UNIVERZA NA PRIMORSKEM

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Okrajšani zapiski predavanj iz funkcionalne analize

Izr. prof. dr. Marko Orel

DRUGO UČNO GRADIVO

41 strani

Matematika, dodiplomski študijski program

PRVA IZDAJA

Koper, 2022

Delo naj se citira kot:
Orel, Marko. *Okrajšani zapiski predavanj iz funkcionalne analize.* Univerza na primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Koper, 2022.

Predgovor

Predmet Funkcionalna analiza na dodiplomskem študijskem programu Matematika na UP FAMNIT primarno zajema osnove teorije operatorjev na Banachovih in Hilbertovih prostorih. Sama predavanja so bila zgrajena s pomočjo zapiskov, ki sem jih kot študent ustvaril pri predavanjih dr. Petra Legiše. Pri tem so bile določene tematike zamenjane z drugimi. Vrstni red snovi je bil prav tako ustrezno prilagojen. Študenti UP FAMNIT topologijo metričnih prostorov spoznajo v okviru obveznega predmeta Analiza 3, sam predmet Topologija pa je izbirnega tipa. Ker so določena topološka predznanja pri predmetu Funkcionalna analiza zelo dobrodošla, so le-ta vključena v okviru uvodnega poglavja, kjer se izreki praviloma ne dokazujejo. Pričujoče delo vključuje pregled vsebine (izreki in definicije), ki jo običajno obravnavamo pri predmetu Funkcionalna analiza. Sama predavanja so bogatejša za večino dokazov ter številne zglede. Zapiski so na koncu opremljeni tudi s terminološkim slovarjem (ENG/SLO), saj je predmet praviloma na voljo tako slovenskim kot tujim študentom.

Marko Orel — Koper, Maj 2022

Kazalo

POGLAVJE 0

Predsnov (nekaj pojmov iz topologije)

V tem poglavju bomo ponovili nekaj dejstev o topoloških prostorih.

0.1 Topološki prostori

Naj bo X neprazna množica. Družini τ podmnožic množice X pravimo *topologija*, če so izpolnjeni naslednji trije pogoji.

(i) $\emptyset, X \in \tau$;

(ii) Če je Λ neka množica in velja $V_\lambda \in \tau$ za vsak $\lambda \in \Lambda$, potem velja tudi $\cup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \tau$;

(iii) Če je $V_1, V_2 \in \tau$, potem velja tudi $V_1 \cap V_2 \in \tau$.

Paru (X, τ) pravimo *topološki prostor*. Elementi topologije so *odprte množice*. Množica $F \subseteq X$ je *zaprta* natanko tedaj, ko je njen komplement odprt, tj. $F^c \in \tau$. *Okolica točke x* v topološkem prostoru X je taka podmnožica $U \subseteq X$, za katero obstaja odprta množica $V \subseteq X$, da velja $x \in V \subseteq U$.

Naj bo X topološki prostor in A njegova podmnožica.

- Pravimo, da je $x \in X$ *notranja točka* množice A, če obstaja taka okolica U točke x v prostoru X, da velja $x \in U \subseteq A$.
- Pravimo, da je $y \in X$ *zunanje točka* množice A, če obstaja taka okolica U točke y v prostoru X, da velja $y \in U \subseteq A^c$.
- Pravimo, da je $z \in X$ *robna točka* (ali *mejna točka*) množice A, če vsaka okolica točke z v X seka obe množici A in A^c.
- Množici vseh notranjih točk množice A pravimo *notranjost* množice A in označimo z $\mathrm{Int}_X(A)$.
- Množici vseh zunanjih točk množice A pravimo *zunanjost* množice A in označimo z $\mathrm{Ext}_X(A)$.
- Množici vseh robnih točk množice A pravimo *rob* (ali *meja*) množice A in označimo z $\partial_X(A)$.

Množice $\mathrm{Int}_X(A), \mathrm{Ext}_X(A), \partial_X(A)$ so med sabo disjunktne, njihova unija pa je cel prostor X. Notranjost $\mathrm{Int}_X(A)$ je unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v množici A. Zato je tudi največja med odprtimi množicami, ki so vsebovane v A.

Zaprtje množice A v X je presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A. To je najmanjša med zaprtimi množicami, ki vsebuje A. Označimo jo z $\overline{A}$. V kolikor ni jasno, kaj je topološki prostor, potem uporabimo oznako $Cl_X(A)$. Veljajo naslednja dejstva:

- $\overline{A} = A \cup \partial_X(A)$;
- Množica A je odprta v X natanko tedaj, ko velja $A = \mathrm{Int}_X(A)$;
- Množica A je zaprta v X natanko tedaj, ko velja $A = \overline{A}$;
- $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
- $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;
- Če za podmnožici A in B v X velja $A \subseteq B$, potem je $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;
- Za podmnožici A in B v X vselej velja $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Naj bo $a, s, a_1, a_2, \ldots \in X$. Pravimo, da je a *limita zaporedja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če za vsako okolico U točke a v X obstaja tako naravno število n_0, da velja $a_n \in U$ za vsak $n \geq n_0$. V tem primeru pišemo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in pravimo, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentno*.

Pravimo, da je s *stekališče zaporedja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če vsaka okolica točke s v X vsebuje neskončno členov tega zaporedja.

Naj bosta X in Y topološka prostora. Za preslikavo $f : X \to Y$ pravimo, da je *zvezna v točki* $x \in X$, če za vsako okolico V točke $f(x)$ obstaja taka okolica U točke x, da velja $f(U) \subseteq V$. Pravimo, da je preslikava f *zvezna*, če je zvezna v vsaki točki iz prostora X.

Trditev 0.1. *Naj bosta X in Y topološka prostora. Za preslikavo $f : X \to Y$ so naslednje trditve ekvivalentne.*

(i) Preslikava f je zvezna;

(ii) Za vsako odprto množico V v Y je množica $f^{-1}(V)$ odprta v prostoru X;

(iii) Za vsako zaprto množico F v Y je množica $f^{-1}(F)$ zaprta v prostoru X;

(iv) Za vsako podmnožico $A \subseteq X$ velja $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

V kolikor za $a, a_1, a_2, \ldots \in X$ velja $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in je $f : X \to Y$ zvezna preslikava, potem velja tudi $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

Če so X, Y, Z topološki prostori, preslikavi $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ pa sta zvezni, potem je zvezen tudi njun kompozitum $g \circ f : X \to Z$.

Naj bosta X in Y topološka prostora.

- Preslikava $f : X \to Y$ *odprta*, če slika odprte množice v odprte množice.
- Preslikava $f : X \to Y$ *zaprta*, če slika zaprte množice v zaprte množice.
- Preslikava $f : X \to Y$ je *homeomorfizem*, če je bijektivna ter sta obe preslikavi f in f^{-1} zvezni.
- Če obstaja kakšen homeomorfizem $f : X \to Y$, potem pravimo, da sta topološka prostora X in Y *homeomorfna*.

Za bijektivno preslikavo $f : X \to Y$ očitno velja

$$f \text{ je odprta} \iff f^{-1} \text{ je zvezna} \iff f \text{ je zaprta}$$

ter

$$f \text{ je homeomorfizem} \iff f \text{ je zvezna in odprta} \iff f \text{ je zvezna in zaprta.}$$

Če sta X in Y topološka prostora, potem družina τ podmnožic množice $X \times Y$, ki jo sestavljajo vse unije množic oblike $U \times V$, kjer je U odprta množica v X in je V odprta množica v Y, tvori topologijo. Pravimo ji *produktna topologija.* Pri taki izbiri topologije na množici $X \times Y$, sta preslikavi (tj. projekciji)

$$\begin{aligned} X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} X \times Y &\to Y \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

zvezni. Poleg tega za vsaki množici $A \subseteq X$ in $B \subseteq Y$ velja

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

Za zaporedje (x_n, y_n) in točko (x, y) v prostoru $X \times Y$, ki je opremljen s produktno topologijo, velja

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Naj bo X topološki prostor in $K \subseteq X$ njegova podmnožica. Če so množice G_λ, $\lambda \in \Lambda$ odprte v X ter velja $K \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, potem pravimo, da je družina $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *odprto pokritje* za množico K. Množica K je *kompaktna*, če ima vsako njeno odprto pokritje, kakšno končno podpokritje, tj. velja implikacija

$$\begin{aligned} &\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ je odprto pokritje množice} K \\ &\qquad \implies \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ ter } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda, \text{ tako da velja } K \subseteq \cup_{i=1}^n G_{\lambda_i}. \end{aligned}$$

Trditev 0.2. *Naj bosta X in Y topološka prostora, $f : X \to Y$ zvezna preslikava in $K \subseteq X$ kompaktna množica. Tedaj je kompaktna tudi množica $f(K)$.*

0.2 Metrični prostori

Metričen prostor je par (M, d), kjer je M neprazna množica, preslikava $d : M \times M \to \mathbb{R}$ pa ima spodnje štiri lastnosti:

(i) $d(x, y) \geq 0$ za vse $x, y \in M$;

(ii) $d(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko velja $x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ za vse $x, y \in M$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ za vse $x, y, z \in M$.

Preslikavi d pravimo *metrika.*

Naj bo $x \in X$ in $r > 0$. Množici

$$K(x,r) := \{y \in M : d(x,y) < r\}$$

pravimo *odprta krogla* s središčem v x in radijem r. Če družino τ sestavljajo vse unije odprtih krogel v prostoru M, potem je (M,τ) topološki prostor. Iz same definicije družine τ sledi, da je $K(x,r)$ odprta množica. Izkaže se, da velja

$$\overline{K(x,r)} = \{y \in M : d(x,y) \leq r\}.$$

Slednje je *zaprta krogla* s središčem v x in radijem r. V kolikor je M metričen prostor in je $A \subseteq M$ njegova podmnožica, tedaj velja

$$\overline{A} = \{\text{limite zaporedij iz } A, \text{ ki so konvergentna v } M\}.$$

Trditev 0.3. *Naj bo (M,d) metričen prostor in $x_0 \in M$. Tedaj je preslikava $M \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $x \mapsto d(x,x_0)$, zvezna.*

Trditev 0.4. *Naj bo X topološki prostor in $K \subseteq X$ njegova kompaktna podmnožica. Če množico realnih števil opremimo z (običajno) metriko $d(x,y) = |x-y|$, potem za vsako zvezno preslikavo $f : X \to \mathbb{R}$ obstajata taka $x_m, x_M \in K$, da velja*

$$f(x_m) = \min_{x\in K} f(x) \qquad \textit{in} \qquad f(x_M) = \max_{x\in K} f(x).$$

Trditev 0.5. *Naj bo (M,d) metričen prostor in $K \subseteq M$ njegova kompaktna podmnožica. Tedaj je množica K zaprta.*

Trditev 0.6. *Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$ in naj bo množica $\mathbb{F}^n$ opremljena z (običajno) metriko*

$$d\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

Tedaj je množica $K \subseteq \mathbb{F}^n$ kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.

POGLAVJE 1

Linearni topološki prostori

Naj bo X hkrati vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ in topološki prostor. Pravimo, da je X *linearen topološki prostor (LTP)*, če sta preslikavi seštevanja

$$\begin{aligned} X \times X &\to X \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 + x_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

in množenja s skalarjem

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned} \tag{1.2}$$

zvezni. Pri tem je množica $\mathbb{F}$ opremljena z običajno topologijo/metriko, množici $X \times X$ in $\mathbb{F} \times X$ pa sta opremljeni s produktno topologijo.

Opomba. Zveznost preslikave (1.1) je ekivalentna sledečemu: Za poljubni točki $x_1, x_2 \in X$ in za poljubno okolico V točke $x_1 + x_2$ obstajata taki okolici U_1 točke x_1 in U_2 točke x_2, da velja

$$x_1' + x_2' \in V$$

za vse $x_1' \in U_1$ in $x_2' \in U_2$.

Podobno je zveznost preslikave (1.2) ekivalentna sledečemu: Za poljubni točki $\lambda \in \mathbb{F}$ in $x \in X$ ter za poljubno okolico V točke λx obstajata taki okolici Λ točke λ in U točke x, da velja

$$\lambda' x' \in V$$

za vse $\lambda' \in \Lambda$ in $x' \in U$.

Trditev 1.1. *Naj bo X linearen topološki prostor in naj bo $0 \neq \lambda_0 \in \mathbb{F}$. Tedaj je preslikava $x \mapsto \lambda_0 x$ homeomorfizem prostora X.*

Trditev 1.2. *Naj bo X linearen topološki prostor in naj bo $y_0 \in X$. Tedaj je preslikava $x \mapsto x + y_0$ homeomorfizem prostora X.*

Trditev 1.3. *Naj bo X linearen topološki prostor in naj bo $a \in X$.*

(i) Če je U okolica ničle, potem je $a+U := \{a+u : u \in U\}$ okolica točke a.

(ii) Če je V okolica točke a, potem obstaja taka okolica ničle U, da velja $V = a + U$.

Trditev 1.4. *Naj bo Y vektorski podprostor v linearnem topološkem prostoru X. Tedaj je tudi $\overline{Y}$ vektorski podprostor v X.*

Naj bosta X in Y vektorska prostora nad obsegom $\mathbb{F}$. Preslikava $T : X \to Y$ je *linearna*, če velja

- $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$ za vse $x_1, x_2 \in X$;
- $T(\lambda x) = \lambda Tx$ za vse $\lambda \in \mathbb{F}$ in vse $x \in X$,

oz ekvivalentno, če velja $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2$ za vse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ in vse $x_1, x_2 \in X$.

Trditev 1.5. *Naj bo $T : X \to Y$ linearna preslikava med linearnima topološkima prostoroma X in Y. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) Preslikava T je zvezna;

(ii) Preslikava T je zvezna v točki $0 \in X$;

(iii) Preslikava T je zvezna v neki točki $x_0 \in X$.

Naj bosta X in Y linearna topološka prostora. Množico vseh linearnih preslikav iz X v Y bomo označili z $\mathcal{L}(X, Y)$. Množico vseh zveznih linearnih preslikav iz X v Y bomo označili z $B(X, Y)$. Množica $\mathcal{L}(X, Y)$ tvori vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F}$. Pri tem sta operaciji seštevanja preslikav ter množenja skalarja in preslikave običajni (definirani sta po točkah). Množica $B(X, Y)$ tvori vektorski podprostor v $\mathcal{L}(X, Y)$.

Preslikavam v prostoru $\mathcal{L}(X, \mathbb{F})$ pravimo linearni *funkcionali.* Vektorskem podprostoru $X^* := B(X, \mathbb{F})$, ki je sestavljen iz vseh zveznih linearnih funkcionalov na X, pravimo *dualni prostor* prostora X.

POGLAVJE 2

Normirani in Banachovi prostori

Naj bo X vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Preslikava $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ je *norma* na X, če zadošča spodnjim štirim lastnostim:

(i) $\|x\| \geq 0$ za vse $x \in X$;

(ii) Če je $\|x\| = 0$, potem velja $x = 0$;

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ za vse $\lambda \in \mathbb{F}$ in vse $x \in X$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za vse $x, y \in X$.

Paru $(X, \|.\|)$ pravimo *normiran prostor*. Vsak normiran prostor porodi metričen prostor (X, d), kjer je metrika d podana s predpisom

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{2.1}$$

Trditev 2.1. *Norma je zvezna preslikava.*

Trditev 2.2. *Normiran prostor je linearen topološki prostor.*

Zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ v metričnem prostoru (X, d) je *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za vse $m, n \geq n_0$. Vsako Cauchyjevo zaporedje je konvergentno, obratno pa ni nujno res.

Metričen prostor X je *poln*, če je vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno (z limito v prostoru X). Normiran prostor $(X, \|.\|)$ je *Banachov prostor*, če je poln glede na metriko (2.1).

Trditev 2.3. *Naj bo X Banachov prostor in Y njegov vektorski podprostor. Potem je podprostor Y zaprt natanko tedaj, ko je Banachov prostor.*

Naj bo X topološki prostor in $C_b(X)$ množica vseh omejenih zveznih funkcij iz prostora X v obseg $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ (ki je opremljen z običajno topologijo/metriko). Preslikavo $\|.\|_\infty : C_b(X) \to \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

imenujemo *supremum norma.*

Trditev 2.4. *Množica $C_b(X)$ skupaj z operacijama*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) : &= f(x) + g(x) \qquad (x \in X), \\ (\lambda f)(x) : &= \lambda f(x) \qquad (x \in X) \end{aligned}$$

in supremum normo tvori Banachov prostor.

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{K}\}$. Tj. množica $\mathcal{A}$ je opremljena s seštevanjem $+$ in z množenjem s skalarjem, tako da tvori vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, poleg tega pa je na $\mathcal{A}$ definirano množenje $\cdot$ na tak način, da je $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ kolobar in velja

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

za vse $x, y \in \mathcal{A}$ in vsak $\lambda \in \mathbb{F}$. Če je algebra $\mathcal{A}$ tudi normiran prostor, pri čemer velja

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

za vse $x, y \in \mathcal{A}$, potem pravimo, da je $\mathcal{A}$ *normirana algebra.* Elementu $e \in \mathcal{A}$ pravimo *enota*, če velja $ex = x = xe$ za vse $x \in \mathcal{A}$. Normirana algebra je *Banachova algebra*, če je polna[1].

Trditev 2.5. *Množica $C_b(X)$ skupaj z operacijami*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) : &= f(x) + g(x) \qquad (x \in X), \\ (\lambda f)(x) : &= \lambda f(x) \qquad (x \in X), \\ (fg)(x) : &= f(x)g(x) \qquad (x \in X), \end{aligned}$$

in supremum normo tvori komutativno Banachovo algebro. Pri tem je konstantna funkcija 1 njena enota.

[1] V nekateri literaturi je v definiciji Banachove algebre privzeto, da le-ta ima enoto e. Pogosto je tudi privzeto, da velja $\|e\| = 1$.

Trditev 2.6. *V normirani algebri je množenje zvezna preslikava.*

Naj bo X normiran prostor in $x_1, x_2 \ldots \in X$ zaporedje v njem. Pravimo, da vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *konvergira*, če zaporedje $s_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$ delnih vsot konvergira (v prostoru X). Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ je *absolutno konvergentna*, če velja $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$.

Izrek 2.7. *Naj bo X normiran prostor. Potem je X Banachov prostor natanko tedaj, ko je vsaka absolutno konvergentna vrsta v X tudi konvergentna.*

POGLAVJE 3

Omejeni operatorji

Naj bosta X in Y normirana prostora. Linearnim preslikavam v množici $\mathcal{L}(X, Y)$ pravimo tudi *linearni operatorji.* Linearen operator $A : X \to Y$ je *omejen*, če obstaja tako nenegativno realno število M, da velja $\|Ax\| \leq M\|x\|$ za vse $x \in X$. Taki najmanjši konstanti M pravimo *operatorska norma* operatorja A in jo označimo z $\|A\|$, tj.

$$\|A\| := \inf\{M : \|Ax\| \leq M\|x\| \text{ za vse } x \in X\}.$$

Za operatorsko normo tako velja tudi

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

za vse $x \in X$.

Trditev 3.1. *Naj bosta X in Y normirana prostora. Za linearen operator $A : X \to Y$ velja*

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|. \tag{3.1}$$

Opomba. V kolikor operator A v Trditvi 3.1 ni omejen, potem so vsi supremumi v (3.1) enaki ∞.

Izrek 3.2. *Naj bosta X in Y normirana prostora. Linearen operator $A : X \to Y$ je zvezen natanko tedaj, ko je omejen.*

Izrek 3.2 torej pove, da je vektorski prostor $B(X,Y)$ sestavljen iz vseh omejenih linearnih operatorjev, ki slikajo iz X v Y.

Trditev 3.3. *Naj bosta X in Y normirana prostora. Potem je vektorski prostor $B(X,Y)$ skupaj z operatorsko normo normiran prostor.*

Opomba. Iz trditve 3.3 sledi, da je tudi dualen prostor $X^* = B(X,\mathbb{F})$ normiran prostor za operatorsko normo.

Trditev 3.4. *Naj bodo X,Y,Z normirani prostori. Naj bo $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$ ter $ST := S \circ T$ njun kompozitum. Tedaj velja $ST \in B(X,Z)$ in $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.*

Posledica 3.5. *Naj bo X normiran prostor. Tedaj je $B(X) := B(X,X)$ normirana algebra, ki ima za enoto identični operator I. Velja $\|I\| = 1$.*

Naj bo X topološki prostor. Pravimo, da je podmnožica $A \subseteq X$ *gosta* v X, če za vsak $x \in X$ in za vsako okolico U točke x v prostoru X obstaja tak $a \in A$, da velja $a \in U$.

Ekvivalentno, podmnožica $A \subseteq X$ je *gosta* v X, če velja $\overline{A} = X$.

Izrek 3.6. *Naj bo X normiran prostor, Y Banachov prostor, Z gost vektorski podprostor v X in $A : Z \to Y$ omejen linearen operator. Tedaj lahko operator A razširimo na en sam način do omejenega linearnega operatorja $\widetilde{A} : X \to Y$. Pri tem velja $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.*

Izrek 3.7. *Naj bo X normiran prostor in Y Banachov prostor. Tedaj je $B(X,Y)$ Banachov prostor.*

Posledica 3.8. *Naj bo X normiran prostor. Tedaj je X^* Banachov prostor.*

Posledica 3.9. *Naj bo X Banachov prostor. Tedaj je $B(X)$ Banachova algebra.*

Naj bosta X in Y normirana prostora in naj bo $T : X \to Y$ linearna preslikava. Če velja

$$\|Tx\| \leq \|x\|$$

za vse $x \in X$, tedaj pravimo, da je preslikava T *skrčitev* ali *kontrakcija.* Če velja

$$\|Tx\| = \|x\|$$

za vse $x \in X$, potem pravimo, da je T *izometrija.* Linerna izometrija je vedno injektivna in zvezna, tj. omejena, saj je njena norma enaka 1. Linearni bijektivni izometriji $T : X \to Y$ pravimo tudi *izometrični izomorfizem* med prostoroma X in Y. V kolikor obstaja kakšen izometrični izomorfizem med X in Y, potem pravimo, da sta prostora X in Y *izometrično izomorfzna.*

Naj bo X vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ in naj bo Y njegov vektorski podprostor. Tedaj tvori množica

$$X/Y := \{x + Y : x \in X\}$$

skupaj z operacijami

$$\begin{aligned} (x_1 + Y) + (x_2 + Y) &:= (x_1 + x_2) + Y \qquad (x_1, x_2 \in X), \\ \lambda \cdot (x + Y) &:= \lambda x + Y \qquad (x \in X, \lambda \in \mathbb{F}) \end{aligned}$$

vektorski prostor.

Izrek 3.10. *Naj bo X normiran prostor in Y njegov zaprt vektorski podprostor.*

(i) S predpisom

$$\|x + Y\| := \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \tag{3.2}$$

je podana norma na vektorskem prostoru X/Y. Preslikava

$$q : X \to X/Y,$$

ki je podana s predpisom $q(x) = x + Y$, je linearna zvezna odprta kontrakcija. Množica $U \subseteq X/Y$ je odprta v normiranem prostoru X/Y natanko tedaj, ko je $q^{-1}(U)$ odprta množica v X.

(ii) Če je X Banachov prostor, potem je za normo (3.2) *Banachov tudi prostor X/Y.*

Opomba. Topologijo na prostoru X/Y, ki je opisana v točki (i) izreka 3.10, imenujemo *kvocientna topologija.*

Pred nadaljevanjem si poglejmo še nekaj lastnosti končno razsežnih normiranih prostorov. Če je X vektorski prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, potem sta normi $\|.\|_a$ in $\|.\|_b$ na X *ekvivalentni*, če obstajata taki konstanti $c, d > 0$, da velja

$$c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq d\|x\|_a$$

za vse $x \in X$. V tem primeru je množica $U \subseteq X$ odprta v $(X, \|.\|_a)$ natanko tedaj, ko je odprta v $(X, \|.\|_b)$, tj. pripadajoči topologiji sta med sabo enaki.

Trditev 3.11. *Vse norme na $\mathbb{F}^n$ so med sabo ekvivalentne.*

Kot posledico trditev 0.6 in 3.11 dobimo naslednji rezultat.

Posledica 3.12. *Naj bo* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ *in naj bo* $\|.\|$ *poljubna norma na* $\mathbb{F}^n$. *Podmnožica* K *v normiranem prostoru* $(\mathbb{F}^n, \|.\|)$ *je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.*

Izrek 3.13. *Naj bo* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ *in naj bo vektorski prostor* $\mathbb{F}^n$ *opremljen s poljubno normo. Naj bo* X *končno razsežen normiran prostor nad obsegom* $\mathbb{F}$ *z bazo* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. *Tedaj je preslikava* $T : X \to \mathbb{F}^n$, *ki je podana s predpisom*

$$T(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

za vse $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, *linearen homeomorfizem med prostoroma* X *in* $\mathbb{F}^n$.

Posledica 3.14. *Vsak končno razsežen normiran prostor je Banachov prostor.*

Posledica 3.15. *Naj bo* X *končno razsežen normiran prostor nad obsegom* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ *in naj bo* Y *poljuben linearen topološki prostor nad obsegom* $\mathbb{F}$. *Tedaj je vsaka linearna preslikava iz* X *v* Y *zvezna.*

POGLAVJE 4

Nekaj pomembnih izrekov

4.1 Hahn-Banachov izrek

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Preslikava $p : X \to \mathbb{R}$ je *sublinearna*, če ima sledeči lastnosti:

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ za vse $x, y \in X$;

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ za vse $\lambda \geq 0$ in vse $x \in X$.

Izrek 4.1 (Realna verzija Hahn-Banachovega izreka)**.** *Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ sublinearna preslikava, Y vektorski podprostor v X in $f : Y \to \mathbb{R}$ linearen funkcional, za katerega velja*

$$f(y) \leq p(y)$$

za vse $y \in Y$. Tedaj obstaja linearen funkcional $F : X \to \mathbb{R}$, za katerega velja

$$F(y) = f(y)$$

za vse $y \in Y$ in

$$F(x) \leq p(x)$$

za vse $x \in X$.

Naj bo X vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Preslikava $p : X \to [0, \infty)$ je *polnorma*, če ima sledeči lastnosti:

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ za vse $x, y \in X$;

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ za vse $\lambda \in \mathbb{F}$ in vse $x \in X$.

Opomba. Polnorma ima vse lastnosti norme, z edino izjemo, da iz $p(x) = 0$ ne sledi nujno $x = 0$. Vsaka polnorma je tudi sublinearna preslikava. Če je preslikava p v izreku 4.3 polnorma, potem lahko zaključimo, da velja $|F(x)| \leq p(x)$ za vse $x \in X$.

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ in naj bo $f : X \to \mathbb{C}$ kompleksen linearen funkcional. Preslikavi $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ z lastnostjo, da velja

$$f(x) = (\operatorname{Re} f)(x) + i(\operatorname{Im} f)(x)$$

za vse $x \in X$, sta realna linearna funkcionala.

Trditev 4.2. *Naj bo X kompleksen vektorski prostor.*

(i) Realen linearen funkcional $\operatorname{Re} f$ enolično določa kompleksen linearen funkcional f.

(ii) Naj bo $g : X \to \mathbb{R}$ realen linearen funkcional. Potem je enolično določen kompleksen linearen funkcional $F : X \to \mathbb{C}$, za katerega velja $\operatorname{Re} F = g$, podan s predpisom

$$F(x) = g(x) - ig(ix) \qquad (x \in X).$$

Izrek 4.3 (Kompleksna verzija Hahn-Banachovega izreka)**.** *Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, $p : X \to [0, \infty)$ polnorma, Y vektorski podprostor v X in $f : Y \to \mathbb{C}$ linearen funkcional, za katerega velja*

$$|f(y)| \leq p(y)$$

za vse $y \in Y$. Tedaj obstaja linearen funkcional $F : X \to \mathbb{C}$, za katerega velja

$$F(y) = f(y)$$

za vse $y \in Y$ in

$$|F(x)| \leq p(x)$$

za vse $x \in X$.

Posledica 4.4. *Naj bo X normiran prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, Y njegov vektorski podprostor in $f : Y \to \mathbb{F}$ omejen linearen funkcional. Tedaj obstaja omejen linearen funkcional $F : X \to \mathbb{F}$, za katerega velja*

$$F(y) = f(y)$$

za vse $y \in Y$ in $\|F\| = \|f\|$.

Opomba. V literaturi se s 'Hahn-Banachovim izrekom' pogosto misli kar na posledico 4.4.

Posledica 4.5. *Naj bo X normiran prostor in $0 \neq x_0 \in X$. Tedaj obstaja tak $f \in X^*$, da velja $\|f\| = 1$ in $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Če je X normiran prostor, potem iz posledice 3.8 sledi, da je $X^{**} := (X^*)^*$ Banachov prostor. Pravimo mu *drugi dual* prostora X. Za vsak $x \in X$ lahko definiramo $F_x \in X^{**}$ s predpisom

$$F_x(f) := f(x)$$

za vse $f \in X^*$. Pri tem velja $\|F_x\| = \|x\|$ za vse $x \in X$. Preslikava $X \to X^{**}$, ki je podana s predpisom

$$x \mapsto F_x, \tag{4.1}$$

je zato linearna izometrična vložitev prostora X v prostor X^{**}. Preko identifikacije prostora X s sliko preslikave (4.1) lahko razumemo X kot podprostor v X^{**}. Če sta prostora X in X^{**} preko te identifikacije enaka, t.j., če je preslikava (4.1) surjektivna, potem pravimo, da je prostor X *refleksiven.* V tem primeru sta, formalno gledano, prostora X in X^{**} izometrično izomorfna. Refleksivni so vsi končno razsežni normirani prostori. Namreč, če je $\dim X < \infty$, tedaj ni težko videti, da velja $\dim X^* = \dim X$ in zato tudi $\dim X^{**} = \dim X^* = \dim X$. Ker lahko X razumemo kot podprostor v prostoru X^{**}, ki je enake dimenzije kot X, lahko sklepamo, da je X refleksiven.

4.2 Izrek o separaciji konveksnih množic

Naj bo X vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Pravimo, da je množica $L \subseteq X$ *konveksna*, če velja $(1-\lambda)x + \lambda y \in L$ za vse $x, y \in L$ in vse $\lambda \in [0,1]$.

Trditev 4.6. *Naj bo X linearen topološki prostor in naj bo $L \subseteq X$ njegova konveksna podmnožica. Tedaj je zaprtje $\overline{L}$ tudi konveksna množica.*

Ni se težko prepričati, da je presek poljubne družine konveksnih množic spet konveksna množica.

Naj bo $M \subseteq X$ podmnožica vektorskega prostora X. Množico

$$\mathrm{co}(M) = \cap\{L \subseteq X : M \subseteq L, L \text{ je konveksna}\},$$

tj. najmanjšo konveksno množico, ki vsebuje M, imenujemo *konveksna ogrinjača* množice M. Očitno je $M \subseteq \mathrm{co}(M)$. Množica M je konveksna natanko tedaj, ko velja $\mathrm{co}(M) = M$.

Konveksna kombinacija vektorjev $x_1, \ldots, x_n \in X$ je vektor oblike

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

pri čemer realna števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ zadoščajo enakosti $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Trditev 4.7. *Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ in M njegova podmnožica. Tedaj velja*

$$co(M) = \{\textit{konveksne kombinacije vektorjev iz množice } M\}.$$

Lema 4.8. *Naj bo X realen normiran prostor in $L \subseteq X$ neprazna konveksna podmnožica. Tedaj obstaja tak omejen linearen funkcional $f : X \to \mathbb{R}$, da velja*

$$\inf_{y \in L} \|y\| = \inf_{y \in L} f(y)$$

ter $\|f\| \leq 1$.

Izrek 4.9 (Izrek o separaciji konveksnih množic)**.** *Naj bo X realen normiran prostor in $A, B \subseteq X$ neprazni konveksni podmnožici. Naj bo*

$$d(A, B) := \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} > 0.$$

Tedaj obstaja $f \in X^*$, ki strogo loči množici A in B. To pomeni, da obstajata taki realni števili c, c', da velja

$$f(B) \leq c < c' \leq f(A).$$

Opomba. Oznaka $f(B) \leq c$ v izreku 4.9 pomeni, da velja $f(b) \leq c$ za vsak $b \in B$. Podobno $c' \leq f(A)$ pomeni, da velja $c' \leq f(a)$ za vsak $a \in A$.

Posledica 4.10. *Naj bo X normiran prostor nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, Y njegov zaprt vektorski podprostor in $x_0 \in X \backslash Y$. Tedaj obstaja tak $f \in X^*$, da velja $f(y) = 0$ za vsak $y \in Y$ ter $f(x_0) \neq 0$.*

4.3 Baireov izrek

Naj bo (X, d) metričen prostor. Pravimo, da je podmnožica $B \subseteq X$ *nikjer gosta* v X, če njeno zaprtje $\overline{B}$ nima notranjih točk.

Lema 4.11. *Naj bo (X, d) metričen prostor in $B \subseteq X$.*

(i) Tedaj je B nikjer gosta v X natanko tedaj, ko $\overline{B}$ ne vsebuje kakšne odprte krogle.

(ii) *Če je B zaprta množica, potem je B nikjer gosta v X natanko tedaj, ko velja $K \cap B^c \neq \emptyset$ za vsako odprto kroglo K.*

Lema 4.12. *Naj bo (X,d) poln metričen prostor in $(\overline{K}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje zaprtih krogel v X, ki so oblike $\overline{K}_i := \overline{K(x_i, \varepsilon_i)}$, in za katere velja*

$$\overline{K}_1 \supseteq \overline{K}_2 \supseteq \cdots$$

ter $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$. Tedaj ima množica $\cap_{i=1}^{\infty} \overline{K}_i$ natanko en element.

Izrek 4.13 (Baireov izrek)**.** *Naj bo (X,d) poln metričen prostor in $A_1, A_2, \ldots$ zaporedje zaprtih podmnožic v X. Če unija $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ vsebuje kakšno odprto kroglo, potem obstaja tak $i \in \mathbb{N}$, da množica A_i vsebuje kakšno odprto kroglo.*

Opomba. S pomočjo leme 4.11 lahko Bairov izrek povemo tudi na sledeč način: V polnem metričnem prostoru števna unija nikjer gostih zaprtih množic nima notranje točke.

4.4 Izrek o odprti preslikavi

Izrek 4.14 (Izrek o odprti preslikavi)**.** *Naj bosta X in Y Banachova prostora in naj bo $T : X \to Y$ linearna zvezna surjekcija. Tedaj je T odprta preslikava.*

Posledica 4.15. *Naj bosta X in Y Banachova prostora in naj bo $T : X \to Y$ linearna zvezna bijekcija. Tedaj je T linearen homeomorfizem med prostoroma X in Y.*

4.5 Princip enakomerne omejenosti

Izrek 4.16 (Princip enakomerne omejenosti)**.** *Naj bo X Banachov prostor in Y normiran prostor. Naj bo $\mathcal{A} \subseteq B(X,Y)$ taka družina operatorjev, da je za vsak $x \in X$ množica $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ omejena. Potem obstaja taka konstanta $M \in \mathbb{R}$, da velja $\|T\| \leq M$ za vse $T \in \mathcal{A}$.*

Za podmnožico A v normiranem prostoru X pravimo, da je *šibko omejena*, če je za vsak funkcional $f \in X^*$ množica $f(A)$ omejena. Seveda je vsaka omejena množica A tudi šibko omejena. Posledica 4.17 pove, da velja tudi obratno.

Posledica 4.17. *Naj bo X normiran prostor in A njegova podmnožica. Če je A šibko omejena, potem je tudi omejena.*

Posledica 4.18. *Naj bo X Banachov prostor, Y normiran prostor in $\mathcal{A} \subseteq B(X,Y)$. Naj za vsak $f \in Y^*$ in vsak $x \in X$ obstaja taka konstanta k (ki je odvisna od f in x), da velja $|f(Tx)| \leq k$ za vse $T \in \mathcal{A}$. Potem obstaja taka konstanta $M \in \mathbb{R}$, da velja $\|T\| \leq M$ za vse $T \in \mathcal{A}$.*

4.6 Izrek o zaprtem grafu

Naj bo $f : X \to Y$ preslikava med dvema množicama. Množici

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

pravimo *graf* preslikave f. Če sta $(X, \|.\|_X)$ in $(Y, \|.\|_Y)$ Banachova prostora, potem je prostor $X \times Y$, ki je opremljen z normo

$$\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y, \tag{4.2}$$

Banachov, kar lahko preverimo s pomočjo izreka 2.7. Topologija na $X \times Y$, ki jo inducira norma (4.2), je enaka produktni topologiji.

Izrek 4.19 (Izrek o zaprtem grafu)**.** *Naj bosta X in Y Banachova prostora in naj bo $T : X \to Y$ linearna preslikava. Tedaj je $T \in B(X, Y)$ natanko tedaj, ko je graf $\Gamma(T)$ zaprt v $X \times Y$ (glede na produktno topologijo).*

POGLAVJE 5

Prostori s skalarnim produktom in Hilbertovi prostori

Naj bo X vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Preslikavi $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ pravimo skalarni produkt, če ima naslednje lastnosti:

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ za vse $x \in X$;

(ii) Če je $\langle x, x\rangle = 0$, potem velja $x = 0$;

(iii) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$ za vse $x, x', y \in X$;

(iv) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ za vse $\lambda \in \mathbb{F}$ in vse $x, y \in X$;

(v) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$ za vse $x, y \in X$.

Trditev 5.1. *Skalaren produkt je konjugirano linearen v drugem faktorju, tj.*

$$\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle \qquad (x, y, y' \in X),$$
$$\langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle \qquad (\lambda \in \mathbb{F}, x, y \in X).$$

Trditev 5.2. *Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom. Tedaj je s predpisom*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{5.1}$$

podana norma na X, za katero velja

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{5.2}$$

in

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{5.3}$$

za vse $x, y \in X$.

Neenakosti (5.2) pravimo *CBS neenakost* (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz), (5.3) pa je *paralelogramska enakost.*

Trditev 5.3. *Skalarni produkt je zvezna preslikava.*

Če je vektorski prostor s skalarnim produktom poln v normi (5.1), potem mu pravimo *Hilbertov prostor.*

Lema 5.4. *Naj bo X prostor s skalarnim produktom in naj bo $x \in X$. Če velja $\langle x, y\rangle = 0$ za vsak $y \in X$, tedaj je $x = 0$.*

Izrek 5.5 (Rieszov izrek)**.** *Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in $f \in \mathcal{H}^*$. Potem obstaja natanko en tak $y \in \mathcal{H}$, da velja*

$$f(x) = \langle x, y\rangle$$

za vse $x \in \mathcal{H}$. Poleg tega velja $\|f\| = \|y\|$.

Posledica 5.6. *Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Preslikava $\mathcal{J} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$, ki je podana s predpisom $y \mapsto \langle\ , y\rangle$, je bijektivna konjugirano linearna izometrija.*

Če sta $f, g \in \mathcal{H}^*$, potem iz Rieszovega izreka sledi obstoj natanko določenih $x_f, x_g \in \mathcal{H}$, za katera velja $f(x) = \langle x, x_f\rangle$ in $g(x) = \langle x, x_g\rangle$ za vse $x \in \mathcal{H}$. S predpisom

$$\langle f, g\rangle_* := \langle x_g, x_f\rangle$$

je podan skalaren produkt na $\mathcal{H}^*$, v katerem je prostor $\mathcal{H}^*$ poln in zato Hilbertov. S pomočjo Rieszovega izreka vidimo tudi, da je vsak Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ refleksiven.

Če je X prostor s skalarnim produktom, potem bomo za vektorja $x, y \in X$ enakost $\langle x, y\rangle = 0$ zapisali tudi kot

$$x \perp y,$$

kar pomeni, da sta vektorja x in y pravokotna oz. ortogonalna. Podobno za množici $A, B \subseteq X$ pišemo

$$A \perp B$$

natanko tedaj, ko velja $a \perp b$ za vsak $a \in A$ in za vsak $b \in B$. Definiramo še množico

$$A^\perp := \{x \in X : \{x\} \perp A\} = \{x \in X : \langle x, a\rangle = 0 \text{ za vse } a \in A\}.$$

Trditev 5.7. *Naj bo X prostor s skalarnim produktom in A njegova podmnožica. Tedaj je $A^\perp$ zaprt vektorski podprostor.*

Za množico $A \subseteq X$ naj bo $\operatorname{Lin} A$ njena *linearna ogrinjača*, tj.

$$\operatorname{Lin} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F} \right\}.$$

Trditev 5.8. *Naj bosta A in B podmnožici prostora X s skalarnim produktom. Tedaj velja:*

(i) *če je $A \subseteq B$, potem velja $A^\perp \supseteq B^\perp$;*

(ii) *$X^\perp = \{0\}$ in $\{0\}^\perp = X$;*

(iii) *$A^\perp = (\overline{A})^\perp = (\operatorname{Lin} A)^\perp = (\overline{\operatorname{Lin} A})^\perp$.*

Trditev 5.9 (Pitagorov izrek). *Če za vektorja $x, y \in X$ velja $x \perp y$, tedaj je $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom in Y njegov vektorski podprostor. Tedaj prostoru $Y^\perp$ pravimo *ortogonalen komplement* prostora Y. Seveda velja $Y \cap Y^\perp = \{0\}$. Če velja tudi $X = Y + Y^\perp$, tj. vsak $x \in X$ lahko zapišemo kot

$$x = x_1 + x_2, \tag{5.4}$$

kjer je $x_1 \in Y$ in $x_2 \in Y^\perp$, potem pišemo

$$X = Y \oplus Y^\perp.$$

V tem primeru je zapis (5.4) enoličen, vektorju x_1 pa pravimo *pravokotna projekcija* (oz. ortogonalna projektcija) vektorja x na podprostor Y. Ker iz Pitagorovega izreka sledi $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$, ugotovimo, da ima pravokotna projekcija vedno manjšo ali enako normo od vektorja x, tj. $\|x_1\| \leq \|x\|$.

Trditev 5.10. *Pravokotna projekcija elementa x na podprostor Y je elementu x najbližji element v prostoru Y.*

Izrek 5.11. *Naj bo Y zaprt vektorski podprostor v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Tedaj velja $\mathcal{H} = Y \oplus Y^\perp$.*

Trditev 5.12. *Naj bo Y zaprt vektorski podprostor v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Tedaj velja $Y^{\perp\perp} = Y$.*

Trditev 5.13. *Naj bo M podmnožica v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Tedaj velja $M^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Lin} M}$.*

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom. Podmnožici $\{e_s : s \in S\} \subseteq X$, kjer je S neka neprazna množica, pravimo *ortonormiran sistem* (ONS) prostora X, če velja

$$\langle e_s, e_t \rangle = \begin{cases} 1, \text{ če je } s = t, \\ 0, \text{ če je } s \neq t \end{cases}$$

za vse $s, t \in S$. Vektorji v ONS so torej med sabo pravokotni in dolžine 1. Posledično so tudi linearno neodvisni.

Trditev 5.14. *Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ njegov ONS in $Y = \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Tedaj velja $X = Y \oplus Y^\perp$. Pravokotna projekcija elementa x na podprostor Y je enaka $\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.*

Izrek 5.15. *Naj bo $x_1, x_2, \ldots$ zaporedje linearno neodvisnih vektorjev v prostoru X s skalarnim produktom. Potem v X obstaja tak ONS $\{e_1, e_2, \ldots\}$, da velja*

$$\mathrm{Lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Opomba. Kontrukciji ONS iz izreka 5.15 pravimo Gram-Schimdtova ortogonalizacija/ortonormalizacija.

Trditev 5.16. *Naj bo $\{e_1, e_2, \ldots\}$ števen ONS v prostoru X s skalarnim produktom. Potem za vsak $x \in X$ vrsta $\sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2$ konvergira in velja*

$$\sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Na množici

$$l^2 := \left\{ (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{F}, \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty \right\}$$

lahko definiramo skalarni produkt s predpisom

$$\langle (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \rangle := \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}.$$

V njem je l^2 Hilbertov prostor.

Izrek 5.17. *Naj bo $\{e_1, e_2, \ldots\}$ števen ONS v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ in naj bo $(c_1, c_2, \ldots) \in l^2$. Potem vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ konvergira in njena vsota je v prostoru $\overline{\mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots\}}$. Za vsak $z \in \mathcal{H}$ velja*

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, z \Big\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle e_i, z\rangle.$$

Za vsak $(d_1, d_2, \ldots) \in l^2$ velja

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, \sum_{i=1}^{\infty} d_i e_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \overline{d_i}.$$

Opomba. Če v izreku 5.17 vstavimo $(d_1, d_2, \ldots) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, kjer se 1 pojavi na j-ti poziciji, potem dobimo enakost

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, e_j \Big\rangle = c_j.$$

Če v izreku 5.17 vstavimo $(d_1, d_2, \ldots) = (c_1, c_2, \ldots)$, potem dobimo enakost

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2.$$

Posledica 5.18. *Naj bo $\{e_1, e_2, \ldots\}$ števen ONS v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ vrsta*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i \tag{5.5}$$

konvergira. Njena vsota je enaka pravokotni projekciji elementa x na vektorski podprostor $\overline{\mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots\}}$.

Vrsti (5.5) pravimo *Fourierova vrsta* elementa $x \in \mathcal{H}$ glede na ONS $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Če velja $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ za neka števila $c_i \in \mathbb{F}$, potem pravimo, da smo x razvili po sistemu $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Ker je $c_i = \langle x, e_i\rangle$, je x mogoče razviti po danem ONS na kvečjemu en način.

Števen (ali končen) ONS $\{e_1, e_2, \ldots\}$ v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ je *kompleten*, če lahko vsak $x \in \mathcal{H}$ razvijemo po njem. Kompletnemu ONS pravimo tudi *ortonormirana baza* ali na kratko KONS. Pri tem je potrebno povdariti, da ortonormirana baza v tem smislu ni nujno baza vektorskega prostora $\mathcal{H}$.

Izrek 5.19. *Naj bo $\{e_1, e_2, \ldots\}$ števen ali končen ONS v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Tedaj so ekvivalentne trditve:*

(i) $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *je KONS;*

(ii) *za vsaka* $x, y \in \mathcal{H}$ *velja* $\langle x, y\rangle = \sum_i \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$*;*

(iii) *za vsak* $x \in \mathcal{H}$ *velja* $\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, e_i\rangle|^2$ *(Parsevalova enakost);*

(iv) $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *ni vsebovan v strogo večjem ONS v* $\mathcal{H}$*;*

(v) *edini vektor, ki je pravoten na vse vektorje* e_i*, je ničelni vektor;*

(vi) $\overline{\mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots\}} = \mathcal{H}$.

Topološki prostor je *separabilen*, če vsebuje kakšno števno (ali končno) gosto množico.

Izrek 5.20. *V vsakem separabilnem Hilbertovem prostoru* $\mathcal{H}$ *obstaja števen ali končen KONS.*

Posledica 5.21. *Vsak neskončno razsežen separabilen Hilbertov prostor je izometrično izomorfen prostoru* l^2*.*

Trditev 5.22. *Če ima Hilbertov prostor* $\mathcal{H}$ *števen KONS, potem je separabilen.*

Trditev 5.23. *V separabilnem Hilbertovem prostoru je vsak ONS števen ali končen.*

Posledica 5.24. *V separabilnem Hilbertovem prostoru imajo vsi KONSi isto kardinalnost. Če je prostor neskončno razsežen, imajo vsi KONSi enako kardinalnost, kot jo ima množica* $\mathbb{N}$*.*

Opomba. V tem tekstu smo KONS definirali kot posebno vrsto števnega ali končnega ONS. Definicijo je moč posplošiti tudi za nešteven KONS (kot posebno vrsto neštevnega ONS), a te definicije tukaj ne bomo potrebovali.

POGLAVJE 6

Adjungirani operator

V tem poglavju sta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ Hilbertova prostora. Za vsak $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ in vsak $y \in \mathcal{K}$ je s predpisom $f(x) = \langle Ax, y\rangle$ podan zvezen linearen funkcional na $\mathcal{H}$. Po Rieszovem izreku obstaja natanko en tak $y^* \in \mathcal{H}$, da velja $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ za vsak $x \in \mathcal{H}$. Preslikavo $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$, ki je podana s predpisom $y \mapsto y^*$, označimo z A^*. Ni težko videti, da je linearna. Imenujemo jo *adjungirani operator* operatorja A. Zadošča enakosti

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

za vse $x \in \mathcal{H}$ in vse $y \in \mathcal{K}$. Pri tem je potrebno opozoriti, da smo skalaren produkt na $\mathcal{H}$ in skalaren produkt na $\mathcal{K}$ označili enako.

Trditev 6.1. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ Hilbertova prostora in $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Tedaj je $A^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, $\|A^*\| = \|A\|$ in $A^{**} = A$.*

Trditev 6.2. *Naj bodo $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ Hilbertovi prostor. Tedaj velja:*

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$ *za vse* $A, B \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$;

(ii) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ *za vsak* $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ *in vsak* $\lambda \in \mathbb{C}$;

(iii) $(AB)^* = B^*A^*$ *za vse* $B \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ *in* $A \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$;

(iv) $I^* = I$, *kjer je* I *identični operator na* $\mathcal{H}$;

(v) $0^* = 0$, *kjer je* 0 *ničelni operator na* $\mathcal{H}$.

Trditev 6.3. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ bijektiven operator med dvema Hilbertovema prostoroma. Tedaj je $A^* \in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ bijektiven in velja $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Jedro operatorja $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ je množica $\mathrm{ker}A := \{x \in \mathcal{H} : Ax = 0\}$. *Slika* ali *imidž* operatorja A je množica $\mathrm{im}A := \{Ax : x \in \mathcal{H}\}$. Tako jedro kot slika tvorita vektorski prostor.

Izrek 6.4. *Za $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ velja*

$$kerA^* = (imA)^\perp$$

in

$$\overline{imA} = (kerA^*)^\perp.$$

Trditev 6.5. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Tedaj velja*

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2.$$

Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$, kjer je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Pravimo, da je operator A *sebiadjungiran* (ali *hermitski*), če velja $A^* = A$. Za sebiadjungiran operator tako velja $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ za vse $x, y \in \mathcal{H}$.

Če je $M \in B(\mathcal{H})$, potem so operatorji $MM^*, M^*M, M + M^*$ vsi sebiadjungirani. Enako velja za operator $\frac{M-M^*}{i}$, če je prostor $\mathcal{H}$ kompleksen.

Trditev 6.6. *Naj bo $M \in B(\mathcal{H})$, kjer je $\mathcal{H}$ kompleksen Hilbertov prostor. Tedaj obstajata taka dva sebiadjungirana operatorja U in V, da velja $M = U + iV$.*

Za operator $M \in B(\mathcal{H})$ pravimo, da je *normalen*, če velja $M^*M = MM^*$. Če je M operator iz trditve 6.6, potem je le ta normalen natanko tedaj, ko operatorja U in V komutirata, tj. $UV = VU$.

Izrek 6.7. *Naj bo $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearen operator, za katerega velja*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

za vse $x, y \in \mathcal{H}$. Potem je A zvezen in sebiadjungiran.

Trditev 6.8. *Sebiadjungirani operatorji na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ tvorijo realen vektorski podprostor v $B(\mathcal{H})$.*

Trditev 6.9. *Naj bo $A^* = A \in B(\mathcal{H})$. Tedaj velja*

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathcal{H}, \|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Trditev 6.10. *Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tak linearen operator, da velja $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ za vsak $x \in \mathcal{H}$. Tedaj je operator A sebiadjungiran.*

Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$. Pravimo, da je vektorski podprostor $Z \subseteq \mathcal{H}$ *invarianten* za A, če velja $A(Z) \subseteq Z$.

Trditev 6.11. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$ in naj bo $Z \subseteq \mathcal{H}$ invarianten podprostor za A. Tedaj je $Z^\perp$ invarianten podprostor za A^*.*

Posledica 6.12. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$ sebiadjungiran in naj bo $Z \subseteq \mathcal{H}$ invarianten podprostor za A. Tedaj je tudi $Z^\perp$ invarianten podprostor za A.*

Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$ sebiadjungiran operator. Pravimo, da je A *pozitiven*, če velja $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za vse $x \in \mathcal{H}$. Slednje označimo kot $A \geq 0$. Za $A, B \in B(\mathcal{H})$ pišemo $A \geq B$ (oz. $B \leq A$) natanko tedaj, ko velja $A - B \geq 0$.

Trditev 6.13. *Relacija $\geq$ je relacija delne urejenosti na množici $B(\mathcal{H})$.*

Izrek 6.14. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$ pozitiven operator. Tedaj obstaja natanko en tak pozitiven operator B, da velja $B^2 = A$.*

Trditev 6.15. *Za sebiadjungiran operator A velja*

$$-\|A\| \cdot I \leq A \leq \|A\| \cdot I.$$

Trditev 6.16. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$ pozitiven operator. Tedaj ima preslikava $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, ki je podana s predpisom $(x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle$, vse lastnosti skalarnega produkta, z izjemo, da iz $\langle Ax, x\rangle = 0$ ne nujno sledi $x = 0$.*

Trditev 6.17. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Tedaj sta operatorja A^*A in AA^* pozitivna.*

Če je $A \in B(\mathcal{H})$ pozitiven operator, tedaj je pozitiven tudi operator A^n za vsako naravno število n.

Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in $\mathcal{K}$ njegov zaprt vektorski podprostor. Izrek 5.11 pove, da velja $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$. Naj bo $x_1 \in \mathcal{K}$ pravokotna projekcija elementa $x \in \mathcal{H}$ na podprostor $\mathcal{K}$, tj. $x = x_1 + x_2$, kjer je $x_2 \in \mathcal{K}^\perp$. Tedaj linearnemu operatorju $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, ki je podan s predpisom $Px = x_1$, pravimo *ortogonalen projektor* na prostor $\mathcal{K}$. V tem primeru je seveda operator $I - P$ ortogonalen projektor na prostor $\mathcal{K}^\perp$.

Trditev 6.18. *Naj bo $0 \neq P \in B(\mathcal{H})$ ortogonalen projektor. Tedaj velja $\|P\| = 1$.*

Trditev 6.19. *Operator $P \in B(\mathcal{H})$ je ortogonalen projektor natanko tedaj, ko velja $P^2 = P = P^*$.*

Opomba. Ortogonalen projektor je vedno pozitiven, saj je enak operatorju $P = P^*P$.

Trditev 6.20. *Naj bosta $P_1, P_2 \in B(\mathcal{H})$ ortogonalna projektorja. Tedaj so ekvivalentne trditve:*

(i) $P_1 \leq P_2$;

(ii) $kerP_2 \subseteq kerP_1$;

(iii) $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$;

(iv) $imP_1 \subseteq imP_2$;

(v) $P_2 - P_1$ *je ortogonalen projektor.*

Za ortogonalna projektorja $P, Q \in B(\mathcal{H})$ pišemo $P \perp Q$ natanko tedaj, ko velja $PQ = 0$. To je res natanko tedaj, ko velja $\mathrm{im}P \perp \mathrm{im}Q$.

Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ Hilbertova prostora. Linearen operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ je *unitaren*, če je surjektiven in ohranja skalaren produkt, tj.

$$\langle Ux, Uy \rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Trditev 6.21. *Unitaren operator $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ je izometričen izomorfizem med prostoroma $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$.*

Trditev 6.22. *Operator $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ je unitaren natanko tedaj, ko velja $U^*U = I_{\mathcal{H}}$ in $UU^* = I_{\mathcal{K}}$, kjer sta $I_{\mathcal{H}}$ in $I_{\mathcal{K}}$ identična operatorja na $\mathcal{H}$ oz. $\mathcal{K}$.*

POGLAVJE 7

Spekter operatorja

V tem poglavju bo X označeval kompleksen Banachov prostor, $\mathcal{H}$ pa kompleksen Hilbertov prostor.

Naj bo $A \in B(X)$. Tedaj je

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\lambda I - A)^{-1}\}$$

resolventna množica operatorja A. Preslikavi $\rho(A) \to B(X)$, ki je podana s prepisom $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$, pravimo *resolventa* operatorja A. Iz izreka o odprti preslikavi sledi, da velja $(\lambda I - A)^{-1} \in B(X)$ za vsak $\lambda \in \rho(A)$. Množico

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$$

imenujemo *spekter* operatorja A. Število $\lambda \in \mathbb{C}$ je *lastna vrednost* za A, če obstaja tak neničelen $x \in X$ (imenovan *lastni vektor*), da velja $Ax = \lambda x$. V tem primeru operator $\lambda I - A$ ni injektiven, saj velja $x \in \ker(\lambda I - A)$, in zato tudi ne obstaja inverz $(\lambda I - A)^{-1}$. Drugače povedano, množica vseh lastnih vrednosti operatorja A, ki jo označimo z $\sigma_p(A)$, je vsebovana v spektru $\sigma(A)$. Če je prostor X končno razsežen, potem iz linearne algebre vemo, da velja enakost $\sigma_p(A) = \sigma(A)$. V splošnem pa imamo zgolj inkluzijo

$$\sigma_p(A) \subseteq \sigma(A).$$

Množici $\sigma_p(A)$ pravimo tudi *točkasti spekter* operatorja A.

Trditev 7.1. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$. Tedaj velja*

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)},$$

kjer je $\overline{\sigma(A)} := \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Trditev 7.2. *Lastne vrednosti sebiadjungiranega operatorja $A \in B(\mathcal{H})$ so realne.*

Trditev 7.3. *Lastni vektorji sebiadjungiranega operatorja, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so paroma ortogonalni.*

Naj bo $A \in B(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ in $\overline{\mathrm{im}(\lambda I - A)}$ zaprtje slike operatorja $\lambda I - A$. Množici

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ je injektiven, ni surjektiven, velja } \overline{\mathrm{im}(\lambda I - A)} = X\}$$

pravimo *zvezen spekter* operatorja A. Za $\lambda \in \sigma_c(A)$ je torej slika $\mathrm{im}(\lambda I - A)$ gosta v X, a ni enaka celemu prostoru X. Množici

$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ je injektiven in velja } \overline{\mathrm{im}(\lambda I - A)} \neq X\}$$

pravimo *residualen spekter* operatorja A. Za $\lambda \in \sigma_r(A)$ je torej zaprtje $\overline{\mathrm{im}(\lambda I - A)}$ pravi vektorski podprostor v X. V posebnem seveda operator $\lambda I - A$ ni surjektiven. Iz samih definicij sledi, da točkast, zvezen in residualen spekter tvorijo particijo celotnega spektra, tj. množice $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$ so paroma disjunktne in velja

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Trditev 7.4. *Naj bo $A \in B(X)$ in $\lambda \in \sigma_c(A)$. Tedaj obstaja tako zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v X, da velja*

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda I - A)x_n = 0$$

ter $\|x_n\| = 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Vektorjem x_n iz trditve 7.4 včasih pravimo aproksimativni lastni vektorji.

Trditev 7.5. *Naj bo $A \in B(\mathcal{H})$.*

(i) Če je $\lambda \in \sigma_r(A)$, potem velja $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

(ii) Če je $\lambda \in \sigma_p(A)$, potem velja $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$.

Posledica 7.6. *Če je $A \in B(\mathcal{H})$ sebiadjungiran, potem velja $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Izrek 7.7. *Če je operator $A \in B(\mathcal{H})$ sebiadjungiran, potem velja $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Vemo, da je $B(X)$ kompleksna Banachova algebra, kjer je identični operator I njena enota. Pojem spektra lahko posplošimo na poljubno kompleksno Banachovo algebro $M \neq \{0\}$ z enoto e. Za $x \in M$ je

$$\rho(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ je obrnljiv element v } M\}$$

resolventna množica elementa x. *Resolventa* elementa x je preslikava $\rho(x) \to M$, ki je podana s predpisom $\lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1}$. *Spekter* elementa x je množica $\sigma(x) = \mathbb{C} \backslash \rho(x)$.

Trditev 7.8. *Naj bo $M \neq \{0\}$ kompleksna Banachova algebra z enoto e. Če za $x \in M$ velja $\|x\| < 1$, tedaj je element $e - x$ obrnljiv in velja*

$$(e - x)^{-1} = e + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{7.1}$$

Vrsto (7.1) imenujemo *Neumannova vrsta.*

Trditev 7.9. *Naj bo $M \neq \{0\}$ kompleksna Banachova algebra z enoto e. Naj bo $x \in M$. Za $\lambda \in \rho(x)$ označimo $r_\lambda := (\lambda e - x)^{-1}$.*

(i) Resolventna množica $\rho(x)$ je odprta v $\mathbb{C}$.

(ii) Resolventa $\rho(x) \to M$, ki je podana s predpisom $\lambda \mapsto r_\lambda$, je zvezna preslikava.

(iii) Za $\lambda, \mu \in \rho(x)$ velja

$$r_\mu - r_\lambda = (\lambda - \mu) r_\lambda r_\mu$$

in

$$r_\lambda r_\mu = r_\mu r_\lambda.$$

Izrek 7.11 med drugim pove, da je spekter vedno neprazna množica. Za dokaz omenjenega potrebujemo pomemben izrek iz kompleksne analize. Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ neprazna odprta množica. Funkcija $f : U \to \mathbb{C}$ je *holomorfna*, če za vsak $z_0 \in U$ obstaja limita

$$\lim_{z \to z_0; z \neq z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} \tag{7.2}$$

(ki je enaka nekemu kompleksnemu številu). Holomorfne funkcije so torej kompleksno odvedljive, saj limita (7.2) predstavlja odvod funkcije f v točki z_0.

Izrek 7.10 (Liouvilleov izrek). *Če je funkcija f, ki je holomorfna na celi kompleksni ravnini $\mathbb{C}$, omejena, potem je konstantna.*

Izrek 7.11. *Naj bo $M \neq \{0\}$ kompleksna Banachova algebra z enoto in naj bo $x \in M$. Spekter $\sigma(x)$ je neprazna kompaktna podmnožica v $\mathbb{C}$, ki je vsebovana v zaprtem krogu s središčem v 0 in radijem $\|x\|$.*

Ker je spekter kompaktna množica in je funkcija $\lambda \to |\lambda|$ zvezna, doseže maksimum na spektru, tj. $\sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda|$. Vrednosti

$$r(x) := \max_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda|$$

pravimo *spektralni radij* elementa $x \in M$. Izrek 7.11 pove, da velja

$$r(x) \leq \|x\|.$$

Izrek 7.12. *Naj bo $M \neq \{0\}$ kompleksna Banachova algebra z enoto in naj bo $x \in M$. Tedaj velja*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Element $x \in M$ je *nilpotenten*, če velja $x^n = 0$ za nek $n \in \mathbb{N}$. V tem primeru iz izreka 7.12 sledi enakost $\sigma(x) = \{0\}$. Element $x \in M$ je *kvazinilpotenten*, če velja $\sigma(x) = \{0\}$.

Izrek 7.13. *Za sebiadjungiran operator $A \in B(\mathcal{H})$ velja $r(A) = \|A\|$.*

Posledica 7.14. *Za sebiadjungiran operator $A \in B(\mathcal{H})$ velja*

$$\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|].$$

Poleg tega je vsaj eno izmed števil $\|A\|$ in $-\|A\|$ v spektru $\sigma(A)$.

Terminološki slovar

English	**slovensko**
absolutely convergent series	absolutno konvergentna vrsta
accumulation point (or a cluster point) of a sequence	stekališče zaporedja
adjoint operator	adjungirani operator
Banach algebra	Banachova algebra
Banach space	Banachov prostor
boundary of a set	rob množice
boundary point	robna točka
bounded linear operator	omejen linearen operator
closure of a set	zaprtje množice
closed ball	zaprta krogla
closed map	zaprta preslikava
closed set	zaprta množica
compact set	kompaktna množica
continuous spectrum	zvezen spekter
contraction	skrčitev ali kontrakcija
convergent sequence	konvergentno zaporedje
convex combination	konveksna kombinacija
convex set	konveksna množica
convex span/convex hull	konveksna ogrinjača
continuous map/function	zvezna preslikava/funkcija
dense subset	gosta podmnožica
dual space	dualni prostor
eigenvalue	lastna vrednost
eigenvector	lastni vektor
equivalent norms	ekvivalentne norme
exterior of a set	zunanjost množice
exterior point	zunanja točka
Fourier series	Fourierova vrsta
graph of a map	graf preslikave
Hilbert space	Hilbertov prostor
holomorphic function	holomorfna funkcija
homeomorphic topological spaces	homeomorfni topološki prostori
homeomorphism	homeomorfizem
identity element (or unit)	enota

image of an operator	slika (ali imidž) operatorja
interior of a set	notranjost množice
interior point	notranja točka
invariant subspace	invarianten podprostor
isometry	izometrija
isometrical isomorphism	izometričen izomorfizem
isometrically isomorphic spaces	isometrično izomorfni prostori
kernel of an operator	jedro operatorja
linear functional	linearen funkcional
linear span	linearna ogrinjača
metric space	metričen prostor
Neumann series	Neumannova vrsta
nilpotent element	nilpotenten element
normal operator	normalen operator
normed algebra	normirana algebra
normed space	normiran prostor
nowhere dense set	nikjer gosta množica
neighborhood of a point	okolica točke
open ball	odprta krogla
open cover	odprto pokritje
open map	odprta preslikava
open set	odprta množica
orthogonal complement	ortogonalen komplement
orthogonal projection	pravokotna projekcija
orthonormal system	ortonormalen sistem
point spectrum	točkasti spekter
positive operator	pozitiven operator
product topology	produktna topologija
quasinilpotent element	kvazinilpotenten element
quotient topology	kvocientna topologija
reflexive space	refleksiven prostor
residual spectrum	zvezen spekter
resolvent function	resolventa
resolvent set	resolventna množica
second dual space	drugi dual
selfadjoint operator	sebiadjungiran operator
separable topological space	separabilen topološki prostor
spectral radius	spektralni radij
spectrum	spekter

sublinear map	sublinearna preslikava
supremum norm	supremum norma
seminorm	polnorma
topological space	topološki prostor
topology	topologija
unitary operator	unitaren operator
weakly bounded set	šibko omejena množica