeren za interpolacijo velikega števila interpolacijskih točk? Odgovor utemelji.

(c) Z besedami opiši, kakšna je povezava med interpolacijskim polinomom in Newton-Cotesovimi integracijskimi pravili.

(d) Kakšna je razlika med odprtim in zaprtim tipom Newton-Cotesovih pravil? Naštej in na kratko opiši dva pravila zaprtega tipa.

[10] **3.** Za iskanje ničel realne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poznamo več metod.

(a) Na kratko opiši metodo bisekcije.

(b) Na kratko opiši metodo navadne iteracije.

(c) Na kratko opiši tangentno metodo.

[15] **4.** S pomočjo Gerschgorinovega izreka določi območje v $\mathbb{C}$, kateremu pripadajo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za natančnejšo določitev območja uporabi Gerschgorinov izrek tudi na A^T.

[15] **5.** V iteracijski formuli

$$x_{r+1} = g(x_r) := \alpha x_r + \beta x_r^2, \quad r = 0, 1 \ldots,$$

določi koeficienta α in β, tako da bo zaporedje $(x_r)_{r\in\mathbb{N}_0}$ konvergiralo k izbranemu realnemu številu $a > 0$ s kvadratično konvergenco.

[20] **6.** Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Poišči matriki L in U iz LU razcepa brez pivotiranja za matriko A. Izračunaj še $\|L\|_1 \cdot \|U\|_\infty$.

[20] **7.** Za funkcijo $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ poišči interpolacijski polinom p, za katerega velja

$$p\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f\left(k\frac{\pi}{2}\right), \quad p'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(k\frac{\pi}{2}\right), \quad p''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

za $k = 0, 1$.

Študijsko leto 2009/2010

IZPIT

8. junij 2010

[10] **1.** Obkroži pravilne trditve:

(a) Pri Newtonovi metodi nelinearen sistem enačb rešujemo tako, da rešimo več linearnih sistemov.

(b) Spektralno normo simetrične $n \times n$ matrike lahko izračunamo kot $\|A\|_2 = \min_{i=1,2,\ldots,n} |\lambda_i(A)|$.

(c) Za občutljivost $\kappa_2(A)$ matrike A velja formula $\kappa_2(A) = \|A\| \cdot \|A\|^{-1}$.

(d) Permutacijske matrike P imajo občutjivost $\kappa_2(P)$ enako 1.

(e) LU razcep brez pivotiranja ima časovno zahtevnost $\mathcal{O}(n^3)$.

(f) Za spodnje trikotne matrike Gauss-Seidelova in Jacobijeva metoda za iterativno reševanje linearnih sistemov konvergirata enako hitro.

(g) Reševanje predoločenih sistemov preko normalnega sistema je numerično zelo stabilno.

(h) Zapis interpolacijskega polinoma preko Lagrangeevih polinomov je primeren le, če so vse interpolacijske točke med seboj različne.

(i) Polinomi visokih stopenj se običajno v praksi obnašajo bolje kot zlepki.

(j) Pri formulah za numerično odvajanje moramo paziti, da interpolacijskih točk ne vzamemo preblizu skupaj.

[15] **2.** Odgovori na naslednja vprašanja:

(a) Zakaj pri formulah za numerično odvajanje interpolacijskih točk ne smemo vzeti preblizu skupaj?

(b) Ali podobno velja tudi pri formulah za numerično integriranje? Odgovor utemelji.

(c) Kakšno povezavo imajo Newton-Cotesova integracijska pravila in polinomska interpolacija?

(d) Zapiši sestavljeno $\frac{3}{8}$-pravilo.

(e) Opiši Rombergovo metodo. Kaj je bistvena ideja te metode?

[15] **3.** Poišči spodnje trikotno matriko V iz razcepa Choleskega za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Preko tega razcepa izračunaj še determinanto matrike A.

[15] **4.** Izračunaj QR razcep matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[15] **5.** Poišči interpolacijski polinom, ki se s funkcijo $f(x) = e^{-2x}$ ujema trojno v točki $x = 0$ in dvojno v točki $x = 1$.

[15] **6.** Določi konstante A, B, C, D, E in m v integracijskem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\left(Af(x_0) + Bf(x_1)\right) + h^2\left(Cf'(x_0) + Df'(x_1)\right) + Ef^{(m)}(\xi).$$

[15] **7.** Čim bolje določi območje v $\mathbb{C}$, kjer ležijo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

IZPIT

22. junij 2010

[10] **1.** Obkroži pravilne trditve:

(a) Matrika je nesingularna, če je njena determinanta različna od 0.

(b) Frobeniusova norma ni operatorska norma.

(c) Razcep $A = U \cdot L$, kjer je U zgornje trikotna matrika in L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali, imenujemo LU razcep.

(d) Pri reševanju predoločenih sistemov $Ax = b$ želimo minimizirati $\|Ax - b\|$.

(e) Reševanje predoločenih sistemov preko normalnega sistema je stabilnejše od reševanja preko QR razcepa.

(f) Singularne vrednosti matrike so nenegativna realna števila.

(g) Deljena diferenca je polinom stopnje 3.

(h) Zlepek je neskončnokrat zvezno odvedljiva funkcija.

(i) Simpsonovo pravilo je točno za polinome stopnje ≤ 3.

(j) Poljubna Bézierova krivulja interpolira vse svoje kontrolne točke.

[15] **2.** Odgovori na naslednja vprašanja:

(a) Zapiši primer iteracijske funkcije za iskanje ničel funkcije $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

(b) V čem se razlikujeta Jacobijeva in Gauss-Seidelova metoda za iterativno reševanje linearnih sistemov?

(c) Zakaj predoločenih sistemov ne rešujemo preko LU razcepa?

(d) Kaj je Reyleighov kvocient?

(e) Zakaj za računanje določenega integrala uporabljamo sestavljene formule?

[15] **3.** Reši sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

[15] **4.** Dana je matrika

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & n-1 & & & \\ n-1 & -4 & n-2 & & \\ & n-2 & -6 & n-3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & -2(n-1) & 1 \\ & & & 1 & -2n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Izračunaj $\|A_n\|_1$ in $\|A_n\|_\infty$. Določi še $N_\infty(A_n)$.

[15] **5.** Poišči negibne točke iteracijske funkcije

$$x_{r+1} = \frac{1}{2}\left(x_r + \frac{4}{x_r}\right).$$

Ugotovi red konvergence v bližini teh točk.

[15] **6.** Določi konstante A, B, C, D, E in m v integracijskem pravilu

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx = Af(h) + Bf(2h) + Cf'(0) + Df'(3h) + Ef^{(m)}(\xi).$$

[15] **7.** Podani sta začetna in končna kontrolna točka kubične Bézierove krivulje $\mathbf{p}$: $\mathbf{b_0}= (1,0)^T$ in $\mathbf{b}_3 = (0,1)^T$. Določi še preostali kontrolni točki oblike $\mathbf{b}_1 = (1,a)$ in $\mathbf{b}_2 = (a,1)$, tako da bo krivulja pri parametru $t = \frac{1}{2}$ šla skozi točko $\mathbf{p}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Približno skiciraj krivuljo.

IZPIT

25. avgust 2010

[10] **1.** Obkroži pravilne trditve:

(a) Tangentna metoda v okolici dvojne ničle konvergira kvadratično.

(b) Pri Newtonovi metodi nelinearen sistem enačb rešujemo tako, da rešimo več linearnih sistemov.

(c) Permutacijske matrike P imajo občutjivost $\kappa_2(P) := \|P\|_2 \cdot \|P^{-1}\|_2$ enako 1.

(d) Za matriko A rečemo, da je pozitivno definitna, če za vsak vektor $x \neq 0$ velja $x^T A\, x > 0$.

(e) Sistem $Ax = b$ je najbolje reševati kot $x = A^{-1}b$.

(f) Če rešujemo sistem $A^T A\, x = A^T b$, pravimo, da rešujemo normalni sistem (prirejen sistemu $Ax = b$).

(g) Reševanje predoločenih sistemov preko normalnega sistema je numerično zelo stabilno.

(h) Reyleighov kvocient je formula, s katero dobimo dober približek za lastni vektor.

(i) Simpsonovo pravilo je točno za polinome stopnje ≤ 3.

(j) Poljubna Bézierova krivulja interpolira vse svoje kontrolne točke.

[15] **2.** Odgovori na naslednja vprašanja:

(a) Kaj odloča o tem, ali navadna iteracija v bližini rešitve konvergira ali ne?

(b) Zapiši primer iteracijske funkcije za iskanje ničel funkcije $f(x) = e^x + \ln x$.

(c) Z vidika hitrosti konvergence primerjaj metodo s kvadratično konvergenco v bližini rešitve z metodo z linearno konvergenco?

(d) Koliko začetnih približkov moramo na začetku poznati pri tangentni metodi?

(e) Kaj mora veljati, da ima tangentna metoda v bližini rešitve α kubično konvergenco?

[15] **3.** Reši sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj še $\|L\|_1 \cdot \|U\|_\infty$.

[15] **4.** Za naslednji sistem nelinearnih enačb naredi en korak Newtonove metode z začetnim približkom $(x_0, y_0)^T = (1,1)^T$:

$$x^2 + y^2 = 2, \quad x^2 - 2xy + y = 2.$$

[15] **5.** Poišči negibne točke iteracije

$$x_{r+1} = Ax_r - x_r^3.$$

Za katere vrednosti parametra A so negibne točke privlačne točke? Za katero vrednost parametra A je asimptotočni red konvergence zaporedja $\{x_r\}$ proti negibni točki α vsaj kvadratičen?

[15] **6.** Določi konstante A, B, C, D in E v integracijskem pravilu

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = Af(-h) + Bf(0) + Cf(h) + Df'(-h) + Ef'(h) + Ff^{(m)}(\xi).$$

[15] **7.** Podani sta začetna in končna kontrolna točka kubične Bézierove krivulje $\mathbf{p}$: $\mathbf{b_0}= (1,0)^T$ in $\mathbf{b}_3 = (0,1)^T$. Določi še preostali kontrolni točki oblike $\mathbf{b}_1 = (1,a)$ in $\mathbf{b}_2 = (a,1)$, tako da bo krivulja pri parametru $t = \frac{1}{2}$ šla skozi točko $\mathbf{p}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Približno skiciraj krivuljo.

IZPIT

8. september 2010

[10] **1.** Obkroži pravilne trditve:

(a) Tangentna metoda v okolici dvojne ničle konvergira kvadratično.

(b) Pri Newtonovi metodi nelinearen sistem enačb rešujemo tako, da rešimo več linearnih sistemov.

(c) Permutacijske matrike P imajo občutjivost $\kappa_2(P) := \|P\|_2 \cdot \|P^{-1}\|_2$ enako 1.

(d) Za matriko A rečemo, da je pozitivno definitna, če za vsak vektor $x \neq 0$ velja $x^T A\, x > 0$.

(e) Sistem $Ax = b$ je najbolje reševati kot $x = A^{-1}b$.

(f) Če rešujemo sistem $A^T A\, x = A^T b$, pravimo, da rešujemo normalni sistem (prirejen sistemu $Ax = b$).

(g) Reševanje predoločenih sistemov preko normalnega sistema je numerično zelo stabilno.

(h) Reyleighov kvocient je formula, s katero dobimo dober približek za lastni vektor.

(i) Simpsonovo pravilo je točno za polinome stopnje ≤ 3.

(j) Poljubna Bézierova krivulja interpolira vse svoje kontrolne točke.

[15] **2.** Odgovori na naslednja vprašanja:

(a) Kaj odloča o tem, ali navadna iteracija v bližini rešitve konvergira ali ne?

(b) Zapiši primer iteracijske funkcije za iskanje ničel funkcije $f(x) = e^x + \ln x$.

(c) Z vidika hitrosti konvergence primerjaj metodo s kvadratično konvergenco v bližini rešitve z metodo z linearno konvergenco?

(d) Koliko začetnih približkov moramo na začetku poznati pri tangentni metodi?

(e) Kaj mora veljati, da ima tangentna metoda v bližini rešitve α kubično konvergenco?

[15] **3.** Reši sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj še $\|L\|_1 \cdot \|U\|_\infty$.

[15] **4.** Za naslednji sistem nelinearnih enačb naredi en korak Newtonove metode z začetnim približkom $(x_0, y_0)^T = (1,1)^T$:

$$x^2 + y^2 = 2, \quad x^2 - 2xy + y = 2.$$

[15] **5.** Poišči negibne točke iteracije

$$x_{r+1} = Ax_r - x_r^3.$$

Za katere vrednosti parametra A so negibne točke privlačne točke? Za katero vrednost parametra A je asimptotočni red konvergence zaporedja $\{x_r\}$ proti negibni točki α vsaj kvadratičen?

[15] **6.** Določi konstante A, B, C, D in E v integracijskem pravilu

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = Af(-h) + Bf(0) + Cf(h) + Df'(-h) + Ef'(h) + Ff^{(m)}(\xi).$$

[15] **7.** Podani sta začetna in končna kontrolna točka kubične Bézierove krivulje $\mathbf{p}$: $\mathbf{b_0}$$= (1,0)^T$ in $\mathbf{b}_3 = (0,1)^T$. Določi še preostali kontrolni točki oblike $\mathbf{b}_1 = (1,a)$ in $\mathbf{b}_2 = (a,1)$, tako da bo krivulja pri parametru $t = \frac{1}{2}$ šla skozi točko $\mathbf{p}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Približno skiciraj krivuljo.

2.3 Študijsko leto 2010/2011

Študijsko leto 2010/2011

IZPIT

3. december 2010

[20] **1.** Obkroži pravilne trditve (obkroži največ 5 odgovorov):

(a) Gauss-Seidelova metoda za iterativno reševanje sistemov linearnih enačb konvergira hitreje kot Jacobijeva metoda.

(b) Zaporedje približkov pri iterativnem reševanju sistemov linearnih enačb ne konvergira, če je neskončno norma iteracijske matrike večja od 1.

(c) Pri metodi najmanjših kvadratov za reševanje sistema $Ax = b$ iščemo vektor x, tako da je $(Ax - b)^T(Ax - b)$ minimalno.

(d) Klasični in modificirani Gram-Schmidtov postopek se eksaktno v ničemer ne razlikujeta.

(e) Za vsako Givensovo rotacijo R velja $R^T R = I$.

(f) Predoločene sisteme lahko rešujemo tudi preko singularnega razcepa.

(g) Reyleighov kvocient je najboljši približek za lastni vektor, ki pripada dominantni lastni vrednosti.

(h) Z večanjem števila interpolacijskih točk, interpolacijski polinom konvergira k funkciji, ki jo interpolira.

(i) Lagrangeevi bazni polinomi tvorijo particijo enote (se povsod seštejejo v ena).

(j) Z Rombergovo metodo lahko zelo izboljšamo približek za točno vrednost integrala, a ker je ta postopek zelo potraten, ga v praksi ne uporabljamo.

[15] **2.** Poišči matrike L, U in P iz LU razcepa z delnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

Če veš, da je občutljivost $\kappa_\infty(A) = 435$, izračunaj $\|A^{-1}\|_\infty$.

[15] **3.** S pomočjo Givensovih rotacij izračunaj QR razcep matrike

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 12 \\ 6 & 3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

[15] **4.** Naj bo $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z nenegativnimi elementi, za katero velja

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

S pomočjo Gerschgorinovega izreka dokaži, da vse lastne vrednosti matrike M ležijo znotraj enotskega kroga $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$.

Če naloge ne znaš dokazati v splošnem, jo dokaži za matriko

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Pokaži še, da enak razultat velja tudi za matrike M z nenegativnimi elementi, za katere velja $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1$ za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

[20] **5.** Funkcijo

$$f(x) = \frac{5 - x}{5 + x}$$

interpoliramo v različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(a) Izpelji splošno formulo za deljeno diferenco $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

(b) Kakšna je napaka interpolacije v točki x?

Namig: Upoštevaj formulo $f(x) - I_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

[15] **6.** Določi konstante A, B, C, D in m v pravilu za numerično odvajanje

$$f''(x_1) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df^{(m)}(\xi).$$

IZPIT

28. januar 2011

[20] **1.** Obkroži pravilne trditve (obkroži največ 5 odgovorov):

(a) Dolžina mantise pri dvojni natančnosti je 64 bitov.

(b) Neodstranljiva napaka je napaka, ki nastane zaradi napake začetnih približkov.

(c) Pri bisekciji vedno uspešno poiščemo neko ničlo funkcije, če le začnemo z intervalom, v katerega krajiščih je funkcija različno predznačena.

(d) Pri tangentni metodi so vse fiksne točke odbojne točke.

(e) Za vsako simetrično matriko obstaja lastna vrednost, ki je po absolutni vrednosti večja od ∞-norme matrike.

(f) Za reševanje sistema linearnih enačb s spodnje trikotno matriko potrebujemo le $\mathcal{O}(n)$ operacij.

(g) Matrika, ki nastopa v normalnem sistemu je simetrična.

(h) Z inverzno iteracijo lahko poiščemo najmanjšo lastno vrednost po absolutni vrednosti.

(i) Gerschgorinov izrek nam natančno pove, kakšni sta najmanjša in največja lastna vrednost matrike.

(j) Konveksna ovojnica kontrolnih točk Bézierove krivulje vsebuje vse kontrolne točke te krivulje.

[15] **2.** Izračunaj $\|A_n\|_1, \|A_n\|_\infty, N_\infty(A_n)$ in $\|A_n\|_F$ za matriko

$$A_n = \begin{pmatrix} -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & -n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

[15] **3.** S pomočjo Gram-Schmidtove ortogonalizacije poišči QR razcep matrike A in nato reši predoločen sistem $Ax = b$, pri čemer sta

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 12 \\ 6 & 3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

[20] **4.** Poišči negibne točke iteracijske funkcije

$$x_{r+1} = g(x_r) = \frac{x(x^2+12)}{3x^2+4}.$$

Za vsako od fiksnih točk ugotovi, ali je odbojna ali privlačna točka za funkcijo g. Kakšen je red konvergence v okolici privlačnih točk.

[15] **5.** Zapiši enačbo interpolacijskega polinoma stopnje 5, ki se s funkcijo $f(x) = -x^7 + x^6$ ujema trojno v točki 0 in trojno v točki 1.

[15] **6.** Dana je parametrična polinomska krivulja

$$p(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 2t^2 + 1 \\ 2t^2 - t + 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Zapiši jo v Bézierovi obliki.

IZPIT

28. junij 2011

[20] **1.** Obkroži pravilne odgovore:

(a) Napaka metode je napaka, ki nastane zaradi zaokroževanja.

DA NE

(b) Z bisekcijo najdemo vse ničle na izbranem intervalu.

DA NE

(c) O konvergenci oz. divergenci iteracijske metode v bližini rešitve nelinearne enačbe odloča drugi odvod iteracijske funkcije.

DA NE

(d) Konvergenca tangentne metode je zelo odvisna od začetnega približka.

DA NE

(e) Faktor Choleskega ima vse lastne vrednosti pozitivne.

DA NE

(f) Gauss-Seidelova metoda ne konvergira nujno hitreje kot Jacobijeva metoda.

DA NE

(g) Matrika Q v QR razcepu je simetrična matrika.

DA NE

(h) Gerschgorinov izrek nam določa območja v kompleksni ravnini, kjer ležijo lastni vektorji dane matrike.

DA NE

(i) Deljena diferenca je simetrična funkcija svojih argumentov.

DA NE

(j) Če vse kontrolne točke Bézierove krivulje ležijo na neki premici, potem tudi Bézierova krivulja sama leži na tej premici.

DA NE

[15] **2.** Izračunaj LU razcep brez pivotiranja za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 16 & 10 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj še $\|U\|_\infty$, $\|U\|_1$ in $\|L\|_F$.

[15] **3.** Naredi dva koraka Newtonove metode za sistem nelinearnih enačb

$$x^2 + 2y^2 = 2, \quad x^2 - xy + y = 0,$$

pri začetnem približku $(x_0, y_0)^T = (1, 1)^T$.

[20] **4.** Poišči negibne točke iteracijske funkcije

$$x_{r+1} = g(x_r) = x_r(3 - 3\,a\,x_r + a^2 x_r^2), \quad r = 0, 1, \ldots, \qquad a \neq 0.$$

Za vsako od negibnih točk ugotovi, ali je odbojna ali privlačna točka za funkcijo g. Kakšen je red konvergence v okolici privlačnih točk. Za $x_0 = 0.25$ in $a = 3$ izračunaj prva dva približka.

[15] **5.** Določi konstante A, B, C, D in m v integracijskem pravilu

$$\int_0^4 f(x)\,dx = A\,f(0) + B\,f(2) + C\,f(4) + D\,f^{(m)}(\xi).$$

[15] **6.** Poišči pogoje, katerim morajo zadoščati kontrolne točke Bézierove krivulje stopnje 4, da bo le-ta v resnici krivulja stopnje 1.

IZPIT

5. september 2011

[20] **1.** Obkroži pravilne odgovore:

(a) Napaka metode je napaka, ki nastane zaradi zaokroževanja.

DA NE

(b) Z bisekcijo najdemo vse ničle na izbranem intervalu.

DA NE

(c) O konvergenci oz. divergenci iteracijske metode v bližini rešitve nelinearne enačbe odloča drugi odvod iteracijske funkcije.

DA NE

(d) Konvergenca tangentne metode je zelo odvisna od začetnega približka.

DA NE

(e) Faktor Choleskega ima vse lastne vrednosti pozitivne.

DA NE

(f) Gauss-Seidelova metoda ne konvergira nujno hitreje kot Jacobijeva metoda.

DA NE

(g) Matrika Q v QR razcepu je simetrična matrika.

DA NE

(h) Gerschgorinov izrek nam določa območja v kompleksni ravnini, kjer ležijo lastni vektorji dane matrike.

DA NE

(i) Deljena diferenca je simetrična funkcija svojih argumentov.

DA NE

(j) Če vse kontrolne točke Bézierove krivulje ležijo na neki premici, potem tudi Bézierova krivulja sama leži na tej premici.

DA NE

[15] **2.** Izračunaj LU razcep brez pivotiranja za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 16 & 10 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj še $\|U\|_\infty$, $\|U\|_1$ in $\|L\|_F$.

[15] **3.** Naredi dva koraka Newtonove metode za sistem nelinearnih enačb

$$x^2 + 2y^2 = 2, \quad x^2 - xy + y = 0,$$

pri začetnem približku $(x_0, y_0)^T = (1, 1)^T$.

[20] **4.** Poišči negibne točke iteracijske funkcije

$$x_{r+1} = g(x_r) = x_r(3 - 3\,a\,x_r + a^2 x_r^2), \quad r = 0, 1, \ldots, \qquad a \neq 0.$$

Za vsako od negibnih točk ugotovi, ali je odbojna ali privlačna točka za funkcijo g. Kakšen je red konvergence v okolici privlačnih točk. Za $x_0 = 0.25$ in $a = 3$ izračunaj prva dva približka.

[15] **5.** Določi konstante A, B, C, D in m v integracijskem pravilu

$$\int_0^4 f(x)\,dx = A\,f(0) + B\,f(2) + C\,f(4) + D\,f^{(m)}(\xi).$$

[15] **6.** Poišči pogoje, katerim morajo zadoščati kontrolne točke Bézierove krivulje stopnje 4, da bo le-ta v resnici krivulja stopnje 1.

Študijsko leto 2011/2012

IZPIT

30. januar 2012

1. Dane so točke v $\mathbb{R}^2$:

$$(-2,-6),\ (0,2),\ (1,0),\ (2,-8).$$

   Te točke aproksimirajte s parabolo $y = ax^2 + b$ po metodi najmanjših kvadratov.

2. a) Kaj so to deljene diference? Kako jih računamo?

   b) Zapišite interpolacijski polinom p za katerega velja

$$p(0) = -2,\ p'(0) = 2,\ p''(0) = 6,\ p(2) = 6,\ p(3) = -2$$

   in izračunajte njegovo vrednost v točkah 1 in 2.

3. Naj bodo točke $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, 3$, izbrane ekvidistantno in naj velja $f_i := f(x_i)$.
   Z metodo nedoločenih koeficientov izpeljite Milneovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4}{3}h\big(2f_1 - f_2 + 2f_3\big) + \frac{14}{45}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

4. Naj bosta A in B kvadratni matriki, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažite naslednji trditvi:

   a) Matriki AB in BA imata enake lastne vrednosti.

   b) Če sta AB in BA simetrični matriki, potem velja

$$\|AB\|_F \leq \|BA\|_F.$$

2.5 Študijsko leto 2012/2013

Študijsko leto 2012/2013

IZPIT

24. januar 2013

1. [9] Odgovorite na naslednja vprašanja:
   a) V ravnini imamo danih 6 točk. Želimo konstruirati polinom, ki te točke interpolira. Kakšne stopnje bo ta polinom? Kako bi ga določili?
   b) V ravnini imamo danih 100 točk. Bi bil interpolacijski polinom primeren za interpolacijo teh točk ali bi uporabili kaj drugega? Kaj? Odgovor utemeljite.
   c) V čem je razlika med interpolacijo in aproksimacijo, kamor med drugim spada tudi reševanje predoločenih sistemov?

2. [13] Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Poiščite matriko V iz razcepa Choleskega za matriko A. Izračunajte še $\|V\|_1$ in $\|V\|_\infty$ ter ocenite $\|V\|_2$.

3. [13] Dane so točke $(0,0)^\top$, $(1,1)^\top$, $(3,-1)^\top$. Zapišite kvadratno Bézierovo krivuljo, ki te točke interpolira pri parametrih 0, $\frac{1}{3}$, 1. Dobljen kontrolni poligon in krivuljo tudi skicirajte.

4. [15] Naj bodo točke ekvidistantne. Izpeljite integracijsko pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h\left(Af(x_0)+Bf(x_1)+Cf(x_2)\right)+h^2\left(Df'(x_0)+Ef'(x_2)\right)+Ff^{(m)}(\xi),$$

kjer je $x_0 < \xi < x_2$, z metodo nedoločenih koeficientov: konstante A,B,C,D,E, F in m določite tako, da bo pravilo čim višje stopnje.

IZPIT

7. februar 2013

1. [10] a) Zapišite Newtonov interpolacijski polinom p, za katerega velja:

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 0, \quad p(3) = 0, \quad p'(3) = 1.$$

b) Opišite dve lastnosti Bézierovih krivulj. Ali Bézierova krivulja interpolira svoje kontrolne točke?

2. [30] Želimo izračunati $\sqrt[3]{17}$. Katero izmed naslednjih metod bi izbrali:

$$\text{a) } x_{n+1} = \left(\frac{17}{x_n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{b) } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 17}{3x_n^2}, \quad \text{c) } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 17x_n}{x_n^2 - 17}?$$

Odgovor natančno utemeljite.

3. [30] S pomočjo LU razcepa brez pivotiranja rešite sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 3, \\ 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 &= -1. \end{aligned}$$

4. [30] Imamo tabelarično podano funkcijo:

x	1.9	2.0	2.1
$f(x)$	12.703	14.778	17.149

Želimo izračunati vrednost drugega odvoda funkcije f v točki $x = 2.0$. Izpeljite ustrezno formulo za numerični odvod in $f''(2.0)$ tudi izračunajte.

Namig: Z metodo nedoločenih koeficientov izpeljite formulo za ekvidistantne točke:

$$f''(x_1) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df^{(m)}(\xi),$$

kjer je $x_0 < \xi < x_2$.

IZPIT

3. junij 2013

1. [10] Tri točke P_0, P_1, P_2 in pripadajoče tangente d_0, d_1, d_2 interpoliramo z Bézierovo krivuljo.

   a) Kakšne stopnje je dobljena krivulja? Ali je pomemben vrstni red v katerem interpoliramo podatke?

   b) Kaj mora veljati za prvi kontrolni točki sosednje Bézierove krivulje, če želimo, da bo njun zlepek reda G^1?

2. [30] Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Izračunajte razcep oblike $A = P^\top LU$, kjer je P permutacijska matrika, L spodnje trikotna z enicami na diagonali, U pa zgornje trikotna matrika. Utemeljite zakaj so elementi matrike L po absolutni vrednosti ≤ 1.

   b) S pomočjo točke a) izračunajte determinanto matrike A.

3. [30] Dana je funkcija

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

   in vrh robotske roke, ki se giblje po ravnini. Določite polinom p po katerem se mora ta premikati, tako da se bo s funkcijo f ujemal v točkah $t_0 = 0$, $t_1 = 2/3$ in $t_2 = 1$. Ocenite tudi napako $\max |f(t) - p(t)|$ za $t \in [0, 1]$!

4. [30] Želimo določiti $x \in \mathbb{R}$ za katerega velja

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.31. \tag{2.1}$$

   a) Uporabite tangentno (Newtonovo) metodo in zapišite iteracijsko formulo za reševanje enačbe (2.2).

   b) Naj bo prvi približek dobljene iteracijske formule enak $x_0 = 0.5$. S pomočjo sestavljenega Simpsonovega pravila ($n = 4$) izračunajte naslednji približek x_1.

IZPIT

29. avgust 2013

1. [10] Tri točke P_0, P_1, P_2 in pripadajoče tangente d_0, d_1, d_2 interpoliramo z Bézierovo krivuljo.

   a) Kakšne stopnje je dobljena krivulja? Ali je pomemben vrstni red v katerem interpoliramo podatke?

   b) Kaj mora veljati za prvi kontrolni točki sosednje Bézierove krivulje, če č zelimo, da bo njun zlepek reda G^1?

2. [30] Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Izračunajte razcep oblike $A = P^\top LU$, kjer je P permutacijska matrika, L spodnje trikotna z enicami na diagonali, U pa zgornje trikotna matrika. Utemeljite zakaj so elementi matrike L po absolutni vrednosti ≤ 1.

   b) S pomočjo točke a) izračunajte determinanto matrike A.

3. [30] Dana je funkcija

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

in vrh robotske roke, ki se giblje po ravnini. Določite polinom p po katerem se mora ta premikati, tako da se bo s funkcijo f ujemal v točkah $t_0 = 0$, $t_1 = 2/3$ in $t_2 = 1$. Ocenite tudi napako $\max|f(t) - p(t)|$ za $t \in [0, 1]$!

4. [30] Želimo določiti $x \in \mathbb{R}$ za katerega velja

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.31. \tag{2.2}$$

   a) Uporabite tangentno (Newtonovo) metodo in zapišite iteracijsko formulo za reševanje enačbe (2.2).

   b) Naj bo prvi približek dobljene iteracijske formule enak $x_0 = 0.5$. S pomočjo sestavljenega Simpsonovega pravila ($n = 4$) izračunajte naslednji približek x_1.

Študijsko leto 2013/2014

IZPIT

27. januar 2014

1. [10] a) Linearni sistem enačb

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

želimo rešiti iterativno. Kateri metodi poznate? Katera bi za dan sistem konvergirala hitreje?

b) S pomočjo deljenih diferenc zapišite polinom p za katerega velja

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 2, \quad p(2) = -1, \quad p'(2) = 1.$$

Kakšne stopnje bi bil interpolacijski polinom, če bi dodatno interpolirali še vrednosti drugih odvodov?

c) Integracijsko pravilo $\int_{-1}^{1} f(x)dx \doteq Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$ je točno za vse polinome stopnje ≤ 2. Določite konstante A, B, C.

2. [10] Za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

izračunajte matriko V iz razcepa Choleskega. Kaj vam to pove o matriki A? Ocenite lastne vrednosti matrike A.

3. [15] Z metodo nedoločenih koeficientov izpeljite naslednjo metodo za numerično odvajanje:

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2)\right) + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_2.$$

Nato s pomočjo dobljenega pravila ocenite $f'(1.2)$, če poznate vrednost funkcije f v treh točkah, $f(0.8) = 4.01$, $f(1) = 5.44$, $f(1.2) = 7.30$.

4. [15] Naj za kubično Bézierovo krivuljo $\mathbf{p}$ velja

$$\mathbf{p}(0) = (0,0)^\top, \quad \mathbf{p}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{26}{27}, \frac{4}{3}\right)^\top, \quad \mathbf{p}(1) = (2,0)^\top.$$

Določite vse kontrolne točke krivulje $\mathbf{p}$, Če sta druga in tretja kontrolna točka oblike $\mathbf{b}_1 = (x_1, 2)^\top$ in $\mathbf{b}_2 = (2, y_2)^\top$. Zapišite iskano Bézierovo krivuljo in jo skicirajte.

IZPIT

10. februar 2014

1. [5] Zapišite splošno obliko Bézierove krivulje. Ali lahko vsako polinomsko krivuljo zapišemo v Bézierovi obliki? Naštejte tri lastnosti Bézierovih krivulj.

2. [15] Želimo izračunati $\sqrt[5]{15}$. Dani imamo naslednji dve metodi:

$$a)\ x_{r+1} = x_r - \frac{x_r^5 - 15}{40}, \quad b)\ x_{r+1} = x_r - \frac{x_r^5 - 15}{5x_r^4}.$$

Za obe metodi preverite ali bosta konvergirali in določite red konvergence. Za tangentno metodo poiščite območje, kjer metoda zagotovo konvergira.

3. [10] Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Z Gram-Schmidtovim postopkom izračunajte QR razcep matrike A.
   b) S pomočjo dobljenega razcepa izračunajte produkta Q^TQ in QQ^T. Kaj opazite?

4. [10] V statistiki večkrat uporabljamo matriko H,

$$H = X(X^TX)^{-1}X^T, \quad X \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \geq n,\ \operatorname{rang} X = n,$$

in pogosto nas zanimajo le diagonalni elementi te matrike.
Sestavite učinkovit algoritem za izračun teh diagonalnih elementov. Namig: Pomagajte si s QR razcepom matrike X.

5. [10] Določite interpolacijski polinom p, ki se s funkcijo $f(x) = e^x$ ujema trojno (v točkah ter prvih in drugih odvodih) pri $x = 0$ in $x = 1$. Ocenite napako interpolacije.

IZPIT

11. junij 2014

1. [7] Kaj so deljene diference? Za funkcijo $f(x) = x\cos(x)$ izračunajte $f[0, 0, \pi, \pi]$. Pojasnite, kaj predstavlja dobljena deljena diferenca.

2. [14] S pomočjo Givensovih rotacij in QR razcepa rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} x - y &= 0, \\ -x + 2y &= 1, \\ -y + 2z &= 1. \end{aligned}$$

3. [14] Rešiti želimo enačbo $e^x = \frac{1}{x}$.

   a) Katere numerične metode za reševanje te enačbe poznate? Eno natančno opišite.

   b) Denimo, da uporabimo iteracijsko formulo

   $$x_{r+1} = \frac{x_r^2 + x_r}{1 + 2x_r + \ln x_r}.$$

   Določite red konvergence.

4. [15] Naj bodo točke ekvidistantne. Izpeljite integracijsko pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h\left(Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2)\right) + h^2\left(Df'(x_0) + Ef'(x_2)\right) + Ff^{(m)}(\xi),$$

kjer je $x_0 < \xi < x_2$, z metodo nedoločenih koeficientov: konstante A,B,C,D,E, F in m določite tako, da bo pravilo čim višje stopnje.

IZPIT

1. september 2014

1. [5] Naj bo α rešitev enačbe $x = g(x)$. Kdaj pravimo, da je red konvergence iteracije $x_{r+1} = g(x_r)$ v bližini α enak 4?

2. [12] Za
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem. Zakaj so elementi matrike L po absolutni vrednosti ≤ 1? Izračunajte $\|L\|_1 \|U\|_\infty$.

3. [10] Zapišite interpolacijski polinom, ki se s funkcijo $f(x) = e^{-x}$ ujema trojno v točki $x = 0$ in dvojno v točki $x = 1$.

4. [10] Z uporabo Newtonove metode poiščite prvi približek za rešitev sistema
$$xy = 4, \quad xz = 12, \quad yz = 6.$$
Za začetni približek vzamite $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

5. [13] Izpeljite integracijsko pravilo
$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = Af(-h) + Bf(0) + Cf(h) + Df'(-h) + Ef'(h) + Ff^{(m)}(\xi),$$
kjer je $-h < \xi < h$, z metodo nedoločenih koeficientov: konstante A,B,C,D,E, F in m določite tako, da bo pravilo čim višje stopnje.

2.7 Študijsko leto 2014/2015

Študijsko leto 2014/2015

IZPIT

19. januar 2015

1. [4] Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažite, da za $n \times n$ unitarni matriki Q in R velja

$$\|QAR\|_2 = \|A\|_2.$$

2. [4] Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, $\operatorname{rang}(A) = n$. Pokažite, da ima sistem

$$\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

rešitev, ki ustreza rešitvi predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov.

3. [8] Naredite en korak Jacobijeve in Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $(0, 0, 0)^\top$ pri reševanju sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ali obe iteraciji konvergirata za poljuben začetni približek?

4. [10] Dana je funkcija $f(x) = \sqrt{1 - 3x^2}$. Poiščite interpolacijski polinom p, ki se z f ujema dvojno (v točki in odvodu) pri 0 in $\frac{1}{2}$. Ocenite napako interpolacije.

5. [9] Določite kontrolne točke kubične Bézierove krivulje b, za katero velja:

$$b(0) = (0, 0)^\top, \quad b'(0) = (6, 6)^\top, \quad b''(0) = (0, -12)^\top, \quad b'''(0) = (-6, 6)^\top.$$

6. [15] a) Pokažite, da z enim korakom Rombergove ekstrapolacije (sestavljenega) trapeznega pravila, dobimo (sestavljeno) Simpsonovo pravilo.

   b) Določite uteži v shemi, ki jo dobimo z enim korakom Rombergove ekstrapolacije Simpsonovega pravila. Pojasnite, če s tem dobimo neko drugo Newton-Cotesovo pravilo. Če da, utemeljite ali obstajajo tudi nadaljnji primeri, ko z enim korakom Rombergove ekstrapolacije Newton-Cotesovega pravila dobimo naslednje Newton-Cotesovo pravilo?

IZPIT

4. februar 2015

1. [4] Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Izračunajte LU razcep matrike A. Lahko uporabimo LU razcep brez pivotiranja, ali moramo narediti razcep s pivotiranjem?

   b) A pomočjo dobljenega razcepa izračunajte determinanto matrike A.

   c) Kakšno je število operacij, ki so potrebne za izračun determinante $n \times n$ matrike s pomočjo LU razcepa?

2. [16] Imamo kubični polinom p z realnimi koeficienti.

   a) Naj ima p tri enostavne ničle α, β in γ. Pokažite, da z uporabo tangentne metode na začetnem približku $x_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ v enem koraku dobimo ničlo γ.

   b) Denimo, da imamo eno dvojno ničlo, npr. $\beta = \gamma$. Utemeljite, da obstaja natanko en začetni približek $\xi, \xi \neq \beta$, za katerega tangentna metoda odpove. Kam tangentna metoda konvergira za začetne približke na intervalu $(-\infty, \xi)$ in kam za začetne približke na (ξ, ∞)?

   c) Denimo, da so vse tri ničle enostavne. S pomočjo premisleka pod točko b) pojasnite, da v tem primeru obstaja neskončno začetnih približkov, za katere bo tangentna metoda odpovedala.

3. [9] Za izračun vrednosti integrala

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2x} dx$$

   uporabite sestavljeno trapezno pravilo, pri čemer za h vzemite $\frac{1}{2}$. Ocenite tudi napako.

4. [9] Poiščite kontrolne točke Bézierove krivulje b, da bo veljalo

$$b(0) = (0,0)^\top, \quad b'(0) = (0,3)^\top, \quad b\left(\frac{1}{2}\right) = (2,4)^\top, \quad b(1) = (4,0)^\top.$$

   Dobljeni kontrolni poligon in krivuljo tudi skicirajte.

IZPIT

18. junij 2015

1. [4] Kje so težave s stabilnostjo, če želimo numerično izračunati

$$\frac{1}{x}\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}},$$

pri $x = 10^{-16}$. Zapišite izraz v stabilnejši obliki za računanje.

2. [16] Dana je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 3n-2i, \quad i=1,\dots,n,\\ a_{i+1,i} &= a_{i,i+1} = -i, \quad i=1,\dots,n-1, \end{aligned}$$

drugi elementi so enaki 0 :

$$A = \begin{pmatrix} 3n-2 & -1 & & & & \\ -1 & 3n-4 & -2 & & & \\ & -2 & 3n-6 & -3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -n+2 & n+2 & -n+1 \\ & & & & -n+1 & n \end{pmatrix}.$$

Izračunajte $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$ in čim natančneje ocenite $\|A\|_2$ na obe strani.
Namig:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. [18] Numerično želimo poiskati ničle funkcije $f(x) = e^{-x} - 3x$. Utemeljite, da ima f natanko eno ničlo α na intervalu $[0, \frac{1}{3}]$. Nato preverite, ali navadna iteracija

$$x_{r+1} = \frac{x_r(1-\ln(3x_r))}{1+x_r}$$

konvergira k α in določite red konvergence.

4. [12] Dana je Bézierova krivulja b s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_0 = (0,0)^\top, \mathbf{b}_1 = (h,0)^\top, \mathbf{b}_2 = (0,h)^\top, \mathbf{b}_3 = (0,0)^\top,$$

kjer je $h > 0$.

a) Določite $b\left(\frac{1}{2}\right)$. Krivuljo skicirajte.
b) Poiščite vrednost parametra t, pri katerem je x koordinata krivulje največja in določite pripadajočo točko na krivulji.
c) Za kakšno vrednost parametra h bi se krivulja najbolje prilegala enotskemu kvadratu?

Študijsko leto 2015/2016

IZPIT

26. januar 2016

1. [10] a) Pokažite, da Newtonova metoda za reševanje enačbe $\dfrac{1}{x} - c = 0$, $c \neq 0$, porodi iteracijo $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$, za $n \geq 0$.
Prav tako pokažite, da ima iteracija kvadratično konvergenco v bližini fiksne točke.

   b) Pokažite, da je rešitev enačbe $x = c^{1/5}$ hkrati tudi fiksna točka iteracije $x_{n+1} = cx_n^{-4}$, za $n \geq 0, c > 0$. Pokažite še, da iteracija ne kovergira k rešitvi enačbe.

2. [10] Z uporabo Givensovih rotacij in QR razcepa rešite naslednji sistem enačb

$$\begin{aligned} x - y &= 0, \\ -x + 2y &= 1, \\ -y + 2z &= 1. \end{aligned}$$

3. [8] Izpeljite metodo za aproksimacijo drugega odvoda funkcije f:

$$f''(a) \approx Af(a-h) + Bf(a) + Cf(a+h) + Df(a+2h), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},$$

pri čemer zahtevate, da je metoda eksaktna za polinome stopenj ≤ 3.

4. [12] a) Naj bo $f(x) = \sqrt{1-x}$ in $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$. Izračunajte deljeno diferenco na štirih točkah $f[x_0, x_0, x_1, x_1]$.

   b) Numerično računajmo določen integral s sestavljenim Simpsonovim pravilom. Določite največji dovoljen korak h in pripadajoče število podintervalov n za aproksimacijo integrala

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}\, dx,$$

   da bo napaka aproksimacije manjša od 10^{-5}. Nato izračunajte še iskano aproksimacijo.

5. [10] a) Zapišite polinomsko parametrično krivuljo

$$p(t) = (t^3 + 2t^2 + 1, 2t^2 - t + 2)^T, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

   v Bézierovi obliki.

   b) Dokažite, da velja $B_n(x^2; x) = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n}$, kjer je

$$B_n(f; x) := \sum_{i=0}^{n} f(i/n) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

IZPIT

19. februar 2016

1. [8] a) Pokažite, da je $0.1 = \sum_{i=1}^{\infty}(2^{-4i} + 2^{-4i-1})$.

   b) Uporabite točko a) in pokažite, da je binarni zapis za $x = 0.1$ enak $0.000\overline{1100}_2$ (zadnje štiri števke se ponavljajo).

2. [10] Dana je matrika
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

   a) Izračunajte $\|A\|_1, \|A\|_\infty$ in $\|A\|_F$.

   b) S pomočjo razcepa Choleskega rešite sistem $Ax = b$, kjer je $b = (1,0,1,0)^T$.

3. [10] Dan je linearen sistem $Ax = b$, kjer je
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 27 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   a) Poiščite Jacobijevo iteracijsko matriko R_J in pokažite, da Jacobijeva metoda konvergira.

   b) Uporabite Jacobijevo metodo in poiščite približek $x^{(1)}$, kjer za začetni približek vzemite $x^{(0)} = (-0.5, -2.5, -1.5)^T$.

4. [10] Za funkcijo $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ poiščite interpolacijski polinom p stopnje 5, za katerega velja
$$p\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f\left(k\frac{\pi}{2}\right), \quad p'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(k\frac{\pi}{2}\right), \quad p''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(k\frac{\pi}{2}\right),$$
za $k = 0, 1$.

5. [12] Površina območja, ki ga opiše krivulja $y^2 + x^2 = \cos x$, je dana s formulo
$$A = 4\int_0^{\alpha}(\sqrt{\cos x - x^2})dx$$
kjer je α pozitivni koren enačbe $\cos x = x^2$.

   a) S tangentno metodo izračunajte α na tri decimalke natančno.

   b) Izračunajte površino A s pomočjo enostavnega Simpsonovega pravila.

IZPIT

20. junij 2016

1. [10] Naj bo $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, dano število in naj bo

$$x_{r+1} = \frac{1}{8}\left(15x_r - 10\,a\,x_r^3 + 3\,a^2 x_r^5\right), \quad r = 0, 1, \ldots$$

zaporedje iteracij.

   a) Določite vse fiksne točke dane iteracije. Katere so privlačne in katere odbojne? V okolici privlačnih fiksnih točk določite red konvergence.

   b) Naj bo $a = 5$. Z izbiro $x_0 = \frac{1}{2}$ izračunajte naslednja dva približka za pripadajočo fiksno točko ter izračunajte napako približka x_2.

2. [10] Z Newtonovo metodo rešujemo sistem nelinearnih enačb

$$\sin(\pi x)\cos(\pi y) = \cos(\pi x),$$

$$\sin(\pi x)\sin(\pi y) = \frac{1}{2}.$$

Z začetnim približkom $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^T$ izračunate nov približek k rešitvi.

3. [10] Izračunajte singularni razcep matrike

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. [10] Naj bodo $(x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T, \ldots, (x_m, y_m)^T$ dane točke v ravnini.

   a) Poiščite premico $y = kx + n$, ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira te točke.

   b) Uporabite rezultat iz naloge a) na naboru točk $(1, 2)^T, (2, 3)^T, (3, 5)^T, (4, 8)^T$.

5. [10] Dane so točke $(0, 0)^T, (1, 1)^T, (3, -1)^T$. Zapišite kvadratno Bézierovo krivuljo, ki te točke interpolira pri parametrih $0, \frac{1}{3}, 1$. Dobljen kontrolni poligon in krivuljo tudi skicirajte.

2.9 Študijsko leto 2016/2017

Šolsko leto 2016/2017

IZPIT

21. junij 2017

1. [20] Za izračun $\sqrt[4]{\alpha}$, $\alpha > 0$, uporabimo iteracijo

$$x_{r+1} = \frac{4x_r^5}{5x_r^4 - \alpha}.$$

   a) Pokažite, da je $\sqrt[4]{\alpha}$ negibna točka dane iteracijske funkcije in določite red konvergence v bližini te točke.
   b) Naj bo $\alpha = 9$ in $x_0 = 2$. Izračunajte naslednji približek x_1 za $\sqrt[4]{9}$.

2. [20] S pomočjo QR razcepa poiščite rešitev predoločenega sistema

$$\begin{aligned} 9x_1 + 26x_3 &= 15, \\ 12x_1 - 7x_3 &= 0, \\ 4x_2 + 4x_3 &= -5, \\ -3x_2 - 3x_3 &= 5, \end{aligned}$$

   po metodi najmanjših kvadratov.

3. [20] Izpeljite formulo za aproksimacijo drugega odvoda $f''(x_0)$ tako, da uporabite le funkcijske vrednosti $f(x_0-h), f(x_0)$ in $f(x_0+3h)$. Določite napako pravila.

4. [20] Poiščite kontrolne točke kubične Bézierove krivulje $\mathbf{b}$ za katero velja

$$\mathbf{b}(0) = (0,0)^\top, \quad \mathbf{b}'(0) = (6,6)^\top, \quad \mathbf{b}''(0) = (0,-12)^\top, \quad \mathbf{b}'''(0) = (-6,6)^\top.$$

   Dobljeno Bézierovo krivuljo natančno skicirajte.

IZPIT

6. julij 2017

1. [20] Zanimajo nas ničle funkcije $f(x) = x^3 - 2x$.

   a) Preverite, da je $g(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$ iteracijska funkcija za f. Izračunajte rešitve enačbe $f(x) = 0$.

   b) Kaj lahko poveste o redu konvergence iteracijske funkcije g v bližini vsake izmed rešitev enačbe $f(x) = 0$ na podlagi zgolj prvega odvoda funkcije g?

2. [20] Z LU razcepom brez pivotiranja poiščite rešitev sistema enačb:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_4 - 1 &= 2x_3. \end{aligned}$$

3. [20] Naj bo $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$, $h > 0$, vsaj trikrat zvezno odvedljiva funkcija. Določite koeficienta α_0 in α_1 v integracijskem pravilu

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f\left(a + \frac{2}{3}h\right) + Rf$$

   tako, da bo natančno za polinome čim višje stopnje. Nato izrazite ostanek Rf z višjim odvodom funkcije f in konstanto h.

4. [20] Naj ima kubična Bézierova krivulja $\mathbf{b}$ naslednje kontrolne točke:

$$\mathbf{b}_0 = (0,0)^\top, \quad \mathbf{b}_1 = (a,b)^\top, \quad \mathbf{b}_2 = (27,9)^\top, \quad \mathbf{b}_3 = (9,0)^\top$$

   in naj pri parametru $t = \frac{1}{3}$ interpolira točko $(\frac{19}{3}, 6)^\top$.

   a) Določite neznano kontrolno točko $\mathbf{b}_1$, tako da uporabite de Casteljauov algoritem.

   b) Grafično ponazorite de Casteljauov algoritem za dobljeno Bézierovo krivuljo $\mathbf{b}$ pri parametru $t = \frac{1}{3}$ in krivuljo $\mathbf{b}$ natančno skicirajte.

IZPIT

22. avgust 2017

1. [20] Želimo rešiti enačbo
$$e^{2x} + x = 0. \tag{2.3}$$
   a) Preverite, da je
   $$g(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{2e^{2x}+1}$$
   iteracijska funkcija za reševanje (2.4). Za začetni približek $x_0 = 0$ izračunajte naslednji približek x_1, ki ga vrne iteracijska funkcija g.
   b) Ali iteracija z iteracijsko funkcijo g v neki okolici rešitve enačbe (2.4) konvergira?

2. [20] Naj bo
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}.$$
S pomočjo QR razcepa poiščite rešitev predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov.

3. [20] Izpeljite formulo za aproksimacijo prvega odvoda $f'(x_0)$ tako, da uporabite le funkcijske vrednosti $f(x_0-h)$, $f(x_0)$ in $f(x_0+3h)$. Določite tudi napako pravila.

   Nato ocenite še celotno napako (pri čemer zaokrožitveno napako zanemarite) in optimalni korak h, če za izračunane funkcijske vrednosti velja $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| < 5 \cdot 10^{-6}$ ter je $\|f^{(3)}\|_\infty \leq 10$.

4. [20] Dana je kubična Bézierova krivulja $\mathbf{b}$ z naslednjimi kontrolnimi točkami:
$$\mathbf{b}_0 = (1, a)^\top, \quad \mathbf{b}_1 = (a+b, 1)^\top, \quad \mathbf{b}_2 = (1, a+b)^\top, \quad \mathbf{b}_3 = (b, 0)^\top,$$
kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$.
   a) Določite točko na Bézierovi krivulji $\mathbf{b}$ pri parametru $t = \frac{1}{2}$, tako da uporabite de Casteljauov algoritem. S pomočjo dobljene trikotne sheme določite tudi $\mathbf{b}'(\frac{1}{2})$.
   b) Vrednosti a in b določite tako, da bo točka $\mathbf{b}(\frac{1}{2})$ ležala na razpolovišču daljice med drugo in tretjo kontrolno točko. Grafično ponazorite de Casteljauov algoritem za dobljeno Bézierovo krivuljo $\mathbf{b}$ pri parametru $t = \frac{1}{2}$ in krivuljo $\mathbf{b}$ natančno skicirajte.

IZPIT

5. september 2017

1. [20] Za sistem enačb

$$
\begin{aligned}
2y^2 - x^2 + xy &= 3y - 2,\\
3x^2 + 2y^2 - 2xy &= 8 - x,
\end{aligned}
$$

naredite en korak tangentne (Newtonove metode) z začetnim približkom $x_0 = 0$ in $y_0 = 1$. Nato zapišite sistem enačb, ki bi ga morali rešiti na drugem koraku tangentne metode (tega sistema ni potrebno rešiti).

2. [20] Izračunajte matriki L in U iz LU razcepa matrike

$$
A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \end{pmatrix}
$$

z delnim pivotiranjem. Nato izračunajte še $\|L\|_\infty$ in $\|U\|_1$.

3. [20] Za iskanje ničle funkcije f uporabimo iteracijo

$$
x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{p_r'(x_r)}, \quad r \geq 2,
$$

kjer p_r označuje polinom stopnje ≤ 2, ki interpolira vrednosti funkcije f v točkah x_r, x_{r-1} in x_{r-2}.

a) S pomočjo deljenih diferenc in Newtonovega zapisa interpolacijskega polinoma p_r določite $p_r'(x_r)$.

b) Naj bodo dana funkcija $f(x) = x^3 - 7$ in začetni približki $x_0 = 5, x_1 = 4, x_2 = 3$. Z dano metodo določite naslednji približek x_3.

4. [20] Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vsaj trikrat zvezno odvedljiva funkcija. Določite koeficiente A, B in C v integracijskem pravilu

$$
\int_a^b f(x)\,dx = A\,f(a) + B\,f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + C\,f(b) + Rf
$$

tako, da bo natančno za polinome čim višje stopnje. Nato določite še napako Rf numerične integracije s tem pravilom.

2.10 Študijsko leto 2017/2018

Študijsko leto 2017/2018

IZPIT

7. junij 2018

1. [10] Iteracija

$$x_{r+1} = 2 - (1+c)x_r + cx_r^3$$

za nekatere vrednosti parametra c in začetne približke x_0 dovolj blizu $a = 1$ konvergira proti a.

   a) Za katere vrednosti parametra c imamo zagotovljeno konvergenco v bližini fiksne točke a?

   b) Za katero vrednost parametra c bo konvergenca v bližini fiksne točke a kvadratična?

   c) Za vrednost parametra c iz točki (b) naredite en korak iteracije z začetnim približkom $x_0 = \frac{2}{3}$.

2. [10] Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   a) Poiščite `LU` razcep z delnim pivotiranjem matrike A.

   b) S pomočjo izračunanega razcepa izračunajte determinanto matrike A.

3. [10] Funkcijo $f(x) = \sin(x)$ interpoliramo v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = h$ s polinomom tretje stopnje. Pri tem v točki x_0 interpoliramo vrednost funkcije, odvod funkcije in drugi odvod funkcije. V točki x_1 pa samo vrednost funkcije. Ocenite kolikšen mora biti h, da bo napaka interpolacije na intervalu $[0, h]$ manjša od 10^{-8}.

4. [10] Naj ima funkcija f lokalni minimum na interval $x_{n-1} \leq x \leq x_{n+1}$, pri čemer velja $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$. Pokažite, da je približek za ta lokalni minimum, ki nam ga da interpolacijski polinom stopnje dva, ki interpolira f v točkah x_{n-1}, x_n in x_{n+1}, oblike

$$f(x_n) - \frac{1}{8}\left(\frac{(f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))^2}{f(x_{n+1}) - 2f(x_n) + f(x_{n-1})}\right).$$

5. [10]

   a) Zapišite parametrično enačbo Bézierove krivulje v Bernsteinovi obliki, ki jo določajo kontrolne točke $(1,2)^T, (3,4)^T, (6,-6)^T$ in $(10,8)^T$. Izračunajte njene vrednosti pri parametrih $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ ter skicirajte krivuljo.

   b) Uporabite definicijo za linearno neodvisnost funkcij in dokažite, da so Bernsteinovi polinomi $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ linearno neodvisni.

IZPIT

22. junij 2018

1. [10] Enačbo $x^2 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, rešujemo z iteracijo

$$x_{r+1} = \frac{x_r^3}{Ax_r^2 + B}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Določite neznana koeficienta A in B tako, da bo red konvergence v okolici rešitve $\sqrt{a}$ vsaj kvadratičen. Kakšen je točno red konvergence?
Z iteracijo, ki jo dobite, izračunajte $\sqrt{5}$ na pet decimalnih mest natančno z začetnim približkom $x_0 = 2$.

2. [10] S pomočjo `QR` razcepa z Givensovimi rotacijami rešite predoločen sistem $Ax = b$ za podatke

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$\min_x \| Ax - b \|_2 .$$

3. [10] Funkcijo $f(x) = \sin(x)$ interpoliramo v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = h$ s polinomom tretje stopnje. Pri tem v točki x_0 interpoliramo vrednost funkcije, odvod funkcije in drugi odvod funkcije. V točki x_1 pa samo vrednost funkcije. Ocenite kolikšen mora biti h, da bo napaka interpolacije na intervalu $[0, h]$ manjša od 10^{-8}.

4. [10] S pomočjo metode nedoločenih koeficientov določite koeficiente a, b, c, d in red odvoda n v kvadraturni formuli

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h(af(x_0) + bf(x_1) + cf(x_2)) + df^{(n)}(\xi),$$

kjer so $x_i = x_0 + ih$ in $x_0 \leq \xi \leq x_2$.

5. [10]
   a) Konstruirajte Bézierovo krivuljo stopnje tri s štirimi kontrolnimi točkami $(0, 0)^T, (1, 2)^T, (3, 2)^T$ in $(2, 0)^T$. Generirajte vsaj 5 točk na krivulji.
   b) Dokažite, da lahko vsak Bernsteinov polinom stopnje $< n$ izrazimo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih polinomov stopnje n.

Študijsko leto 2018/2019

IZPIT

12. junij 2019

1. [20] Dana sta matrika A in vektor b

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 44 \\ 4 \\ 56 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Za matriko A izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem. Nato s pomočjo dobljenega razcepa (ekonomično) izračunajte vrednost izraza $b^T A^{-1} b$.

2. [20] Določite vektor v podprostoru, ki ga razpenjajo stolpci matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

za katerega velja, da je v drugi normi najmanj oddaljen od vektorja $(4, 0, 2, 14)^T$.

3. [20] Poiščite polinom p, ki se s funkcijo $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ujema trojno (tj. v vrednosti ter prvem in drugem odvodu) v točkah 1 in 2. Pokažite, da se f in p v nobeni točki z intervala $[1, 2]$ absolutno ne razlikujeta za več kot $\frac{1}{8}$.

4. [20] Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vsaj trikrat zvezno odvedljiva funkcija. Določite koeficiente A, B in C v integracijskem pravilu

$$\int_a^b f(x)\,dx = A\,f(a) + B\,f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + C\,f(b) + Rf$$

tako, da bo natančno za polinome čim višje stopnje. Nato določite še napako Rf numerične integracije s tem pravilom.

IZPIT

26. avgust 2019

1. [5] Katero število (v desetiškem zapisu) je v IEEE aritmetiki s premično piko v dvojni natančnosti predstavljeno kot

1	10000000101	$10100101\underbrace{0\ldots0}_{44}$

?

2. [6] Poiščite interpolacijski polinom p, za katerega velja

$$p(0) = 1, \quad p(2) = -1, \quad p'(2) = 3, \quad p''(2) = 8, \quad p(3) = 4.$$

3. [13] Dana je iteracija

$$x_{r+1} = x_r(3 - 3ax_r + a^2x_r^2), \quad r = 0, 1, 2, ...$$

kjer je $a \neq 0$.

a) Izračunajte fiksne točke iteracije ter določite ali so privlačne ali odbojne.
b) V okolici privlačnih fiksnih točk določite red konvergence ter začetne približke, za katere zaporedje iteracij zagotovo konvergira.
c) Preizkusite iteracijo za $a = 5$ in $x_0 = 0.1$. Komentirajte rezultat.

4. [13] Dana je nesingularna matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z LU razcepom $A = LU$ ter vektorja $a, b \in R^n$.

(a) Sestavite ekonomičen algoritem za izračun rešitve sistema

$$\begin{pmatrix} U & I \\ A & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

in preštejte število operacij.

(b) Izračunajte LU razcep brez pivotiranja matrike A in rešite sistem (2.4) za podatke

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 8 \\ 96 & -4 & 72 \\ 0 & 32 & -48 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -43 \\ 10 \\ 98 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

5. [13] Določite funkcijo $f(x) = a + bx^2 + c\sin(\frac{\pi x}{3})$, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega točkam

$$(-2, 4), \quad (-1, 0), \quad (1, 2), \quad (2, 8).$$

Nalogo rešite preko QR razcepa, ki ga izračunajte s pomočjo Gram-Schmidtovega postopka.