UNIVERZA NA PRIMORSKEM

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Kratka zgodovina poliedrov

doc. dr. Jurij Kovič

DRUGO UČNO GRADIVO

45 strani

Zgodovina in filozofija matematike,

Matematika, dodiplomski študijski program

PRVA IZDAJA

Koper 2020

Kazalo

1 Predgovor

1.1 Kaj obravnava to gradivo in komu je namenjeno

To učno gradivo podaja zgoščen pregled zgodovine poliedrov, pa tudi njihove teorije in številnih uporab v matematiki in onstran nje. Namenjeno je dodiplomskim študentom 3. letnika študijskega programa Matematika pri izbirnem predmetu *Zgodovina in filozofija matematike*. S pridom ga bodo lahko uporabili tudi učitelji matematike, ki si prizadevajo mladim vzbuditi veselje do geometrije, za kar so prav poliedri zelo primerni. Privlačno, informativno, uporabno in motivirajoče za lasten nadaljnji študij bo tudi za vse tiste, ki jih zanima teorija poliedrov in njihove številne uporabe.

1.2 Motivacija za študij (zgodovine) poliedrov

Poliedri so matematikom že več kot 2500 let neizčrpen vir navdiha, pa nam še vedno niso izdali vseh svojih skrivnosti. Vsaka doba in kultura v poliedrih odkrije nekaj novega, kar se je izmaknilo pozornosti prejšnjih generacij. S poliedri so se tako ali drugače ukvarjali mnogi veliki matematiki, filozofi, kozmologi in umetniki. Najbolj so se zanimali zanje v antiki in potem ponovno v renesansi, pa tudi v XX. stoletju. Danes zanimanje zanje samo še narašča.

1.3 Vsebina in didaktični slog ter namen gradiva

Pregledali bomo nekaj mejnikov v zgodovini poliedrov. Spoznali bomo glavne družine poliedrov, nekaj načinov, na katere jih matematiki študirajo ter nekaj problemov v zvezi s poliedri. Omenili bomo tudi nekaj primerov uporabe poliedrov v filozofiji, umetnosti, znanosti in pri pouku matematike. Ob tem bomo mimogrede poudarili nekatera načela, ki jih zgodovinarji matematike uporabljajo pri svojem delu.

Zaradi jasnosti, razumljivosti in preglednosti so nekatere teme obravnavane v obliki problemov, pa tudi vprašanj in odgovorov, ki pripomorejo tudi k temu, da besedilo, kjer je to primerno, bolj spominja na (sokratski) dialog v razredu, kjer so k zastavljanju vprašanj iskanju odgovorov lahko spodbujani tudi študentje. V besedilu so pogosto omenjene tudi analogije med različnimi metodami, ki se uporabljajo pri študiju poliedrov, in metodami, uporabnimi na drugih področjih matematike (in onstran nje). Na ta način tekst spodbuja aktivnejše branje in širše razmišljanje ter krepi sposobnost povezovanja različnih področij, ki je v matematiki zelo pomembna.

Namen tega učnega gradiva bo dosežen, če bo študente (in druge bralce) motiviral za nadaljnji študij tega neizčrpnega področja matematike, ki – kot je v tem delu argumentirano pokazano – pomembno vpliva tudi na številne vidike človeške družbe, znanosti in civilizacije. V tem smislu bi lahko rekli, da je vsaj neko osnovno znanje o poliedrih, tako konceptualno kot tudi ožje matematično, danes potrebno in zaželeno tudi kot del splošne izobrazbe in kulture vsakogar.

2 Uvod

2.1 Zakaj študirati poliedre?

Vprašanje 1 *Zakaj je smiselno pri študiju zgodovine in filozofije matematike (izmed toliko možnih tem) podrobneje obravnavati ravno poliedre?*

Poliedri so takorekoč idealna tema za obravnavo pri študiju zgodovine in filozofije matematike, in sicer iz naslednjih razlogov:

- Zgodovina poliedrov po svoje zrcali zgodovino velikega dela elementarne in višje matematike, v širšem smislu pa se tesno prepleta z zgodovino celotne zahodne misli, umetnosti in civilizacije.[1] Vsaka doba odkrije nekaj novega o poliedrih, prispeva nov pogled nanje, nove probleme, ideje in rezultate.[2]

- S poliedri so se tako ali drugače srečali in ukvarjali tudi največji in najbolj znani matematiki, filozofi in umetniki vseh časov (npr. Arhimed, Platon, Descartes, Euler, Newton, Leonardo, Dürer, Gauss, Hilbert, itd.).

- Poliedri ostajajo velika in neizčrpna uganka, vsemu preučevanju največjih matematikov najrazličnejših časov navkljub.[3]

- Fascinantni in navdihujoči so ne samo za matematike in umetnike, ampak tudi za strokovnjake na drugih področjih, npr. za filozofe, arhitekte, fizike, kemike.

[1]Geometrija Egipčanov se ni razvila le zaradi potreb merjenja zemlje po poplavah Nila, ampak tudi ob preciznih merjenjih, potrebnih pri gradnji piramid; konstrukcija in obravnava pravilnih poliedrov je eden vrhov Evklidovih *Elementov*; ta telesa, obravnavana kot družina, predstavljajo enega temeljnih kamnov Platonove filozofije, srečamo pa jih tudi pri Aristotelu; računanje prostornin poliedrov je pripomoglo k razvoju integralnega računa; spodbudili so raziskave zlatega reza v antiki, študij linearne perspektive v renesansi ter Keplerjevo kozmologijo; odkritje Eulerjeve poliedrske formule je prispevalo k razvoju topologije. Tako vidimo, da so poliedri res pomembno vplivali na razvoj zahodne matematične in znanstvene misli in umetniškega ustvarjanja.

[2]Skozi celotno zgodovino človeštva in matematike se vlečejo kot nekakšna rdeča nit – od pradavnih časov graditeljev prvih piramid, preko starogrške geometrije, ki je v XIII. knjigi Evklidovih *Elementov* dosegla svoj vrh prav z obravnavo platonskih teles, preko renesančne matematike in umetnosti, ki je v teh telesih odkrivala zlati rez, vse do sodobnega ponovnega oživljanja zanimanja za poliedre, ki se je začelo v XX. stoletju in odtlej samo še narašča. Tako se zdi, da poliedri v sebi skrivajo neizčrpen potencial navdiha za nove in nove raziskave v matematiki in uporabe izven nje.

[3]Tega nikakor ne moremo trditi za druge matematične teorije, ki se, če se izrazimo malce karikirano, bolj ali manj vrte okrog svojih fundamentalnih izrekov, pridejo, zacvetijo, doživе svoj vrh, odcvetijo, se umaknejo v ozadje, in prepustijo prvenstvo drugim modnim teorijam. Marsikatere obveljajo za raziskane in izčrpane in zanimanje matematikov zanje ugasne za vedno. Poliedri pa dobesedno kakor feniks vstajajo iz pepela pozabe in ostajajo vedno fascinantni. Kdor pomembno prispeva k teoriji poliedrov, se zapiše v zgodovino, pa čeprav je, kot po nekem nedoumljivem in skrivnostnem pravilu, njegovo delo dostikrat tudi za več kot sto let pozabljeno. To praviloma, iz neznanega razloga, nasploh velja za dela geometrov. Tako je bilo npr. z deli Evdoksa, Evklida, Arhimeda, Descartesa, Keplerja, Catalana, Steinitza.

- Privlačni so tudi za otroke in mladino (npr. v obliki različnih sestavljank, ki omogočajo izgradnjo njihovih fizičnih modelov) in omogočajo odličen (a žal le redko izkoriščen) uvod v (prostorsko) geometrijo, na višjem nivoju pa tudi v teorijo grafov, teorijo grup in simetrij, itd.

2.2 Poliedri in zgodovina ter filozofija matematike

Vprašanje 2 *Kako lahko preučevanje poliedrov pomaga k boljšemu poznavanju in razumevanju (smisla in metod) zgodovine in filozofije matematike?*

Pri raziskovanju posameznih vidikov poliedrov bomo velikokrat omenili zanimive podrobnosti iz zgodovine matematike, ki jih je (za splošno matematično izobrazbo) dobro poznati (npr. pomembne avtorje in knjige iz zgodovine matematike). V besedilu so posebej poudarjena tudi načela, uporabna pri delu zgodovinarjev matematike. *Zgodovina matematike* ni le strogo pozitivistična znanost, ki bi se (v želji po objektivnosti) omejevala le na zbiranje in urejanje faktografskega gradiva o določeni temi. Neizogibno je tudi interpretacija in osmišljanje zbranega materiala. V današnji informacijski dobi ni več smiselno niti mogoče vsega relevantnega gradiva (ne tekstovnega ne slikovnega) zbrati v enem samem delu. Zato pa je v tem gradivu podanih veliko referenc na ustrezno literaturo in različna spletna orodja, ki so v veliko pomoč pri študiju poliedrov, njihove teorije in zgodovine. V opombah pod črto so navedene tudi mnoge tehnične podrobnosti, ki samo bolje ilustrirajo osnovni tok misli o določeni temi. Cilj zgodovine matematike ni le rekonstrukcija kronologije določenih odkritij v matematiki (kdo je kaj odkril in kdaj), ampak je njen končni smisel v tem, da pomaga tako k privlačnejšemu pouku matematike ter razumevanju razvoja njenih idej, konceptov, metod, teorij, itd. kot tudi pri (nadaljnjem) raziskovanju in ustvarjanju matematike. Kot eno od značilnosti *filozofije matematike* pa omenimo, da ni namenjena le iskanju enoznačnih odgovorov (kar je tisto, za kar si prizadevamo v matematiki), temveč predvsem zastavljanju in odpiranju novih in novih vprašanj. Zato tudi sama metoda poučevanja ni le frontalno, enosmerno podajanje snovi (od učitelja k učencem), ampak dostikrat naravno zahteva tipični sokratski dialog. V tem gradivu je ta pristop prikazan predvsem v zvezi s temeljnim, tipično filozofskim vprašanjem: *Kaj je polieder?* To vprašanje je nekakšna rdeča nit knjige; potem ko pokažemo s primeri, zakaj je polieder tako težko enoznačno definirati, poizkušamo odgovoriti nanj tako, da pregledamo nekaj mejnikov v zgodovini poliedrov, ki kažejo, kako se je pojem poliedra razvijal skozi zgodovino matematike (in se verjetno še bo). Tako bo to učno gradivo kar najbolj v pomoč vsem, ki želijo poleg osnovnega znanja o poliedrih dobiti neko prvo predstavo tako o zgodovini kot o filozofiji matematike, ki je v primerjavi z zgodovino matematike dostikrat potisnjena v ozadje in prezrta.

3 Teorija poliedrov

Razvijanje in širjenje vsebine pojmov polieder in regularen polieder je bilo gonilna sila za ustvarjanjem velikega dela teorije poliedrov, kot jo poznamo danes.

— Joseph Malkevich, *Milestones in the Theory of Polyhedra, (iz knjige Shaping Space, Polyhedral Approach)*

Morda je glavni problem v zvezi s poliedri nerazvitost teorije poliedrov – ta problem izpostavljajo številni pisci knjig o poliedrih. Obstaja še nekaj drugih težav v zvezi s poliedri, na srečo pa imamo na voljo tudi veliko metod in pripomočkov za študij poliedrov. V tem poglavju na kratko obravnavamo omenjene teme.

3.1 Nerazvitost teorije poliedrov

Splošna teorija poliedrov – ki bi pregledno povzela ključne rezultate v zvezi s polidri – še ni bila napisana. Kljub nepregledni obilici rezultatov v zvezi s poliedri, raztresenih po raznih člankih, knjigah (in spletnih straneh), se zdi, da je splošna, celovita teorija poliedrov tako rekoč šele v povojih. Večinoma danes avtorji (predvsem člankov in prispevkov v zbornikih) obravnavajo predvsem konkretne probleme v zvezi z nekim izbranim razredom poliedrov.

Nekateri matematični pisci kritično opozarjajo na klavrno stanje teorije poliedrov in potrebo po postavitvi te teorije na trdne (npr. aksiomatske) temelje.

Teorija poliedrov se bo v prihodnosti, zdaj, ko se (nekako v zadnjih nekaj desetletjih) matematiki že zavedajo tega problema, zagotovo še razvijala tudi v tej smeri (sinteze in sistematizaciji rezultatov).[4]

V razvoju določenega matematičnega področja se slej ko prej, ko se akumulira dovolj rezultatov, naravno zastavi potreba po aksiomatski obravnavi tega področja, torej izpeljavi vseh (ali vsaj ključnih) rezultatov tega področja iz manjšega nabora osnovnih trditev – aksiomov. Ker se matematiki s poliedri ukvarjajo že kar neka tisočletij, je nenavadno, da takšne aksiomatske teorije poliedrov še nimamo. Zato je umestno vprašanje:

Vprašanje 3 *Ali je teorijo poliedrov sploh mogoče ujeti oz. zamejiti v neki strogo določeni tematski in formalni okvir (aksiomatsko teorijo)?*

Za mnoge definicije in dokaze v zvezi s poliedri, ki so se sodobnikom zdeli nesporni, se je čez čas izkazalo, da ne vzdržijo kritičnega premisleka. Zato je bilo mnoge pojme v zvezi s poliedri treba redefinirati in v skladu s tem najti strožje, korektnejše dokaze.[5]

[4] Verjetno pa bi danes potrebovali nič manj kot novega Evklida z enciklopedičnim poznavanjem tega področja in jasno vizijo končnega cilja, da bi raztresene (ali celo pozabljene) rezultate zbral in uredil v obliki sistematične, domišljene celote.

[5] To dinamiko lepo prikazuje znana Lakatoseva knjiga *Proofs and Refutations*.

Zaenkrat ni videti konca temu procesu nenehnega popravljanja definicij in izrekov, prej se zdi, da bo evolucija teorije poliedrov trajala v nedogled.

Zaradi odsotnosti splošnega soglasja matematikov glede osnovnih definicij v zvezi s poliedri je treba pri branju (in citiranju) literature o poliedrih vselej zelo paziti, kako avtorji definirajo posamezne pojme. [6]

3.2 Definicija poliedra

Pod pojmom polieder si navadno predstavljamo tridimenzionalno geometrijsko telo z ravnimi poligonskimi ploskvami in ravnimi robovi, ki se srečujejo v ogliščih.[7]

Čeprav torej vsi imamo neko osnovno predstavo o tem, kaj so poliedri, si vseeno – da bomo natančno vedeli, o čem sploh govorimo – zastavimo vprašanje:

Vprašanje 4 *Kaj so poliedri oz. kako jih definiramo?*

Videli bomo, da na to temeljno, na videz enostavno vprašanje, ni lahko odgovoriti, in sicer iz naslednjih razlogov:

(1) Vsebina pojma *polieder* se je v zgodovini precej širila, spreminjala in bogatila (podobno velja npr. tudi za pojem *funkcije*) – v popolnem nasprotju s temeljno zahtevo vsake znanosti, in še posebej matematike, da morajo biti pojmi enoznačni![8]

(2) To vprašanje po svoji naravi ni samo matematično, ampak gre za tipično filozofsko vprašanje tipa: *Kaj je* X? , kjer je X neki (na začetku razprave še nedefinirani) pojem, npr. lepota, resnica, itd., takšna vprašanja pa po svoji naravi nikoli niso lahka, do odgovora pa se dostikrat pride po tipično filozofski metodi sokratskega dialoga.[9]

Zato začnimo z lažjim vprašanjem[10]:

Vprašanje 5 *Kaj pomeni sam izraz polieder in kakšen je etimološki izvor te besede?*

---

[6] Zelo pomaga, če o istem težjem problemu ali zapletenejši temi v zvezi s poliedri poiščemo in preučimo več različnih virov. Študij poliedrov terja še posebno pozornost in voljnost pogledati na isti problem iz različnih zornih kotov. Spremenjeni zorni kot nam dostikrat pomaga premagati težave pri razumevanju že dokazanih rezultatov, pa tudi pri reševanju novih problemov.

[7] Tako je npr. kocka polieder, stožec in krogla pa nista.

[8] Tako bi npr. zgornji *naivni definiciji* oz. prvi predstavi o tem, kaj je polieder, ustrazalo tudi telo, sestavljeno iz dveh piramid, ki se stikata v vrhu, čeprav bo vsak matematik zatrdil, da to zagotovo ni polieder!

[9] Tako je npr. knjiga Imre Lakatosa *Proofs and refutations, The Logic of Mathematical Discovery*, 1976, napisana v obliki dialogov študentov in učitelja, ki obravnavajo različne dokaze Eulerjeve poliedrske formule, ob tem pa, navajajoč različne primere in protiprimere (za umestnost posameznih definicij poliedra), razmišljajo tudi o primerni definiciji pojma polieder.

[10] S tem etimološkim vprašanjem sledimo uveljavljeni tradiciji profesorjev nekaterih humanističnih ved, ki razlagi pomena ključnih besed, kot je npr. roman, praviloma posvetijo kar nekaj uvodnih strani svojih razprav ali kar nekaj uvodnih minut svojih predavanj.

Beseda *polieder* izhaja iz starogrške besede $\pi o\lambda\upsilon\eta\delta\rho\nu$. Prvi del besede je koren besede $\pi o\lambda\upsilon\zeta$ *mnogo*, drugi del pa pomeni nekaj takega kot *sedež* ali *osnova*. Gre torej za telo, ki ima mnogo mejnih (in ravnih) ploskev.

Vprašanje 6 *Kako čim lepše prevesti izraz polieder v slovenščino?*

Na to vprašanje še nimamo zadovoljivega odgovora, ki bi se uveljavil tako v naši matematični literaturi kot tudi v splošni rabi.[11]

Pri iskanju primernih prevodov strokovnih besed je dostikrat dobra ideja pogledati, kako določeni pojem prevajajo v drugih jezikih. Za polieder se v različnih jezikih uporabljajo naslednji izrazi (poiskani so s spletno storitvijo *Google Prevajalnik*):

češčina: mnohosten
esperanto: pluredro
italijanščina, španščina: poliedro
nemščina: Polyeder
francoščina: polyedre
katalonščina: poliedre
latinščina: polyedrum
latvijščina: daudzskaldnis
romunščina: poliedru

Strogo matematično gledano je (za resničnost posameznih trditev) seveda povsem vseeno, kako se kakšna reč v matematiki imenuje.[12] Zato je na mestu vprašanje:

Vprašanje 7 *Zakaj oz. čemu se sploh ubadati z iskanjem lepih, primernih prevodov posameznih strokovnih izrazov?*

Ker se matematične misli ne izražajo le v simboličnem, ampak tudi v naravnem jeziku[13], in ker vsakdo najlažje misli in se izraža v materinem jeziku, je negovanje in bogatenje slovenskega znanstvenega jezika ključnega pomena za ohranjanje in razvoj naše izvirne znanstvene misli.

V zgodovini matematike, pa tudi v matematiki sami, je torej, poleg same matematične vsebine, pomembno upoštevati tudi naslednje načelo:

[11] Morda se bo uveljavil prevod: polieder → mnogoterec, ki ga, po zgledu že uveljavljenih slovenskih prevodov izrazov za posamezna pravilna telesa: tetraeder → četverec, heksaeder → šesterec (kocka), oktaeder → osmerec, dodekaeder → dvanajsterec, ikozaeder → dvajseterec predlaga oziroma ga z zgornjo utemeljitvijo zagovarja dr. Izidor Hafner, naš največji poznavalec in popularizator poliedrov med mladino (ki je v Ljubljani uredil t.i. *Hišo poliedrov*, sobo, v kateri je na ogled na stotine modelov poliedrov.). Morda se bomo tega njegovega prevoda matematiki počasi navadili in bo prešel v splošno rabo. Res, če imamo na voljo lepo domačo besedo, zakaj bi brez potrebe uporabljali tujko?

[12] Spomnimo se npr., kako je Hilbert dejal, da bi za osnovne pojme geometrije, kot so *točka*, *premica* in *ravnina*, lahko izbrali katerekoli besede, kajti pomen teh besed je defniran izključno z aksiomi, v katerih nastopajo.

[13] Pomislimo le na Newtonovo knjigo *Principia Mathematica*, kjer takorekoč ni formul, ali pa na Cardanovo *Ars Magna*, ki je bila napisana še v slogu stare retorične algebre, saj algebrajskega simbolizma Viéte še ni bilo na voljo!

Načelo 1 *Lep jezik – jasna misel!*

Vrnimo se zdaj k vprašanju: *Kaj so poliedri? Kako jih definiramo?*

Poliedre je lahko prepoznati, a težko definirati. Vsi (matematiki) prepoznamo polieder, če ga vidimo. Očitno so vsi poliedri geometrijska telesa, obratno pa ne velja. Katera je tista značilna lastnost (differentia specifica), ki karakterizira poliedre, jih izdvaja iz ostalih geometrijskih teles? Na to vprašanje ni lahko odgovoriti. Ni soglasnega odgovora matematikov nanj. Ali, kot je to lepo povedano v naslednjem citatu:

Odgovor na vprašanje: Kaj je polieder? ni en sam, ampak jih je mnogo.

— M. Senechal, *Shaping Space, A polyhedral approach*, 1988.

Ni soglasja niti o tem, kakšna lica ima lahko polieder (lice je sicer določeno s cikličnim zaporedji robov in oglišč). Lica poliedra

- niso nujno konveksna, lahko so tudi *zvezdasta* (imajo obliko pravilnih zvezd);
- niso nujno ravninska;
- lahko jih je neskončno mnogo;[14]-
- lahko tvorijo nekonveksne ogliščne vzorce (kot npr. veliki ikozaeder);
- lahko imajo ukrivljene robove, ali so celo sama ukrivljena (npr. sferni liki).

Moderni avtorji knjig o poliedrih, kot je npr. Branko Grünbaum, se dobro zavedajo problema, da terminologija v zvezi s poliedri ni enotna. Vsak avtor definira poliedre nekoliko drugače. Stari avtorji se tega problema sploh niso zavedali![15] Matematiki se ne morejo uskladiti niti glede števila dimenzij poliedra! Tako različni matematiki gledajo poliedre kot na:

- tridimenzionalne objekte (telesa) – temu bi lahko rekli klasični pogled;
- dvodimenzionalne objekte na ploskvah (plašč poliedra) – topološki pogled;
- enodimenzionalne objekte (skelet poliedra) – kombinatorično-grafovski pogled.

[14]Primer poliedra z neskončno lici je 3D-*spidron*, izumil ga je likovni umetnik D. Erdely leta 1979; spominja na nekakšno tridimenzionano spiralo oz. pajkovo mrežo. Glej npr. http://spacecollective.org/edanet

[15]Težave z definicijo poliedra se začnejo že pri Evklidu. Ta namreč v Elementih ne definira pravilnega poliedra (definira pa npr. točko, premico, ravnino in kot, čeprav teh definicij v samih dokazih ne uporablja!). Kljub temu pa v Knjigi XIII dokaže, da je pravilnih poliedrov pet: tetraeder, kocka, oktaeder, dodekaeder in ikozaeder! Podobno napako (da ne specificirajo vnaprej družine objektov, o katerem govorijo), za njim ponovijo Arhimed, Euler, Descartes, in številni drugi. Je poliedre res tako težko definirati?

Že nekaj desetletij matematiki študirajo tudi štiridimenzionalne objekte (npr. hiperkocke). Danes matematiki govorijo o *politopih* (posplošitvah poliedrov) v d-dimenzionalnem prostoru $\mathbb{R}^d$.[16] Poliedri so v tej terminologiji 3-politopi.[17]

Bistveni sestavni deli poliedra

Večinoma pa se matematiki strinjajo, da so bistveni elementi oziroma sestavni deli poliedra naslednji:

- lica; število lic $= f$
- robovi; število robov $= e$
- oglišča; število oglišč $= v$.

Med temi elementi obstajajo t.i. *incidenčne relacije*: tako npr. nek rob lahko leži na nekem licu ali pa ne, neko oglišče lahko leži na nekem robu ali licu ali pa ne, dva robova se lahko sekata v nekem oglišču ali pa ne. Dodatno praviloma zahtevamo še (če poizkušamo podati takšno ali drugačno definicijo poliedra): *Vsak rob poliedra je stranica natanko dveh lic.*[18]

3.2.1 Abstraktni in geometrijski poliedri

Incidenčne relacije med oglišči, robovi in lici povzemajo bistveno kombinatorično informacijo o poliedru. Te relacije omogočajo, da matematiki danes raziskujejo tudi t.i. *abstraktne poliedre*. Ti so definirani kot množice objektov treh vrst, ki jim pravimo lica, povezave in vozlišča, in med katerimi vladajo določene incidenčne relacije. Obstajajo abstraktni poliedri, ki se ne dajo realizirati (predstaviti) kot geometrijski poliedri. Abstraktnih poliedrov je torej več kot geometrijskih, ki tvorijo njihov podrazred.[19]

Pomemben razred poliedrov so *konveksni poliedri*. Te lahko karakteriziramo na dva logično ekvivalentna načina: kot konveksne lupine končno mnogo točk, ali kot presek končno mnogo polprostorov (temu nekateri avtorji pravijo kar *glavni* izrek o konveksnih poliedrih). Dobro je poznati obe karakterizaciji – ena pride prav v nekaterih dokazih, druga v drugih.

[16] Primer politopa: *Regularni dodekapleks* je 4-politop, štiridimenzionalni politop s 120 dodekaedrskimi celicami. Matematiki so našli način, da si tudi takšne zapletene objekte nekako nazorno predstavijo: če imajo npr. taki objekti neko rotacijsko simetrijo, narišejo skelet takega poliedra v središčni perspektivi.

[17] Morda kdo študira že tudi neskončnodimenzionalne politope (npr. v Hilbertovem prostoru)?

[18] Za lažji premislek, kaj ta zahteva pravzaprav pomeni, si zamislimo objekt, pri katerem bi vsak rob ležal na natanko treh licih. Če bi npr. licem kocke dodali še 6 pravokotnikov, dobljenih kot prereze kocke z ravninami skozi pare sredično-simetričnih stranic, dobimo prav tako strukturo!

[19] Povsem analogno situacijo imamo tudi v teoriji konfiguracij (točk in premic), ki jih lahko gledamo kot geometrijske strukture v prostoru, ali pa kot kombinatorične, abstraktne incidenčne strukture).

Klasičen primer kombinatorične obravnave poliedrov in obenem karakterizacije realizabilnih poliedrov je Steinitzev (do B. Grünbaumove knjige *Convex Polytopes*, 1. izdaja 1967, 2. izdaja 2003 neopažen) izrek (objavljen v posthumni izdaji E. Steinitz-H.Rademacher, *Vorlesungen über der Theorie der Polyedern*, Berlin 1934), ki ga je Steinitz sam imel za *fundamentalni izrek o konveksnih poliedrih*:

Izrek 1 *Graf G je realizabilen kot konveksen 3-politop če in samo če je G planaren in 3-povezan (t.j. če mu izvzamemo eno ali dve vozlišči, ostane povezan).*

Kot ta izrek lepo komentira Günther Ziegler (v prav tako imenitni knjigi *Lectures on Polytopes*, 1995): *Vse, kar hočemo kombinatoričnega izvedeti o poliedru, lahko izvemo tako, da delamo z njegovim grafom v ravnini.*[20]

3.2.2 Nekaj priporočene literature o poliedrih

Literature o poliedrih je ogromno. Zato je umestno naslednje pragmatično vprašanje:

Vprašanje 8 *Kje začeti (sistematičen) študij poliedrov (oz. njihove zgodovine)? Kakšno knjigo vzeti v roke?*

Matematik (študent, raziskovalec), ki ga zanima predvsem moderna teorija poliedrov, lahko poseže po klasiki B. Grünbaum, *Convex Polytopes* (2. izdaja iz 2003). V tej knjigi bo našel tudi veliko zgodovinskih opomb. Ob študiju te knjige se (poleg same teorije poliedrov) lahko naučimo tudi zelo pomembnega in uporabnega načela, ki se ga dobro zavedajo vsi, ki se ukvarjajo z zgodovino matematike:

Načelo 2 *Poglabljanje v zgodovino (izbranega področja) matematike lahko pomaga:*

- *šudentu k boljšemu razumevanju teorije in njenih uporab,*
- *raziskovalcu k uspešnejšemu znanstveno raziskovalnemu delu,*
- *pedagogu k privlačnejšemu pouku,*
- *avtorju pa k pisanju tehtnejših člankov in monografij.*

[20]Omeniti velja, da so si poliedri, tlakovanja, grupe, grafi, matrike, permutacije nekako sorodni objekti – študij katerekoli od teh struktur pomaga pri študiju ostalih! Pri raziskovanju poliedrov obeh vrst si matematiki velikokrat pomagajo z različnimi orodji, metodami in izreki teorije grafov in teorije grup. Sistematično uporabo grup v geometriji je močno spodbudil Felix Klein.

Zanimivo je, da je vpliv potekal tudi v obratni smeri: študij poliedrov je pripomogel k razumevanju končnih grup, še posebej grup izometrij prostora $\mathbb{R}^3$, generiranih z zrcaljenji. Različne vrste regularnosti (npr. vozliščna tranzitivnost, povezavna tranzitivnost, tranzitivnost lic), ki so jih najprej študirali pri poliedrih, se uporabljajo tudi v teoriji grafov, pa tudi pri tlakovanjih ravnine, sfere in drugih ploskev.

Toda moderne knjige (napisane v izčiščenem, aksiomatskem duhu) so lahko za začetnika na nekem področju pretežke.

Zato je za matematika, ki ga zanima bolj *klasična* teorija poliedrov, in bi rad spoznal tudi širši kontekst zgodovine poliedrov, morda najbolj smiselno najprej vzeti v roke nekoliko starejšo knjigo L. Fejes Toth, *Regular figures,* 1964. Tu so regularni poliedri vpeljani na zelo lep geometrijski način (poleg petih platonskih teles dobimo še štiri zvezdasta Kepler–Poinsotova telesa) in obravnavani v širšem kontekstu sorodnih regularnih struktur, ki nastopajo v zanimivih uporabnih problemih (npr. ravninskih ornamentov, sferičnih razporeditev točk, ki so si kar se da vsaksebi, pakiranj kar se da velikega števila enakih sfer v dani sferi itd.).

Drug primer priporočljive starejše knjige o poliedrih je: M. Brückner, *Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte*, Leipzig, 1900. Knjiga zelo sistematično obravnava najprej poligone, nato poliedre. Podaja zelo natančne klasifikacije različnih razredov poliedrov. Tudi v njej je veliko zgodovinskih opomb (npr. kdo je kaj prvi dokazal ipd.). Tu najdemo poleg obširnih teoretičnih razlag (npr. različnih posplošitev Eulerjeve formule na *poliedre z luknjami* kot npr. pri torusu) in zgodovinskih podrobnosti tudi zelo lepe ilustracije ter fotografije modelov poliedrov.

Kogar zanima, kako se takšni modeli (iz papirja) konstruirajo, pa lahko poseže po znani, prav tako starejši knjigi: Wenninger, *Polyhedron models* (bodisi v ruščini bodisi v angleščini).

Ob tem velja omeniti še eno načelo, koristno za delo zgodovinarja matematike:

Načelo 3 *Primarni viri so boljši kot sekundarni, ti pa so boljši kot terciarni.*

Če je le mogoče, skušamo poiskati različne vrste virov. Vredno je vzeti v roke (ali jih vsaj poiskati na spletu v skenirani elektronski obliki) tudi starejše knjige ter izvirne knjige v tujem jeziku (celo v latinščini, npr. če preučujemo delo kakšnega pomembnega matematika iz prejšnjih stoletij), četudi morda tega jezika ne obvladamo najbolje. Pri razvozlavanju prvega približka pomena si lahko pomagamo tudi s storitvijo *Google Prevajalnik.* Natančnejši pomen posameznih besed in strokovnih izrazov, kot jih uporablja posamezni avtor, je dostikrat razviden šele iz konteksta.

V novejšem času so se začele pojavljati knjige o poliedrih, ki jih skušajo predstaviti prav v tej njihovi bogati raznovrstnosti in jih temu ustrezno prikazujejo v povezavi z drugimi, ne samo matematičimi področji. Nekaj od njih je navedenih v Literaturi.

Sicer pa je obsežen *seznam literature o poliedrih*, tako takšne, ki je priporočena za začetni študij, kot tudi drugih knjig in člankov, podan (v članku G. Hart, *Annotated bibliography*) na spletni strani:

https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/references.html

Slovarček osnovnih izrazov v zvezi s poliedri lahko bralec najde na spletni strani https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/glossary.html,

pa tudi na spletni strani *Stella Polyhedral Glossary*
https://www.software3d.com/Glossary.php

Nekaj novejših odkritjih v zvezi s poliedri najde bralec opisanih na spletni strani
https://www.software3d.com/Research.php

A tudi prebiranje knjig o poliedrih pokaže: Definiranje poliedra ni lahko delo – za vsako definicijo se namreč najde protiprimer, ki kaže, da jo je treba popraviti!

Omenimo le nekaj primerov iz znane Lakatoseve knjige *Proofs and Refutations*, napisane v obliki dialoga, v katerem se učtelj in učenci, imenovani Alfa, Beta, Gama, Delta, Epsilon, itd. sprašujejo in prerekajo v zvezi z vprašanji, kot so npr.:

- Sta dve piramidi, ki se dotikata le v vrhu ali le v stranici, polieder?
- Kaj pa dve piramidi, ki imata skupno le eno stranico?
- Ali ima lahko polieder luknje (kot torus, le da z ravnimi ploskvami)?
- Je telo iz manjše kocke na večji kocki polieder ali ne? So lica z luknjami dopustna ali ne?
- Kaj pa, če je okoli manjše kocke večja kocka in je manjša kocka votla – je to polieder?

Še vedno se torej, kot mačka okrog vrele kaše, vrtimo okrog enega in istega vprašanja: *Kaj je polieder? Kako to dognati? Kako to razmisliti?*

3.2.3 Preslikajmo naš problem drugam in ga rešimo tam!

Kadar matematik ne zna rešiti nekega problema, ga preslika na neko drugo področje, kjer ga morda lažje reši.[21] *Ali lahko kaj takega naredimo tudi s problemom definicije poliedra?* Ga lahko nekako preslikamo nekam, kjer bo lažje rešljiv? Če razmišljamo na tak način, se nam utrne ideja: *Raziščimo, kako se je pojem poliedra razvijal v zgodovini matematike – tako bomo najbolje razumeli, kaj pomeni!*

Res, sam pojem poliedra (kot tudi ostale pojme, pa tudi različne izreke, formule in dokaze v zvezi s poliedri) še najlažje razumemo, če preučujemo zgodovino poliedrov (pa četudi je naše poznavanje te zgodovine precej nepopolno in pomanjkljivo). Ko npr. po vrsti spoznavamo najpreprostejše razrede poliedrov, kot so jih odkrivali v zgodovini, lažje razumemo tudi njihovo poimenovanje, notacijo ter klasifikacijo (in različne odprte probleme v zvezi s tem).

[21] Primeri: Fourierova transformacija, Laplaceova transformacija, prevedba geometrijskih problemov na algebraične s pomočjo analitične geometrije, itd.

3.3 Nekaj pomembnih družin poliedrov

Poliedrov je neskončno mnogo. Katere izbrati in obravnavati? Smiselno se je omejiti na razred $\mathcal{P}$ poliedrov, katerih lica so pravilni mnogokotniki ali pravilne zvezde, pri tem pa izključiti nekonveksne neuniformne poliedre, katerih seznam ni znan, oziroma še niso enumerirani. Pomemben razred poliedrov so tudi *rombski poliedri*, pri katerih so vsa lica (mejne ploskve) rombi; med temi poliedri so še posebej zanimivi (v smislu zlaganja v večje strukture) tisti, ki temeljijo na zlatem in srebrnem razmerju.[22]

3.3.1 Pravilni poliedri

Pravilni poliedri so poliedri, katerih lica so skladni pravilni n-kotniki, pri katerih se v vsakem oglišču sreča enako število lic. Že Evklid je znal dokazati, da je teh teles natanko pet: *tetraeder* (ali četverec), *kocka*, *oktaeder* (ali osmerec), *dodekaeder* (ali dvanajsterec) in *ikozaeder* (ali dvajseterec).[23]

Regularni poliedri so znani tudi pod imenom *platonska telesa* po grškem filozofu Platonu, ki jih je naredil nesmrtne v svojem dialogu *Timaj*. V tem dialogu je Platon razložil svoje ideje o *elementih*, iz katerih naj bi bil sestavljen univerzum: zemlja, zrak, ogenj, voda. Argumentiral je, da imajo najmanjši delci posameznih elementov obliko kocke, oktaedra, tetraedra in ikozaedra. Peto regularno telo, dodekaeder, naj bi ponazarjalo kozmos. Ta povezava regularnih teles z elementi je zaposlovala domišljijo mnogih ljudi od Platonovih časov do današnjih.

3.3.2 Arhimedska telesa

Preučeval jih je že Arhimed. Znova so jih odkrili v renesansi.

To so konveksna telesa,

ki imajo za lica vsaj dva različna tipa pravilnih mnogokotnikov, imajo pa okrog vsakega oglišča enak cikel lic, npr. (3.3.3.3.5),

vsa oglišča pa so v isti orbiti (za poljubni oglišči A in B poliedra obstaja rotacijska ali zrcalna simetrija poliedra, ki prevede oglišče A v oglišče B).

Arhimedskih teles je 13.

[22] Glej npr. http://www.logika.si/poliedriCDsl/Zlatirombskipoliedri.pdf.

[23] Evklidov dokaz poteka takole: Če damo skupaj v eno oglišče 3, 4, 5 trikotnikov, dobimo pravilni tetraeder, oktaeder in ikozaeder. 6 trikotnikov že da ravninski lik, ki ga ne moremo nadaljevati v plašč telesa. Če zlagamo skupaj kvadrate, vidimo, da jih lahko zložimo le tri (štirje oblikujejo ravninski lik). Če nadaljujemo z istim vzorcem, dobimo kocko. Podobno iz pravilnih petkotnikov lahko dobimo le dodekaeder. Poligone z več kot 6 stranicami pa ne moremo več lepo zložiti okrog istega oglišča.

3.3.3 Uniformni poliedri

Njihova lica so pravilni mnogokotniki (npr. 3,4,5,6,10) ali pravilne zvezde (kot npr. $5/2, 10/3$, itd.).

Vsa njihova oglišča so v isti orbiti (za poljubni oglišči A in B poliedra obstaja rotacijska ali zrcalna simetrija poliedra, ki prevede oglišče A v oglišče B).[24]

Uniformni poliedri so lahko tudi nekonveksni.

Uniformnih poliedrov je 75 (poleg dveh neskončnih družin *prizem* in *antiprizem*).

Enolično jih lahko opišemo povsem kombinatorično – navedemo, kako se ciklično vrstijo lica okrog vsakega oglišč, npr. pri telesu z ogliščnim vzorcem (8/3.3.8/3.4) se dvakrat izmenjata osmerokraka zvezda in enakostranični trikotnik, sledi pa kvadrat.

Še en primer: Prisekani tetraeder ima ogliščni vzorec (3.6.6) in ogliščni tip $(p.q.q)$.

3.3.4 Johnsonova telesa

Johnsonovo telo je ne-uniformen konveksen polieder, katerega lica so pravilni mnogokotniki. Torej ima vsako Johnsonovo telo vsaj dve orbiti oglišč.

Obstaja 92 Johnsonovih teles.

Obstaja tudi (nekoliko zapletenejši kot pri uniformnih poliedrih) strukturni opis Johnsonovih teles. (N. Johnson, *Convex polyhedra with regular faces*, Canad. J. Math. 18, str. 169–200). Iz tega zapisa je razvidno, kako so zapletenejša telesa zgrajena iz manjšega števila elementarnih. Struktura teh teles je delno razvidna tudi iz njihovih imen. Tako ima npr. *podaljšana trikotniška dipiramida* strukturno formulo Q_3P^2.

3.3.5 Konveksni poliedri s pravilnimi poligonskimi lici

Seznam konveksnih poliedrov s pravilnimi poligonskimi lici je natančno poznan šele dobrega pol stoletja (našli so jih Johnson, Coxeter, in drugi).

Poleg 5 platonskih in 13 arhimedskih teles je v tem razredu še 92 Johnsonovih teles (ter neskončni družini prizem in antiprizem).

Ko so našli vsa ta telesa (in dokazali, da drugih ni), se je izkazalo, da velja naslednja presenetljiva trditev:

Izrek 2 *Vsa ta telesa premorejo vsaj eno rotacijsko ali zrcalno simetrijo.*

3.4 Problemi in težave v zvezi s poliedri

V zvezi s poliedri je veliko težav in problemov, kot so npr: *Kako jih definirati? Kako jih klasificirati? Kako jih poimenovati? Kako čim preprosteje opisati (ali si razložiti) njihovo strukturo? Katere razrede poliedrov je vredno preučevati? Kako poiskati vse poliedre danega razreda (in dokazati, da je seznam popoln)?*

[24]Pogoj, da so vsa oglišča v isti orbiti, je močnejši kot pogoj, da imajo okrog vsakega oglišča enak cikel lic (do rotacije in zrcaljenja cikla natančno).

Oglejmo si zdaj nekaj teh problemov in težav nekoliko podrobneje.

1) *Ni ne izčrpne teorije ne izčrpne zgodovine poliedrov.*

Enega prvih poskusov predstaviti teorijo poliedrov nasploh je nedavno podala M. Senechal. Številne zgodovinske opombe o poliedrih so na srečo podane v knjigah Brücknerja, Grünbauma, Ferenc Totha, Heatha in drugih. Ko delamo s poliedri, moramo biti torej vselej zelo pozorni na to, kateri razred poliedrov obravnavamo, oziroma na katere poliedre se določeni izrek nanaša.

2) *Strukturo poliedrov je težko prikazati zgolj geometrijsko.* Pri zapletenih poliedrih nam niti najboljše slike ne pomagajo povsem razumeti njihove strukture. Zato ni dobro, če se pri dokazovanju trditev o poliedrih preveč zanašamo le na slike in tridimenzionalne modele.

3) *Kako – če se to da – strukturo poliedrov opisati algebraično?*

Ker je številne poliedre težko predstaviti s tridimenzionalnimi modeli in slikami, se je smiselno vprašati, ali lahko njihovo strukturo opišemo kako drugače, algebraično? Tak zapis bi lahko potlej služil kot *strukturna koda* za vsak polieder danega razreda. Dejansko lahko najdemo tak zapis, ki spominja na zapis molekul v kemiji:

Definicija 1 *Strukturna formula lic poliedra enostavno šteje lica z določenim številom stranic ($T = 3$ = trikotnik, $K = 4$ = kvadrat oz. štirikotnik, $P = 5$ = petkotnik, $H = 6$ = šestkotnik).*

Tako ima npr. kocka strukturno formulo lic $K_6 = 4_6$, štiristrana piramida pa $K_1T_4 = 4_13_4$. Seveda vselej ostaja vprašanje, kako natančno je z neko kodo opisan dani polieder (ali obstaja en sam tak polieder ali jih je morda več, in če, koliko).

4) *Zanimivih poliedrov je zelo veliko. Katere izmed njih študirati?*

Poliedrov, vrednih raziskovanja, je ogromno. Zato se je pri vsaki raziskavi treba omejiti na izbrani razred poliedrov in ga tudi natančno definirati.

Včasih je že sama določitev (enumeracija) vseh poliedrov danega razreda težak problem. Tako morda znamo dokazati, da je poliedrov nekega razreda končno mnogo, ne vemo pa, koliko, in kateri so. To moramo šele ugotoviti.[25]

5) *Mnogi poliedri imajo zapletena imena.*

Omenimo le nekaj primerov poliedrov s takšnimi imeni (za nekatere od njih še vedno nimamo ustreznih lepih slovenskih izrazov):

snub (porezana) kocka (eno od t.i. *arhimedskih teles*)

podaljšana trikotniška dipiramida (Johnsonovo telo $J14$)

Na takšna imena se sčasoma, ko naletimo nanje večkrat, navadimo. Praviloma opisujejo neko bistveno značilnost strukture danega poliedra.

Ker matematiki hočejo kljub vsem omenjenim težavam vendarle priti do zanesljivih rezultatov v zvezi s poliedri, jih zanimajo predvsem tisti poliedri, ki so tako ali

[25] Na primer, koliko je *deltoedrov* – konveksnih poliedrov, katerih lica so pravilni trikotnike T (strukturna formula deltoedrov je $T_{2n} = 3_{2n}$). Odgovor je znan – takih teles je osem.

drugače *regularni* (npr. imajo vsa lica regularna, ali imajo enako ciklično razporeditev lic okrog vsakega oglišča, ali imajo eno samo orbito oglišč, povezav, lic, itd.). Takšni poliedri privlačijo matematike (in umetnike in druge ljudi) tudi iz estetskih razlogov.

3.4.1 Identifikacija poliedra

Podobno kot naravoslovec (npr. botanik, geolog ali kemik) pri preučevanju določenega objekta ali pojava (npr. rastline, minerala ali kemične spojine) najprej določi, s čim ima sploh opravka (za katero rastlino, mineral ali kemično spojino sploh gre), tako tudi matematik pri preučevanju danega poliedra najprej želi prepoznati, kaj ima pred seboj (npr. v obliki modela iz lesa ali papirja). Tedaj torej rešuje naslednji problem:

Problem 1 *Identificiraj dani polieder (poišči njegov razred, ime, oznako).*

Nekatere poliedre (s preprostejšo strukturo) prepoznamo zlahka, takorekoč na prvi pogled (kot npr. platonska telesa) druge (z zapletenejšo strukturo) pa prepoznamo z *metodo zbiranja indicev*,[26] (t.j. opažanjem in akumuliranjem dovolj podrobnosti o njegovi strukturi, simetrijah, številu njegovih oglišč, robov in lic, ogliščnih vzorcih, itd.), da naposled zberemo dovolj informacij za nedvoumno določitev danega telesa. Danemu poliedru lahko določimo nekaj osnovnih lastnosti (npr. ali je konveksen, ali so vsa njegova lica pravilni mnogokotniki ali pravilne zvezde, ali ima eno samo orbito oglišč, itd.). Potem ga, glede na znane razrede najpreprostejših poliedrov (npr. platonska, arhimedska, Johnsonova telesa, uniformni poliedri, itd.) ustrezno prepoznamo (identificiramo) ter klasificiramo, poiščemo v seznamu imen poliedrov danega razreda njegovo ime in oznako, itd.

3.4.2 Konstrukcija poliedrov

Problem konstrukcije poliedrov prav tako sodi med zanimivejša vprašanja v teoriji poliedrov. Poizkusimo natančneje pojasniti in opredeliti nekaj vidikov tega problema:

Problem 2 *Dokaži, da dani polieder P, podan tako ali drugače, na primer*

z določeno simetrijsko grupo,

z določeno incidenčno strukturo,

z določenim naborom lastnosti ali parametrov, itd.

obstaja (in je do izomorfizma en sam), ali pa dokaži, da tak polieder ne obstaja.

[26] Lahko bi ji rekli tudi *detektivska metoda*. Po svojem matematičnem bistvu spominja na znani *kitajski izrek o ostankih*, po katerem lahko enolično določimo (najmanjše) naravno število, če poznamo njegove ostanke po določenih praštevilskih modulih. Tako npr. iz $n \equiv 0 \pmod 3$ in $n \equiv 2 \pmod 5$ sklepamo, da je (najmanjše tako število) $n = 12$. Na istem principu opažanja podrobnosti in hkratnega upoštevanja akumuliranih informacij deluje tudi reševanje *sudokujev*, kjer neznano število od 1 do 9 na danem polju mreže dimenzij 9×9 določimo z izločitvijo enakih števil v isti vrstici ali stolpcu ali manjšem kvadratu dimenzij 3×3.

Posebej velja poudariti, da za dokaz, da nek polieder obstaja, ni dovolj zgraditi njegov fizični model.[27] Kot zgled korektne konstrukcije poliedra omenimo Evklidovo konstrukcijo dodekaedra (v XIII. knjigi *Elementov*), pri kateri je vzel za osnovo kocko, okrog nje pa razporedil skladne prizme. [28]

Omeniti velja t.i. *Wythoffovo konstrukcijo uniformnih poliedrov (in tlakovanj).* S to konstrukcijo lahko dobimo vse uniformne poliedre (razen enega) na ta način, da podamo trikotnik z določenimi koti, ki predstavlja nekakšen temeljni gradnik vseh lic danega poliedra, in ga zrcalimo preko vseh njegovih robov.[29].

Vprašanje 9 *Bi znali (s primerno geometrijsko konstrukcijo) dokazati obstoj katerega od štirih Kepler–Poinsotovih teles (npr. tistega, ki ima za lica same pentagrame)?*

3.5 Nekaj izrekov o poliedrih

O poliedrih je, po raznovrstni znanstveni in strokovni literaturi, raztrosenih ogromno število izrekov. Vendar doslej še ni bil identificiran in kanoniziran nek osnovni, osrednji, standardni korpus problemov, metod in izrekov, ki bi mu lahko rekli *teorija poliedrov*, in ki bi predstavljal osnovo za uçni načrt istoimenskega predmeta.[30]

Izbor najpomembnejših izrekov o poliedrih je tako prepuščen vsakemu piscu o poliedrih, in je tako odvisen od njegovega (neizogibno omejenega) poznavanja področja poliedrov. Med zanimivejšimi izreki je vsekakor treba vsaj omeniti *Cauchejev izrek o rigidnosti* poliedrov (ki navaja pogoje, pri katerih je polieder s svojo incidenčno strukturo lic enolično določen tudi kot telo, vloženo v tridimenzionalni prostor). Prav tako je zanimivo dejstvo, da obstajajo t.i. *fleksibilni poliedri*, pri katerih plašč poliedra dopušča malenkostne deformacije oz. upogibanja lic vzdolž določenih robov poliedra, pri čemer pa se incidenčna struktura lic ohranja.[31]

[27]To je posebni primer splošnejšega načela, ki pravi, da v geometriji ne smemo zaupati geometrijskim slikam. Tako npr. v teoriji konfiguracij (točk in premic) obstajajo primeri, ko se zde nekatere točke na sliki kolinearne, v resnici pa niso, kar ima za posledico, da določeni sestavi točk in premic, za katere bi po njihovi sliki lahko (zmotno) sklepali, da so konfiguracije, to v resnici niso!

[28]Včasih se lahko o obstoju določenega telesa prepričamo z d*inamično konstrukcijo*: tako lahko npr. obstoj pentagramske piramide dokažemo tako, da nad vsako stranico pentagrama konstruiramo trikotnik v isti ravnini, nato pa teh pet trikotnikov z isto hitrostjo dvigujemo oz. rotiramo okrog ustreznega roba pentagrama; slejkoprej bodo njihovi vrhovi hkrati dosegli simetralo osnovne ploskve in njihovo presečišče bo vrh pentagramske piramide.

[29]Tehnične podrobnosti te konstrukcije lahko zainteresirani bralec najde npr. v članku *Wythoff construction* na spletni strani: https://en.wikipedia.org/wiki/Wythoffconstruction.

[30]Tako bo npr. vsak matematik, ki bi ga vprašali, ali obstajajo kakšni fundamentalni izreki v teoriji poliedrov, v zadregi dejal, da zagotovo obstajajo, vendar bi moral o tem, kateri so ti izreki, najprej malo razmisliti. Za primerjavo, če bi matematiku zastavili podobno vprašanje v zvezi z linearno algebro, bi takoj odgovoril, da le-ta obravnava sisteme enačb, determinante in matrike, lastne vektorje in lastne vektorje ter linearne preslikave med vektorskimi prostori, za vsako od teh področij pa bo lahko brez težav navedel ključne izreke.

[31]Glej npr. članek *Fleksibilni poliedri* na http://www.logika.si/poliedriCDsl/flexibilnipoliedri.pdf

Med bolj znanimi izreki o poliedrih pa vendarle obstaja eden, ki vsakemu matematiku najprej pride na misel, in sicer *Eulerjeva poliedrska formula*.[32]

3.6 Metode in orodja za študij poliedrov

Obstaja veliko metod za študij poliedrov. Te metode so lahko geometrijske, lahko pa tudi algebraične oz. kombinatorične. Za sferične poliedre so uporabne tudi formule sferne trigonometrije.

Danemu poliedru lahko priredimo najrazličnejše objekte, ki nam povedo različne različne stvari oz. vsebujejo ključne informacije o njegovi (geometrijski, algebraični ali kombinatorični) strukturi. Tako lahko npr. danemu poliedru P priredimo

- poliedrsko mrežo (ali ga rekonstruiramo iz nje)
- *Schleglov diagram*, ki pregledno kaže strukturo sosednosti vseh lic (popači pa obliko lic)
- neke druge poliedre, kot so npr. *dualni polieder* $Du(P)$, *prisekani polieder* $Tr(P)$, *medial* $Me(P)$, *petrial* Pe(P). Te poliedre dobimo iz danega poliedra s posebnimi transformacijami.

Uniformnemu poliedru lahko priredimo tudi njegovo *strukturno formulo lic*. Tako je npr. $P_3T_4 = 5_3 3_4$ strukturna formula poliedra, ki ima tri petkotniška lica in štiri trikotniška lica. Priredimo mu lahko tudi njegov *ogliščni vzorec* (ciklično zaporedje lic okrog oglišča), npr. (6.6.3). Poliedru lahko priredimo tudi zapletenejše objekte, kot so npr. graf praporov (poseben opis kombinatorične strukture lic poliedra) in določimo t.i. simetrijski graf ter fundamentalno domeno poliedra.

Lahko tudi raziščemo simetrije poliedra (rotacijske in zrcalne) oziroma (na zahtevnejšem nivoju) določimo t.i. grupo simetrij poliedra. Predvsem od 19. stoletja dalje so ključno orodje za raziskovanje strukture poliedrov njihove *simetrijske grupe* $S(P)$, katerih elementi so tiste *izometrije* (t.j. preslikave, ki ohranjajo razdalje) evklidskega prostora E^3 (vrtenja in zrcaljenja)[33], ki ohranjajo plašč poliedra (delujejo kot avtomorfizmi na plašču poliedra).[34]

[32] To je ena izmed najuporabnejšimi formulami v zvezi s poliedri. Pravi, da je (za določen razred poliedrov, npr. za vse konveksne poliedre) $v - e + f = 2$, kjer je v število oglišč, e število robov, f pa število lic poliedra.

[33] Izometrije prostora E^3 je klasificiral že Euler (1776), izometrije E^2 pa francoski geometer Chasles (1831). Obstaja preprosta karakterizacija izometrij: *Izometrija, ki fiksira dve točki, je bodisi zrcaljenje bodisi identiteta. Izometrija, ki fiksira natančno eno točko, je produkt dveh zrcaljenj.* (G. Martin, *Transformation Geometry*, Springer, New York, 1982, str. 34).

[34] Morebitne avtomorfizme plašča, ki bi lahko ohranjali 1-skelet poliedra, pa ne bi bili porojeni iz izometrij prostora E^3, smo torej z našo definicijo izključili iz obravnave – niso elementi grupe $S(P)$.

Pri študiju poliedrov (in grup) si lahko pomagamo tudi s sferno trigonometrijo. Tako sta npr. Coxeter in Moser s pomočjo Girardove formule za ploščino sferičnega trikotnika

$$pl(\Delta(\alpha, \beta, \gamma)) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

pokazala, da obstaja le končno mnogo simetrijskih grup poliedrov oziroma grup, ki ustrezajo relacijam

$$R^p = S^q = (RS)^2 = I.$$

Geometrijska interpretacija te grupe pokaže, da je le-ta neskončna, kadarkoli je

$$(p-2)(q-2) \geq 4.$$

Ta rezultat avtorja smatrata za *enega najčudovitejših prispevkov geometrije k algebri.* (Coxeter, Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Springer, Berlin, etc. 1957 str. 37).

3.6.1 Transformacije poliedrov

Doslej smo se ukvarjali s posameznimi poliedri (ali s posameznimi družinami poliedrov). Povsem nove perspektive se nam odpro, če preučujemo več poliedrov naenkrat in raziskujemo, kakšne relacije obstajajo med različnimi poliedri, ali iz katerih osnovnih gradnikov (poliedrov) se da zgraditi vse elemente dane družine poliedrov (npr. vsa Johnsonova telesa).[35]

Med poliedri namreč obstajajo najrazličnejše *sorodstvene vezi.* Tako lahko npr. arhimedska telesa dobimo iz platonskih z operacijo prisekanja v vsakem oglišču. Za opis različnih transformacij poliedrov matematiki uporabljajo različna orodja (kot so npr. matrike), pa tudi različne oznake (npr. Conwayevo notacijo).[36] Z razvojem teorije poliedrov nenehno odkrivajo nove in nove relacije med poliedri.

3.6.2 Simetrije poliedrov

Mnogi poliedri (predvsem tisti, ki se večini ljudi zdijo najbolj lepi) imajo bogate simetrije (oziroma simetrijske grupe). Pri preučevanju teh simetrij so matematikom v veliko pomoč t.i. *Coxeterjeve grupe*, od novejših orodij pa omenimo samo *grafe praporov* in njihove kvociente (glede na ustrezno simetrijsko grupo) – *simetrijske grafe.*

[35] Analogno situacijo imamo npr. v matematični analizi, kjer se nam odstro poprej skrite sorodnosti med funkcijami, ko definiramo operacijo odvajanja $f \mapsto f'$, ali ko se sprašujemo, kako dano funkcijo zapisati kot vsoto oz. funkcijsko vrsto samih sinusnih valov.

[36] Conwayeva poliedrska notacija omogoča konstrukcijo velikega števila poliedrov iz enostavnejših teles, npr. iz platonskih teles, prizem in antiprizem, pravzaprav iz poljubnih konveksnih teles, na katerih lahko definiramo določene operacije (kot je npr. operacija prisekanja, ki jo je poznal že Kepler). Dobljena telesa imajo enake simetrije kot prvotna telesa. S Conwayevimi operacijami lahko dobimo vsa arhimedska in Catalanova telesa iz regularnih poliedrov. Z zapovrstno uporabo več operacij dobimo vse bolj zapletena telesa.

3.6.3 Poliedrske mreže

Poliedrska mreža je takšna razgrnitev plašča poliedra v ravninski lik, pri kateri smo plašč razrezali le vzdolž določenih robov poliedra (posamezna lica so torej ostala cela, nerazrezana).

Med prvimi, ki so se ukvarjali s poliedrskimi mrežami, je bil slikar Albrecht Dürer.

V zvezi s poliedrskimi mrežami obstaja eden večjih nerešenih problemov:

Problem 3 *Ali ima vsak konveksen polieder poliedrsko mrežo?*

3.7 Pripomočki za študij poliedrov

Obstaja precej pripomočkov za študij poliedrov.

- Knjige in članki o poliedrih (dajejo največ informacij in najbolj zaokrožen pogled; v njih so zbrani in predstavljeni različni rezultati, izreki, formule o poliedrih, obravnavan pa je tudi zgodovinski kontekst.)

- Spletne strani (tam najdemo podatke o poliedrih, poliedrskih mrežah, slike vseh poliedrov posameznih razredov – platonskih, arhimedskih, Johnsonovih teles, uniformnih poliedrov, itd.)

- Programska in spletna orodja v zvezi s poliedri (slike poliedrov lahko, npr. z orodjem *Great Stella*, vrtimo in si jih ogledujemo iz različnih strani.)

- Konference o poliedrih in zborniki s teh konferenc (v njih najdemo npr. pregled najnovejših rezultatov, idej, pobud v zvezi z možnostjo vpeljave poliedrov v pouk matematike, itd.)

- Modeli, zbirke in slike poliedrov (so nepogrešljivi, kadar si želimo ustvariti natančno prostorsko predstavo o strukturi posameznih zapketenejših poliedrov, npr. nekonveksnih uniformnih poliedrov).

Danes so matematikom pri študiju poliedrov (poleg tridimenzionalnih modelov teles, katerih konstrukcijo je za 119 najenostavnejših (najpravilnejših) teles lepo opisal M. Wenninger v knjigi *Polyhedron models*, (1974) in raznih sestavljank za konstrukcijo poliedrov) v veliko pomoč tudi računalniški programi (npr. *Great Stella*, *Mathematica*). Računalniška orodja (npr. Great Stella) omogočajo tudi lepe vizualizacije poliedrov, vrtenje njihovih slik, iskanje simetrijskih osi in ravnin, ipd. Kombinatorični vidik poliedrov postaja vse zanimivejši tudi zaradi možnosti uporabe računalnikov, npr. pri računanju raznih njihovih parametrov, ali učinkov določenih transformacij na njih. V Sloveniji je za dostopnost informacij o poliedrih in njihovo popularizacijo med mladino veliko naredil dr. Izidor Hafner, npr. z revijo *Logika in razvedrilna matematika.*

4 Uporabe poliedrov

S poliedri se niso intenzivno ukvarjali le matematiki, ampak tudi umetniki, naravoslovni znanstveniki, filozofi, kozmologi, arhitekti, konstruktorji, oblikovalci, in drugi. Zaradi tega imajo poliedri veliko več uporab v življenju kot večina drugih matematičnih pojmov. Posledično se pri preučevanju poliedrov in njihovega pomena ter vpliva na družbo ne moremo omejiti le na njihove strogo matematične lastnosti, ampak moramo razumeti tudi njihovo povezavo z različnimi vidiki življenja.

4.1 Poliedri v naravi in umetnosti ter znanosti

Poliedrske strukture so pogoste v naravi, nastopajo pa tudi v umetnosti. Primeri:

- Mnogi kristali imajo obliko pravilnega poliedra, npr. kocke ali tetraedra. Vidimo jih bodisi s prostim očesom ali z mikroskopom. V rudnikih najdemo različne poliedrske kristale (npr. 16 kristalnih oblik zlata).[37].
- Nekatere živali imajo poliedrske oblike, kot npr. škrlatni morski ježek iz Peruja, ali pa morski enoceličar radiolaria, katerega slike je narisal Ernst Haeckel na svojem potovanju s Charlesom Darwinom.
- Nekateri virusi imajo obliko skeleta ikozaedra (kot je poročal The New York Times 12. februarja 1985).
- Nekatere žuželke, npr. čebele, gradijo satovje v obliki šestkotniških prizem (kar jim omogoča optimalno izrabo protora ob minimalni porabi materiala)
- Različne agregacije poliedrov najdemo tudi pri rastlinah.
- Pri risanju (npr. zgradb, ljudi, živali in rastlin) si slikarji pomagajo tako, da si zapletene oblike najprej narahlo skicirajo kot sestavljene iz preprostih poliedrskih oblik, npr. kock, kvadrov, piramid in prizem (pa tudi iz okroglih, stožčastih in valjastih oblik).
- Risanje poliedrov v perspektivi je kar zahteven problem. Neko tako telo je naslikano na slavni Dürerjevi sliki *Melanholija*.
- Leonardo da Vinci je risal skelete poliedrov z *odebeljenimi robovi*, pri katerih lahko vidimo tudi lica v ozadju, ki so sicer pogledu opazovalca skrita. Takšna *prazna lica* so kasneje vodila do zanimanja za lica, katerih robovi ne ležе vsi v isti ravnini (pravilni poliedri s takšnimi lici do nedavnega še niso bili povsem klasificirani).

[37]Sliko (iz knjige G. Heck's 1851 *Iconographic Encyclopedia*), ki prikazuje veliko poliedrov, ki nastopajo kot oblike kristalov, lahko bralec najde na spletni strani: https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/crystals.html

- V našem času je umetnik M. C. Escher prikazal regularne poliedre na mnogo načinov: Npr. škatlo za piškote je oblikoval v obliki ikozaedra z morskimi zvezdami in školjkami. Znano sliko *Reptiles* (Plazilci) bi lahko imenovali tudi *platonska uganka*, saj se v njej skriva vseh pet pravilnih teles![38]

Poliedrske strukture srečamo tudi v arhitekturi, kemiji, fiziki.

- Spomnimo se le na piramide v Egiptu, Mehiki, itd. Moderna prozorna piramida je tudi v Parizu, pri vhodu v muzej Louvre. Piramide je rad uporabljal tudi slovenski arhitekt Jožef Plečnik. Mnoge moderne konstrukcije stavb (npr. njihovih kupolastih streh) imajo poliedrske oblike. Primer uporabe poliedrov v arhitekturi je npr. Nacionalna knjižnica Belorusije, zgrajena 1922, ki ima obliko *rombikuboktaedra.* Ameriški paviljon na svetovni razstavi Expo'67 je imel obliko *fulerena* (tako imenovanega po izumitelju Buckiminster Fullerju) s trikotniškimi lici, ki so se srečala po 5 in 6 v posameznih ogliščih.

- Strukturo atomov in njihovih vezi v kemijskih molekulah si dostikrat poenostavljeno ponazarjamo s fizičnimi modeli, ki jih sestavljamo iz preprostih poliedrov (tetraedrov, kock, dodekaedrov). Tako npr. molekulo metana ponazarjajo kot tetraeder z atomi v središču in ogliščih tetraedra.

- Slavna uporaba poliedrov v fiziki je Newtonova uporaba steklene prizme za razstavitev belega svetlobnega žarka na različne barvne pramene.

- V filozofiji in alkimiji so pet pravilnih teles tradicionalno povezovali s t.i. petimi elementi (vodo, ognjem, zemljo, zrakom in etrom). Kepler je s pravilnimi petimi platonskimi telesi, vgnezdenimi drug v drugega okrog skupnga središča, poskušal razložiti ustroj našega osončja oz. razmerja razdalj med (tedaj znanimi) planeti.

4.2 Poliedri pri pouku matematike

Poliedri so zelo uporabni, a še veliko premalo uporabljani) pri pouku matematike.

- Uporabni so predvsem pri pouku geometrije, ki je danes v osnovni in srednji šoli pogosto zanemarjena. V reviji *Logika in razvedrilna matematika* lahko najdemo veliko mrež poliedrov, iz katerih lahko učenci sestavljajo modele poliedrov. Danes so na voljo tudi številne sestavljanke, pri katerih poliedre sestavljamo iz različnih osnovnih gradnikov, npr. iz lesenih ali plastičnih okvirjev v obliki pravilnih mnogokotnikov, ki jih zlagamo v poliedrski plašč, ali pa iz magnetnih paličic za robove in kovinskih kroglic za oglišča. Lahko pa so osnovni gradniki

[38]Več informacij (in obilico slikovnega gradiva) o poliedrih v umetnosti zainteresirani bralec najde na spletni strani: https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/art.html.

tudi preprosta telesa (npr. kocke, tetraedri, prizme, itd). Na ploskvah teh gradnikov so lahko narisani tudi različni vzorci (npr. barvne črte), ki jih je treba zložiti tako, da se ob robovih ujemajo.

- Poliedri so zelo primerni tudi za študij simetrij in nazorno ponazoritev (delovanja) simetrijskih grup.[39]

- Eulerjevo poliedrsko formulo bi lahko (z učiteljevo pomočjo v obliki zastavljanja primernih vprašanj) učenci višjih razredov osnovne šole z induktivnim raziskovanjem odkrili oz. uganili sami.

- Skeleti poliedrov (njihova oglišča in robovi) tvorijo modele grafov in so lahko lep uvod v študij (simetrij) grafov oz. motivacija za študij teorije grafov.

- Zanimivo je tudi opažati različne strukturne lastnosti posameznih poliedrov, ugotavljati različne kombinatorične lastnosti poliedrov, računati različne parametre poliedrov in klasificirati poliedre.

- Zanimiva naloga je tudi risati in raziskovati različne sklenjene krivulje, ki potekajo po licih (ploskvah) danega poliedra in se transverzalno nadaljujejo preko robov lic danega poliedra (ali preko skupnih robov več kopij istega poliedra).

- V verjetnostnem računu je mogoče pravilne poliedre uporabljati kot modele slučajnih spremenljivk, pri katerih elementarni dogodki nastopajo z verjetnostmi $P(A) = \frac{1}{n}$, kjer je $n \in \{4, 6, 8, 12, 20\}$.

4.3 Poliedri in igre

Obstaja ogromno iger in sestavljank s poliedri. Nekatere so namenjene predvsem zabavi, druge tudi raziskovanju poliedrov.

Pri *Hamiltonovi ikozaedrski igri* je treba položiti 20 paličic na robove ikozaedra tako, da povežejo vseh 20 oglišč v cikel.

Slavna je npr. *Rubikova kocka* $3 \times 3 \times 3$ (obstajajo tudi njene posplošitve na druga platonska telesa). Manj znana je *Rubikova kača* (iz tetraedrov).

Že predšolski otroci zlagajo kocke v konstrukcije, ki jim matematiki rečejo *polikocke* (angl. *polycubes*). Obstajajo številne sestavljanke (npr. *Soma cube*), kjer je treba iz takih polikock iz 3, 4 ali 5 kock sestaviti večje strukture) npr. kocko $4 \times 4 \times 4$ ali $5 \times 5 \times 5$. [40]

[39] Danes, ko so na voljo računalniški programi, ki poleg prikaza slik posameznih teles iz osnovnih družin poliedrov (npr. platonska telesa, Johnsonova telesa, uniformni poliedri) omogočajo tudi rotacije slik poliedrov ter prikaze njihovih simetrijskih osi in preštevanje njihovih oglišč, robov in lic, bi bilo poliedre mogoče preučevati na še posebej privlačne načine.

[40] S polikockami lahko predstavljamo tudi *vozle* (in jih tako modeliramo z diskretnimi strukturami). Teorija vozlov je ena zanimivejših modernih matematičnih teorij.

5 Zgodovina poliedrov

Ko se namesto s teorijo poliedrov, (za katero smo že ugotovili, da zaenkrat še ne obstaja v neki zaključeni, aksiomatski obliki) začnemo ukvarjati z zgodovino poliedrov, pridemo v nekem smislu z dežja pod kap: težave z obilico možnih deficij poliedra zamenja fragmentarnost ohranjenih zgodovinskih virov!

Cena, ki jo moramo plačati za to, ker (zaenkrat še) ne znamo definirati poliedra, je ta, da bomo težave z nejasnostjo definicije poliedra morali zamenjati za težave z nezanesljivostjo sklepov, izpeljanih na podlagi fragmentarnih virov o tem, kaj so starodavni matematiki sploh vedeli o poliedrih. Vseeno smo pripravljeni plačati to ceno, ker upamo, da se bomo na tej poti naučili dovolj, da bomo nazadnje znali poliedre vsaj definirati.

Fragmentarnost in nepopolnost ohranjenih zgodovinskih virov (o poliedrih) in težavnost njihove interpretacije ni majhen problem. Tako tudi zgodovina poliedrov kot daljša študija ali knjiga še ni napisana.

Joseph Malkevitch iz Columbia University, pisec članka o 23 mejnikih v zgodovini poliedrov, pravi, da je "*poskus rekonstruirati znanje starodavnih matematikov o poliedrih primerljiv s tem, da bi naši zanamci čez nekaj tisoč let skušali sklepati o našem matematičnem znanju iz Rubikove kocke, najdene na nekem arheološkem najdišču.*"[41]

Malkevitch pravi tudi, da je presenetljivo, da ne obstaja nobena izčpna knjiga o zgodovini poliedrov, da pa so se na srečo štirje moderni klasiki teorije poliedrov (Brückner, Coxeter, Fejes-Toth in Grünbaum) zanimali tudi za zgodovinske informacije in so v svojih knjigah priskrbeli tudi številne zgodovinske opombe.[42]

5.1 Nekaj mejnikov v zgodovini poliedrov

Pregled zgodovine poliedrov začnimo (sledeč Malkevichu) z morda najznamenitejšimi poliedrskimi objekti, veličastnimi egipčanskimi piramidami. Inženirsko in matematično znanje, potrebno za njihovo konstrukcijo, zastavlja vprašanje:

Vprašanje 10 *Kaj so egipčanski geometri vedeli o poliedrih in o geometriji nasploh, in kako je to znanje vplivalo na razvoj (starogrške in s tem zahodne) matematike?*

[41]Situacijo lepo ponazarja duhovita stripovska risba Eda Fischerja iz časopisa New Yorker: sličica prikazuje muzejski kip, imenovan "človek"; ima tri noge, dve glavi, in medsebojno zamenjana stopala in dlani. Dva Marsovca gledata kip, in eden pravi: "*Res je neverjetno, kaj lahko naši znanstveniki rekonstruirajo iz samo nekaj kosti in fragmentov.*" Takšno naj bi bilo po Malkevitchevem mnenju stanje našega znanja glede tega, kaj so starodavni matematiki dejansko vedeli o poliedrih!

[42]Še en razlog več, da se je vredno odpraviti na pot raziskovanja zgodovine poliedrov! Pri vsakem mejniku (iz omenjenega članka) se bomo ustavili le na kratko. Če bo kateri od njih posebej pritegnil vašo pozornost, in ga boste šli raziskovat naprej še sami, boste zagotovo našli še veliko zanimivih podrobnosti. Prav podrobnosti, ki jih matematik v svoji težnji po abstrakciji odmišlja, so za zgodovinarja matematike najbolj zanimive!

Naše (žal zelo skromno) poznavanje egipčanske geometrije temelji na dveh papirusih: to sta *Rhindov papirus* in *Moskovski papirus*.[43] Rekonstrukcija matematične vsebine obeh papirusov je bila pravo detektivsko delo.[44]

5.1.1 1. mejnik: Prostornina prisekane kvadratne piramide

Zdi se, da se 14. problem Moskovskega papirusa (okrog 1890 pr. Kr.) nanaša na prostornino prisekane piramide z dolžinama osnovnih ploskev a in b in višino h, in da so Egipčani poznali formulo:[45]

$$V = (h/3)(a^2 + ab + b^2).$$

Vendar v tekstu ni podana nobena takšna formula, problem pa je rešen za povsem konkretno prisekano piramido, katere zgornja ploskev je bil kvadrat s stranico 2, spodnja pa kvadrat s stranico 4, in z višino 6 dolžinskih enot. Dobljena prostornina je 56 prostorninskih enot, kar je pravilen rezultat.[46] Če posamezne številske vrednosti pretvorimo v črke a, b, h, lahko rekonstruiramo njihov postopek in se prepričamo, da so prostornino prisekane kvadratne piramide res računali "po zgornji formuli". Ali ni zelo zanimivo, da se da iz posameznega primera uganiti splošno metodo?

Vprašanje 11 *In kako bi ocenili pedagoško vrednost predstavitve matematičnega postopka na tak način – s konkretnim številskim primerom?*

Za nas, vajene algebraičnega, simboličnega reševanja nalog, je to gotovo nenavadno, a morda le ni tako slabo: učenec se mora namreč aktivno potruditi, da iz posameznega primera izlušči postopek, in si ga potem verjetno lažje zapomni, kot če bi samo memoriziral formulo, podano na abstrakten, algebraičen način.[47]

[43] Rhindov papirus je 33 cm širok, več kot 5m dolg, napisan v hieratični pisavi, prepisal ga je pisar Ahmes, hrani ga British Museum v Londonu. Transkribirali in matematično prevedli so ga v poznem 19. stoletju. Vsebuje, kot pravi Ahmes, *natančna navodila za raziskovanje vseh stvari, in znanje o vseh stvareh, misterijih ... vseh skrivnostih.* Moskovski papirus vsebuje 25 problemov.

[44] Iz teh dveh papirusov je zelo težko razbrati, za kakšno vrsto računov sploh gre, saj nikjer ni eksplicitno navedeno: *Zdaj bomo pa izračunali to in to!* Samo iz teksta naloge in računa s konkretnimi številkami je treba razbrati uporabljeno splošno, nikjer specificirano metodo (formulo). Če nekoliko karikiramo, eksplicitno nista podana ne problem ne rešitev! Zgodovinarji matematike so morali opraviti pravo detektivsko delo, ko so poskušali dešifrirati te papiruse!

[45] Ni pa jasno, kako naj bi egipčanski geometri odkrili to formulo! Razne hipoteze so bile predlagane, vendar gre za same špekulacije. Ni tudi nobenega dokaza, da bi Egipčani poznali formulo za volumen piramide (čeprav le-ta trivialno sledi iz zgornje formule za $a = 0$; za $a = b$ pa iz zgornje formule dobimo formulo za volumen prizme).

[46] Originalni tekst vsebuje samo najnujnejša konkretna navodila za računanje, ne pa razlage ali utemeljitve samega postopka, in se glasi takole: *Če ti je rečeno: prisekana piramida, 6 za navpi vcno višino in 4 na bazi in 2 zgoraj: kvadriraj 4; dobiš 16. Podvoji 4; dobiš 8. Kvadriraj to 2; dobiš 4. Seštej 6 in 8 in 4; dobiš 28. Odvzemi 1/3 od 6; dobiš 2. Odštej 28 dvakrat; dobiš 56. Vidiš, rezultat je 56. Ugotovil boš, da je pravilen.*

[47] Je torej mogoče, da naše pedagoške metode niso vselej boljše od starih, "primitivnih"? Smo današnji matematiki dovolj odprtega duha, da lahko dopustimo tudi takšno "heretično" možnost?

5.1.2 2. mejnik: Prostornina piramide

Arhimed (okrog 250 pr. Kr.) poroča, da je Demokrit (konec 5. st. pr. Kr.) vedel, da je volumen piramide enak

$$\text{V} = (1/3)\ (\text{ploščina osnovne ploskve}) \times (\text{višina}),$$

in da je dokaz te trditve podal Evdoks (okrog 409–okrog 356 pr. Kr.) z *metodo izčrpavanja.* To metodo je uporabil tudi Evklid v *Elementih*, Arhimed pa jo je uporabil za izračun ploščine kroga (oziroma za izračun števila π oziroma razmerja med obsegom in premerom kroga).

Analiza problema, diskusija.

Poizkusimo se vživeti v problem starogrških matematikov: *Kako izračunati prostornino piramide?* To je moral biti za antične matematike kar velik dosežek. Integralnega računa še ni bilo. Formule še niso poznali. Ena stvar je bila rezultat uganiti, druga pa dokazati. Kaj je težje: rezultat uganiti ali dokazati? Formulo $V = Ov/3$ bi lahko uganili na več načinov. *Kako? Se lahko sami domislimo katerega? Kako je razmišljal Demokrit?*[48] Preverimo našo hipotezo o tem z brskanjem po virih! *Kaj poroča o Demokritu zgodovinar Plutarh?*[49]

Čeprav se da formulo za prostonino piramide morda *uganiti*, pa je za korektno *izpeljavo* oz. dokaz formule za prostornino piramide torej očitno potrebna takšna ali drugačna metoda integralnega računa.

[48]Če ne vemo, pa ugibajmo! Če malce špekuliramo (pozor, to je čista špekulacija, brez opore v virih!): O Demokritu vemo, da je bil kot filozof atomist. Torej o piramidi ni mogel razmišljati drugače kot o sestavljeni iz majhnih kock! Tako bi npr. četrtina kvadratne piramide imela (gledano od vrha navzdol) n plasti z $1+4+9+\cdots n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ kockami. V primerjavi s kocko z osnovnico dolžine n je to približno 1/3, če je n velik, saj je lahko ugotovil (tudi, če gornje formule ni poznal, samo z opazovanjem razmerij), da velja, če n raste v neskončnost: $(1+4+9+\cdots+n^2)/n^3 \to 1/3$. To bi zanj lahko bil že tudi dokaj prepričljiv argument (če že ne dokaz), da je prostornina piramide enaka tretjini prostornine kocke!

[49]Plutarh poroča o Demokritu in njegovi dilemi, ali naj presek stočca z ravnino zelo blizu ("*infinitezimalno blizu*") osnovne ploskve smatramo za neeenakega ali neenakega osnovni ploskvi (v prvem primeru bi imel stožec "*stopnice*" (podobno kot npr. egipčanske piramide), v drugem pa bi bil enak valju: *Kaj naj si mislimo o ploskvah, ki tvorita ta preseka? Sta enaka ali neenaka? Kajti, če sta neenaka, potem bo stožec iregularen, in bo imel mnoga nazobčanja, kot stopnice, in neravnosti; če pa sta enaka, bosta preseka enaka, in stožec bo dozdevno imel lastnosti valja, in bo narejen iz enakih, ne pa neenakih krogov: kar je zelo absurdno.*

Iz vsakega vira se lahko naučimo česa novega. Tako se ohranjeni drobci slike počasi začenjajo sestavljati v (še vedno nepopoln) mozaik! T. L. Heath, prevajalec Evklida v angleščino, v knjigi *Greek Mathematics*, komentira omenjeni Demokritov citat takole: *Besede "narejen iz enakih, ne neenakih krogov" kažejo, da se Demokrit že imel predstavo o telesu kot vsoti neskončnega števila ravninskih plasti, vzporednih druga drugi, neskončno tankih, in neskončno blizu druga drugi: idejo, ki jo je Arhimed kasneje uporabil v svoji Metodi. Ta ideja je morda bila tudi v korenu Demokritovega odkritja, da je prostornina piramide ena tretjina prizme z enako osnovnico in višino."* Nadalje izvemo iz citatov drugih avtorjev, ki jih omenja Heath, da je Demokrit verjel le v nedeljivost nekaterih teles (atomov), da pa kot matematik ni verjel, da bi bile kakšne daljice nedeljive!

Omeniti velja, da je ugibanje formule lepa pedagoška priložnost, da naredimo (onsovnošolski) pouk matematike (oz. geometrije, s pomočjo poliedrov) privlačnejši: učence v razredu bi lahko spodbudili, da sami razmišljajo o vprašanju:

Vprašanje 12 *Kakšna je prostornina (kvadratne) piramide v primerjavi s prostornino kocke z enako osnovno ploskvijo in višino?*

Namesto da jim takoj povemo formulo, jim lahko pomagamo priti do rešitve z zastavljanjem sokratskih vprašanj (tako kot je Sokrat celo neizobraženega sužnja uspel postopoma privesti do odkritja, da je kvadrat nad diagonalo kvadrata ploščinsko dvakratnik prvotnega – in s tem posredno pokazal tudi, da je do nekaterih preprostih matematičnih rezultatov mogoče priti tudi s "filozofiranjem")!

Resnici na ljubo je treba povedati, da so zelo zgodaj znali izračunati prostornino piramide tudi Kitajci. Liu Hui (3. st. po Kr.) s pomočjo limitnega procesa (oz. rekurzivnega postopka delitve piramido na vse manjše in manjše dele) izpelje prostornino piramide s pravokotno osnovno ploskvijo in eno stranico, pravokotno nanjo.[50]

Zgodba o piramidi in kocki z enakima prostorninama je dobila presenetljivo nadaljevanje na začetku 20. stoletja. Od takrat vemo, da so liki enake ploščine *skladni po razdelitvi* (Bolyai–Gervinov izrek), telesa iste prostornine pa ne (rezultat Maxa Dehna). Za razliko od trikotnika, ki ga zlahka pretvorimo v končno mnogo likov, iz katerih lahko sestavimo ploščinsko enak kvadrat, se pravilnega tetraedra ne da razdeliti na končno mnogo delov, iz katerih bi sestavili kocko enake prostornine![51]

5.1.3 3. mejnik: Thetetus iz Aten (okrog 415–369 pr. Kr.)

Tretji mejnik v zgodovini poliedrov najdemo v stari Grčiji. Mimogrede ponuja (učitelju zgodovine in filozofije matematike) tudi lepo priložnost za diskusijo s študenti o starogrški matematiki, ki se lahko začne npr. z vprašanjem:

[50]Za razliko od Evklidove rešitve, pri kateri (tako kot to praviloma velja za dokaze v *Elementih*) ne vemo, kako so se starogrški matematiki domislili določene konstrukcije ali rešitve, je Liu Huijeva rešitev precej bolj intuitivna. Takšni primeri kažejo, da je pri poučevanju matematike vredno upoštevati in primerjati različne epistemološke in metodološke perspektive. Pričakovati je, da bodo zgodovinarji in učitelji v prihodnosti še tesneje sodelovali pri oblikovanju zanimivih učnih vsebin (vir: Wann–Sheng Horng, *Euclid versus Liu Hui: A Pedagogical Reflection*).

[51]Hilbertov doktorand Max Dehn je leta 1900 pokazal, da se pravilnega tetraedra ne da razrezati na končno mnogo manjših delov, iz katerih bi se dalo sestaviti kocko (in s tem kot prvi rešil enega od znamenitih Hilbertovih 23 problemov iz leta 1900). Skica dokaza: Za vsak polieder P, Dehn definira t.i. *Dehnovo invarianto* $D(P)$ (tehnične podrobnosti definicije nas tu ne zanimajo), ki ima naslednjo lastnost: če P razrežemo na dva poliedrska kosa P_1 in P_2 z enim ravnim rezom, potem je $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$. Od tod sledi: če P razrežemo na n poliedrskih kosov $P_1, \dots, P_n$, potem je $D(P) = D(P_1) + ... + D(P_n)$, in posebej: Če sta dva poliedra kongruentna po razdeljivosti, potem imata isto Dehnovo invarianto. Nato pokaže, da ima vsaka kocka Dehnovo invarianto nič, medtem ko ima vsak pravilni tetraeder ne-ničelno Dehnovo invarianto. To reši zadevo.

Vprašanje 13 *Katere starogrške matematike (in morda njihova dela) poznate?*

Omenimo le nekaj imen (za lažjo časovno orientacijo po starogrški matematiki). Podatke o teh in drugih starogrških matematikih, podobne tistim, ki so za zgled podani spodaj o Talesu, bo vsak, ki ga to zanima, zlahka dopolnil sam, najde jih npr. na Wikipediji, bolj zahteven bralec pa npr. v Heathovi knjigi.

- Tales iz Mileta (okrog 624–547 pr.Kr.) je prinesel znanje o egiptovski matematiki v Grčijo. Državnik, inženir, trgovec, filozof, matematik, astronom. Leta 582 je bil razglašen za enega izmed Sedmih modrih. Bil je prvi, ki je dokazal trditve, kot je na primer ta, da sta v enakokrakem trikotniku kota ob osnovnici enaka.[52] Njegova je tudi maksima: *Spoznaj samega sebe.*
- Pitagora (okrog 570–490 pr. Kr.)
- Hipokrates iz Kiosa napiše prve *Elemente* (okrog 430 pr. Kr.)
- Theodorus iz Cyrene (460–390 pr. Kr.), izvrsten geometer
- Evdoks (410–355 pr. Kr.): metoda izčrpavanja
- Evklid (okrog 300 pr. Kr.): *Elementi*
- Apolonij iz Perge, Arhimed iz Sirakuze (okrog 250 pr. Kr.)

Thetetus je razvil *splošno teorijo pravilnih teles*; posebej, dodal je oktaeder in ikozaeder k trem telesom: tetraedru, kocki in dodekaedru, ki so bila znana že pitagorejcem. Ta teorija je vključena tudi v Evklidove *Elemente.* Verjetno je (tako meni T. L. Heath, prevajalec Evklida v angleščino), prav Thetetus našel tudi razmerje med stranico dodekaedra in radijem očrtane sfere (Evklid, *Elementi*, XIII, 17).

Thetetus nastopa tudi v istoimenskem Platonovem dialogu skupaj s svojim učiteljem matematike Theodorom. Opisan je kot mlad, grd, a izredno pameten fant. V tem dialogu skupaj s Sokratom išče definicijo znanja. Čeprav je ne najdeta, ta dialog nenehno fascinira raziskovalce Platonovega dela. (vir: Internet Encyclopedia of Phylosophy, Plato: Theaetetus).

Nadaljnja diskusija o tej temi ilustrira naslednje načelo, ki je prav tako pogosto uporabno pri delu zgodovinarja matematike:

Načelo 4 *Niso vse zgodovinske zgodbe enako zanesljive! Več virov ko najdemo, bolj se izkristalizira, kaj je res in kaj ni.*

[52] Te trditve, ki je vključena tudi v Evklidove *Elemente*, se je oprijelo ime Pons asinorum (oslovski most), kajti kdor ne razume njenega dokaza, naj ne bi bil sposoben za učenje matematike. Za primerjavo, da bomo lahko bolje cenili epohalnost tega Talesovega dosežka, povejmo, da se njegovim predhodnikom takih stvari ni zdelo potrebno dokazovati, medtem ko je današnjim matematikom matematika brez dokazov takorekoč nezamisljiva, enako nesmiselna kot npr. okrogel kvadrat.

V zgodovini matematike je vselej treba iskati čim starejše vire. Tako npr. Proclus poroča, da naj bi že Pitagora poznal vseh pet "*kozmičnih figur*" (t.j. pravilnih teles). Drugi raziskovalci pa to zanikajo in pravijo, da je poznal le tri. Proclus navaja še zgodbo o Pitagorejcu Hippasusu, ki je prvi objavil odkritje, kako sferi včrtati dodekaeder. Umrl je v brodolomu, to odkritje pa so mu pripisali pomotoma, "*čeprav je dejansko pripadalo NJEMU, kajti tako so imenovali Pitagoro, in ga niso klicali po njegovem imenu.*" Iz tega citata si lahko ustvarimo približno predstavo, kakšen ugled oziroma strahospoštovanje je užival Pitagora med svojimi učenci.

Vprašanje 14 *Kaj še povedo stari viri o platonskih telesih?*

Eden od t.i. *sholionov* (opomb, zapisanih v razširjeni izdaji *Elementov*) pravi: "*V tej knjigi, 13. knjigi Elementov, je konstruiranih pet teles, ki se imenujejo platonska, čeprav ne pripadajo Platonu. Tri od teh figur, kocka, piramida in dodekaeder, pripadajo Pitagorejcem, medtem ko oktaeder in ikozaeder pripadata Thetetusu.*"Kaj natančno tu pomeni "*pripadajo*"? Joseph Malkevitch gornji citat komentira takole: "*Ker so bili Grki zainteresirani predvsem za konstrukcije z ravnilom in šestilom, je bil morda on prvi, ki je našel takšne konstrukcije za te poliedre. Morda so vseh pet objektov poznali kot telesa že prej.*"

To je povsem mogoče, kajti pravilne poliedre najdemo tudi v naravi. Poznali so jih že Etruščani. Ohranjenih je kar nekaj primerkov, npr. iz brona.

Pravilne poliedre so ljudje gotovo poznali že veliko prej, preden so jih Grki obravnavali kot "*idealne*" matematične objekte, ki obstajajo kot ideje v "Platonovih nebesih", in ki jih materialni modeli (npr. iz papirja, lesa ali kamna) le ponazarjajo.

"*Takšne oblike so lahko našli v različnih kristalih (npr. fluoritovi kristali imajo pogosto obliko oktaedra, piritovi pa dodekaedra).*"

"*Najstarejši ohranjen dodekaedrski objekt, ki ga je izdelal človek, izhaja iz časov pred Pitagorejci. Gre za dodekaedrsko obliko z vrisanimi znamenji, ki so jo našli pri izkupavanjih na Mt. Loffi v Italiji blizu Padove.*"

"*Obstajajo določeni lingvistični indici, da dodekaeder prvotno ni bil znan pod tem imenom, ampak so mu rekli sfera z 12 pentagoni. Morda se je teorija razvijala tako.*" (vir: Joseph Malkovitz)

Zanimivo je, da zadnji citat potrjuje tudi naslednji vir (Neolithic Carved Stone Polyhedra, glej https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/neolithic.html), ki pravi: "*Na stotine izrezbarjenih kamnitih sfer, približnega premera tri inče, ki domnevno datirajo okrog 2000 pr. Kr., so našli na Škotskem. Nekateri imajo vrezane črte, ki ustrezajo robovom pravilnih poliedrov. ... Dodekaeder se pojavi tukaj veliko preden so Grki pisali o njem.*"

Tako nam torej trenutno najstarejši odkriti poliedrski artefakti dokazujejo, da so ljudje o poiedrih najprej razmišljali kot o sfernih poliedrih! To je samo še en dokaz več, da se je "*definicija poliedra*" skozi zgodovino zelo spreminjala!

5.1.4 4. mejnik: Platonov dialog Timaj

Platon (428–348 pr. Kr), ki je bil Thetetusov prijatelj, je vključil svoje poznavanje petih platonskih teles v svojo kozmologijo, razloženo v dialogu *Timaeus* (Timaj). To je pomembno za *zgodovino poliedrov*, kajti prav obnovljeno zanimanje za klasične tekste v renesansi (glej npr. Rafaelovo sliko *Atenska šola*) in povezovanje Platona s temi telesi je verjetno pomagalo ohraniti znanje o njih živo skozi tako dolgo obdobje. Za *filozofijo matematike* pa je zelo pomembno naslednje opažanje oz. misel: *Pravilni poliedri so bili pravo utelešenje grške filozofske ideje o harmoniji, ki vlada v kozmosu.* Platon je vsakega od teh teles povezal z enim od elementov:

- kocka = zemlja,
- ikozaeder = voda,
- tetreaeder = ogenj,
- oktaeder = zrak,
- dodekaeder = resnični svet (svet idej).

Podobno interpretacijo najdemo tudi pri Aristotelu. Ta Platonov dialog je navdihoval tudi atomske fizike (glej knjigo Werner Heisenberg, *Del in celota*).

5.1.5 5. mejnik: Evklid (323–285 pr. Kr.)

Do časa Evklida se je prostorska geometrija že povsem razcvetela.

Knjiga XI *Elementov* obravnava metrične lastnosti poliedrov.

Knjiga XII govori o prostornini prizem in piramid.

Knjiga XIII obravnava pet regularnih poliedrov, in se zaključi z dokazom, da jih je res natanko pet. Evklid nikoli ni definiral poliedra. Iz analize dokaza (v katerem pregleda vse možne načine, na katere lahko okrog oglišča razporedimo same trikotnike, kvadrate ali petkotnike) se vendarle da razbrati, da so zanj pravilna telesa tista, ki imajo skladna lica, v vsakem oglišču pa se jih sreča enako mnogo. Tu je na mestu malce teorije: razlikovati je treba med lokalno in globalno regularnostjo poliedrov.

- *Lokalna regularnost*: okrog vsakega oglišča je enak ogliščni vzorec, npr. (npr. trikotnik–kvadrat–petkotnik–kvadrat).
- *Globalna regularnost*: obstaja izometrija, ki vsako oglišče poliedra prevede v poljubno drugo oglišče. Poliedrom, ki imajo to lastnost, pravimo ogliščno-tranzitivni. Poznamo še lično–tranzitivne in povezavno–tranzitivne poliedre. Ti pojmi se danes uporabljajo tudi v teoriji grafov.

Globalna regularnost implicira lokalno, obratno pa ne velja. Stari Grki so regularnost pojmovali lokalno. Mi pa jo danes pojmujemo kot globalno lastnost, v kontekstu simetrijskih grup, ki ohranjajo dani polieder (njegova vozlišča, povezave, lica).

Dokaz, da pravilnih teles ni več kot pet, še ni dokaz, da se jih sploh da konstruirati! To je treba preveriti za vsako telo posebej. Z obstojem tetraedra, kocke in oktaedra nimamo težav. Ikozaeder in oktaeder sta zahtevnejša.[53]

5.1.6 6. mejnik: Arhimed (287–212 pr. Kr.)

Arhimed je v (zdaj izgubljenem) rokopisu (o katerem poroča Pappus), opisal 13 semiregularnih oziroma arhimedskih teles. Njihov plašč je sestavljen iz mnogokotnikov z različnim številom stranic; okrog vsakega oglišča danega semiregularnega telesa je enak ogliščni vzorec (npr. trikotnik–kvadrat–petkotnik–kvadrat, kar lahko na kratko označimo takole: 3.4.5.4). Zapomnimo si, da gre pri teh telesih, kot jih je Arhimed navedel (pozabil pa definirati), spet za lokalno regularnost, ne pa globalno! Eno lokalno semiregularno telo je Arhimed namreč prezrl, kar pa so odkrili šele v XX. stoletju! O tem več kasneje.

5.1.7 7. mejnik: Pappus (4.st.)

Pappus je (320 n. št.) v svoji *Zbirki* (Knjiga V) poročal o tej izgubljeni Arhimedovi knjigi. Pomembno je, da je eksplicitno navedel, da je teh semiregularnih teles 13, in jih opisal glede na to, koliko poligonov z različnim številom stranic imajo ob vsakem oglišču. Vse kaže, da od časa Pappusa do renesanse ni bilo nobenega sistematičnega poročila o poliedrih. V tem času je zamrlo veliko matematičnih tradicij. Veliko rezultatov je bilo pozabljenih. Nekaj novih rezultatov o poliedrih so imeli arabski matematiki, ki so ohranili in prevajali starogrške tekste. Prav prek njih so le-ti spet prišli v Evropo v času renesanse. Učenjak iz 9. stoletja Thabit ibn Qurra je podal formule za računanje prostornine poliedrov, kot je npr. prisekana piramida. V 10. stoletju je Abu'l Wafa opisal konveksne regularne in kvaziregularne sferične poliedre.

[53]Obstoj ikozaedra lahko najpreprosteje potrdimo tako, da dve petkotniški piramidi prilepimo ob petkotniško antiprizmo (ta je sestavljena iz dveh petkotnikov in desetih trikotnikov). Takšno konstrukcijo ikozaedra najdemo v knjigi John R. Sylvester, *Geometry: Ancient and modern*, str. 142). Lahko pa ga dobimo tudi iz oktaedra, ki mu koherentno orientirane stranice razdelimo v razmerju zlatega reza (Schönemannova konstrukcija iz 1873, opisana tudi pri Coxetru (1948) in Fejes-Tothu (*Regular figures*, str. 105).

Obstoj dodekaedra dokazuje npr. Evklidova konstrukcija pravilnega dvanajsterca z dodajanjem 12 petkotnikov na 12 robov kocke (rob kocke je pri tem identificiran z eno od diagonal petkotnika). Obstoj dodekaedra lahko potrdimo tudi s pomočjo koordinatne geometrije v prostoru! Trikrat po 4 oglišča dodekaedra namreč leže na treh pravokotnih ravninah, in 12 oglišč poliedra lahko postavimo v točke s koordinatami: $(\pm\tau, \pm 1, 0), (0, \pm\tau, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm\tau)$, kjer je $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ število zlatega reza – razmerje med diagonalo in stranico pravilnega petkotnika. (vir: Sylvester, ibid. str. 143)

5.1.8 8. mejnik: Albrecht Dürer (1471–1528)

Dürer, ki je pomembno (teoretično in praktično) prispeval k študiju risanja (poliedrov) v perspektivi (s pomočjo kvadratne mreže v višini slikarjevih oči), je vpeljal tudi koncept študiranja poliedrov s pomočjo poliedrskih mrež. Ko zvijemo ravninsko mrežo vzdolž predpisanih črt in zlepimo robove, dobimo plašč poliedra. Dürer je naredil mreže za dodekaeder in za vsa ostala regularna in semiregularna telesa. Zanimivo je, da je vprašanje: *Ali ima vsak konveksen polieder mrežo?* še do danes nerešeno!

5.1.9 9. mejnik: Renesančni umetniki, arhitekti, in učenjaki

Le-ti "odkrijejo" in "ponovno odkrijejo" različna platonska in arhimedska telesa, zvezdne poliedre, sestavljena telesa in druge poliedrske objekte. Zanimivo je, da nihče od njih ne najde prav vseh 13 arhimedskih teles!

Omenimo le nekatere:

- Paolo Uccello
- Wentzel Jamnitzer (znane so njegove slike poliedrov)
- Piero della Francesca
- Luca Pacioli (avtor knjige *Divina proportione* (napisane v Milanu 1496–98, objavljene v Benetkah 1509).
- Leonardo da Vinci (slike poliedrov s praznimi lici)
- Albrecht Dürer (slika poliedra na znani sliki *Melanholija*)
- Simon Stevin
- Rafael Bombelli

Vprašanje 15 *Zakaj je bilo v renesansi takšno zanimanje za poliedre?*

Zaradi pojava študij o linearni perspektivi in zaradi obnovljenega zanimanja za grške klasike.

Znan je npr. portret Luce Paciolija iz 1495, v ozadju je naslikan rombikuboktaeder iz stekla, do polovice napolnjen z vodo.

Paolo Uccello je avtor mozaika, ki prikazuje ozvezdeni dodekaeder, Marble tarsia (1425-1427), Bazilika Sv. Marka, Benetke.

Wenzel Jamnitzer je znan po delu *Perspectiva corporum regularum* s čudovitimi slikami različnih poliedrov.

5.1.10 10. mejnik: Johannes Kepler (1571–1630)

Študira tlakovanja ravnine s konveksnimi, nekonveksnimi in zvezdastimi poligoni. Dokaže, da obstaja 13 semiregularnih poliedrov in še dve neskončni družini semiregularnih teles, *prizme* in *antiprizme*, te je Arhimed spregledal! Konstruira naslednja telesa (ki spet razširjajo našo predstavo o tem, kaj je sploh lahko polieder):

- Stella octangula (sestavljena iz dveh tetraedrov)
- Dva (regularna) zvezdasta poliedra
- Rombski dodekaeder, dual od (3.4.3.4)
- Rombski trikontaeder, dual od (3.5.3.5).

Predstavi model vesolja, v katerem nastopajo platonska telesa. Kepler je v delu *Mysterium Cosmographicum* (1595) zasnoval svoj model vesolja na pravilnih telesih.

Na žalost se v zvezi s poliedri, pa tudi z geometrijo na splošno, ponavlja naslednji vzorec: vse prepogosto ljudje odkrijejo zelo imenitne stvari, potem pa njihovo delo utone v pozabo za dolga obdobja. Tako je bilo z deli Evklida, Arhimeda, pa tudi Keplerja, Descartesa ter Catalana in Steinitza. Keplerjevo delo, po svojem duhu prav moderno, je bilo resno obravnavano šele nedavno. Čeprav ga številni omenjajo, se zdi, da v resnici ni vplivalo na zgodovino poliedrov na noben neposreden način.

5.1.11 11. mejnik: René Descartes (1596–1650)

V Descartesovem izgubljenem rokopisu (1619-1620), ki ga je Leibniz objavil 1820, je naslednji izrek o poliedrih (ni povsem jasno, katerih, a verjetno je imel v mislih konveksne poliedre):

Izrek 3 *Vsota defektov vseh oglišč poliedra je* 4π *(kjer je defekt kota ob oglišču definiran kot polni kot minus vsota kotov vseh lic ob oglišču).*

Primer: za kocko vidimo, da je vsota defektov res $8(\pi/2) = 4\pi$, kot trdi izrek.

5.1.12 12. mejnik: Leonhard Euler (1707-1783)

Euler odkrije, da za poliedre velja formula

$$v - e + f = 2,$$

kjer je v število oglišč, e število robov in f število lic.

O tem, za katere poliedre Eulerjeva poliedrska formula dejansko velja, se lahko poučimo npr. iz knjig Imre Lakatos, *Proofs and Refutations* (1976), ter Peter Cromwell, *Polyhedra* (1997).

Da se pokazati: *Descartesov izrek in Eulerjeva poliedrska formula sta logično ekvivalentna* in se dasta zlahka izpeljati drug iz drugega. Vendar Descartes te formule ni poznal, čeprav bi moral do nje narediti le še majhen korak. Vendar o poliedrih ni razmišljal kot o kombinatoričnih objektih. V resnici je bil ta korak velik, delno ga je naredil Euler, ki je vpeljal tudi pomembno razlikovanje med stranico lica in robom med dvema licema (robov je pol manj).

Čeprav Descartesov izrek in Eulerjeva poliedrska formula spadata v različni področji (v poliedrsko geometrijo in topologijo), sta dejansko zelo močno povezana – sta logično ekvivalentna in ju je mogoče izpeljati drugega iz drugega, saj se da pokazati:

$$\text{vsota defektov v vseh ogliščih poliedra} = 2\pi(v - e + f)$$

Čeprav Eulerjeva formula sledi iz dveh Descartesovih stavkov, kar so opazili mnogi, se zdi, da tega nista videla ne Descartes ne Leibniz, ki je rokopis prepisal. Nekateri domnevajo, da je formulo poznal že Arhimed, pa Kepler. Vendar za to ni dokazov.

Obstaja več kot 20 različnih dokazov (in posplošitev) Eulerjeve poliedrske formule (na različne razrede poliedrov). Ti dokazi so praviloma zelo domiselni. Prinašajo pomembne topološke ideje, npr. o *deformaciji* poliedra, ki pa ne spremeni njegovih *kombinatoričnih* lastnosti. Nekateri uporabljajo tudi ideje iz teorije grafov. Nekateri dokazi imajo tudi vrzeli. Predpostavljajo nekaj, kar ni vselej res, oziroma je res le za določene družine poliedrov.

Med najbolj znanimi dokazi Eulerjeve poliedrske formule je Cauchyjev dokaz.[54]

Istočasno ko je Cauchy razvijal svoj dokaz, je švicarski matematik Antoine Jean L'Hullier (1750–1840), profesor matematike na univerzi v Ženevi, zbiral katalog poliedrov, za katere Eulerjeva formula ne velja (lahko bi šaljivo rekli, da je zbiral izjeme, ki potrjujejo pravilo). Našel je tri različne vrste izjemnih primerov.[55]

L'Hullier je podal tudi dokaz, da formula velja za konveksna telesa: dodal je točko v središču telesa in razdelil telo na piramide z vrhom v tej točki. Pokazal je, da zanje formula velja, in da velja za telo, zlepljeno iz teh piramid.

Še en primer poliedra, za katerega Eulerjeva poliedrska formula ne velja, je mali ozvezdeni dodekaeder s pentagramskimi lici. Pri njem je $f = 12, v = 12$ in $e = 30$, torej je $v - e + f = -6$. To je omenil Poinsot (1810), ki je ponovno odkril Keplerjeva dva poliedra z zvezdastimi lici in odkril še dva. Eulerjeva poliedrska formula velja za dve od teh teles, za dve pa ne.

[54] Cauchy je vpeljal pomemben pojem *deformabilnosti.* Njegova ideja je bila: izbrati eno lice poliedra in *transportirati* ostala lica tako, da bi tvorila tlakovanje iz poligonov znotraj tega izbranega lica. Tako dobimo ravninsko omrežje lic (omejenih območij), robov in oglišč, za katerega je znal pokazati relacijo $v + f = e + 1$. Lica je najprej trianguliral, potem pa odstranjeval trikotna lica. Nič od tega ni spremenilo vrednosti izraza $v - e + f$. Vrednost tega izraza za en sam trikotnik pa je 1.

[55] Poliedri prvih dveh vrst imajo kolobarjasta lica z dvema robovoma, ki sta dobljena bodisi z dodajanjem bodisi z odvzemanjem teles vzdolž kakšnega lica. Tretja imajo luknjo – torusna telesa.

Leta 1830 je nove protiprimere našel mineralog Johann Friedrich Christian Hessel: Če npr. dve piramidi staknemo tako, da si delita rob ali pa oglišč, za ta telesa Eulerjeva formula ne velja. Da bi telo torej lahko uvrstili med poliedre, se morata v vsakem njegovem robu srečati natanko dve lici. Mnoga lepa telesa, dobljena z ozvezdenjem ikozaedra, imajo stične vrhove piramid. Naj tudi vsa ta telesa izključmo iz družine poliedrov? Spet smo pri vprašanju: *Kaj so sploh poliedri?*

Ker poliedri niso bili natančno definirani, je to vodilo k nesporazumom glede domene veljavnosti Eulerjeve formule. Izjeme oziroma protiprimere so nekateri označili za patološke ali pa so jih kar prezrli oziroma odslovili kot nepomembne, češ da izrek nikoli ni bil mišljen zanje.

Vprašanje 16 *Za katere poliedre velja Eulerjeva formula? Kako karakterizirati takšne poliedre?*

Grki, in večna matematikov za njimi, je svojo pozornost usmerila na *konveksne* poliedre. Tudi potem, ko so renesančni umetniki našli veliko nekonveksnih poliedrskih oblik, so se matematiki še vedno osredotočali na konveksne. Nekateri od dokazov Eulerjeve poliedrske formule veljajo tudi za nekatere konkavne poliedre. Poskus odkriti bistveno lastnost poliedrov, od katere je odvisno, da se da zanje dokazati ta formula, ni bilo lahko delo. C. Jordan je konveksne poliedre (za katere Eulerjeva formula velja) razdelil glede na njihovo simetrijo v 9. razredov (Brückner, str. 218–220).

Vprašanje 17 *Kaj so poliedri pomenili različnim matematuikom?*

- Za Evklida, Descartesa, L'Hulliera so bili poliedri prostorska telesa.
- Legendre: polieder je telo, katerega površina sestoji iz poligonskih lic.
- V 15. in 16. stoletju so se umetniki začeli osredotočati na površine, ki so obdajale predmete, in so jih razbijali na ravne koščke, kar naj bi pomagalo njihovim konstrukcijam iz perspektive.
- Albrecht Dürer je šel še korak dlje in ustvaril mreže, iz katerih so se dali oblikovati poliedri.
- Kepler je raziskoval tlakovanja ravnine. Njegova zvezdasta poliedra je mogoče razumeti le kot ploskvi, ki sekata sami sebe.
- Cauchy je obravnaval poliedre kot ploskve, sestavljene iz poligonov.
- Tudi Euler je razumel, da je pomembno površje (plašč) telesa.

5.1.13 13. mejnik: Razvoj teorije Eulerjeve poliedrske formule

V zvezi s tem so pomembni:

- Adrian–Marie Legendre (1752–1833), prvi dokaz,
- Augustin Louis Cauchy (1789–1857)
- J. D. Gergonne (1771–1859)
- S. L'Hullier (1750–1840)
- J. Steiner (1796–1863)
- Von Staudt (1798–1867)
- Johann Friedrich Christian Hessel (1796–1872)

Eulerjeva poliedrska formula je spodbudila začetke moderne topologije in študij n-dimenzionalnih poliedrov, $n \geq 4$. Iz nje izhaja koncept *Eulerjeve karakteristike ploskve*, določene z izrazom $\chi = v - e + f$ in z njo tesno povezan *rod ploskve*. Eulerjeva karakteristika vseh platonskih teles (pa tudi vseh konveksnih poliedrov) je $\chi = v - e + f = 2$. Za nekonveksna telesa lahko Eulerjeva karakteristika zavzame vrednosti različne od 2 (tudi nekatera nekonveksna telesa, kot je npr. *veliki ikozaeder*, imajo $\chi = 2$).

Zgodovino razvoja Eulerjeve poliedrske formule je v obliki privlačnega dialoga med učiteljem in učenci povzel Imre Lakatos (1922–1974), v knjigi *Proofs and Refutations* (Cambridge University Press, 1976). Sam dialog zvesto povzema težave in dileme matematikov, ki so prispevali k dokazu Eulerjeve poliedrske formule, s tem pa posredno tudi k razvoju in spreminjanju pojma polieder. Samo sporočilo Lakatosove knjige je veliko globlje od obravnave Eulerjeve formule in razmišljanja o spreminjanju pomena besede polieder. Prinaša eno najpomembnejših sporočil zgodovine matematike: *Matematika se s časom spreminja!*

To velja tako za njene aksiome, izreke, definicije in dokaze, kot tudi za njene različne uporabe, pa tudi filozofske interpretacije njenih osnov. *Aksiomatski pristop* k matematiki (ki se lahko izrodi v verificiranje trditev brez razumevanja ideje originalnih dokazov) ni edini možen; zlasti pri poučevanju matematike je včasih uspešnejši alternativni *razvojni pristop*, ki upošteva nenehno razvijanje matematičnih pojmov in teorij ob zastavljanju novih in novih vprašanj in problemov. Trditve je mogoče aksiomatizirati, zapreti v nek zaključen sistem, vprašanj in problemov, ki so pravo gonilo razvoja, pa ne! Vprašanja so dobrodošla, širijo meje znanega, odpirajo nova področja in spodbujajo nove metode in kritično pretresajo cilje in smisel raziskav. Umetnost zastavljanja pravih, tehtnih vprašanj je zelo pomembna tako za zgodovinarja matematike kot tudi za raziskovalnega matematika (npr. pri prijavi raziskovalnega projekta)!

5.1.14 14. mejnik: Louis Poinsot (1777–1859)

1810 je v delu *Mémoire* odkril širi regularne zvezdaste poliedre, pri čemer je uporabil (oz. dopustil, da imajo) tako *zvezdasta oglišča* kot *zvezdasta lic*a. Dve od teh teles je poznal že Kepler. Eulerjeva formula velja za dva od teh poliedrov, za dva pa ne.

5.1.15 15. mejnik: Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

Cauchy dokaže *izrek o rigidnosti* poliedrov, enega najpomembnejših izrekov v teoriji poliedrov. Poda (najbolj splošno znani) dokaz Eulerjeve poliedrske formule s pomočjo idej iz teorije grafov. Pokaže tudi, da ni drugih regularnih zvezdnih poliedrov kot so tisti, ki sta jih našla Kepler in Poinsot (in da torej obstaja natančno 9 "*regularnih* poliedrov", t.j. 5 platonskih in 4 Kepler–Poinsotova telesa).

5.1.16 16. mejnik: Eugene Charles Catalan (1814–1894)

Catalan (1865) v dolgem članku zelo natančno in sistematično opiše duale arhimedskih teles. Danes jim pravimo Catalanova telesa.[56] Tudi njegovo delo je bilo praktično prezrto in omenjano le v zgodovinskih opombah knjig, napisanih v 20. stoletju.

$$
\begin{array}{lcl}
polieder\, P & \rightarrow & dual\, Du(P) = P' \\
lica\, P & \rightarrow & ogli\check{s}\check{c}a\, P' \\
robovi\, P & \rightarrow & robovi\, P' \\
ogli\check{s}\check{c}a\, P & \rightarrow & lica\, P'
\end{array}
$$

5.1.17 17. mejnik: Max Brückner (1860-1934)

Brückner (1900) v knjigi *Vielecke und Vielfläche* objavi obsežen povzetek znanih rezultatov o poligonih in poliedrih, skupaj z zgodovinskimi opombami. V tej knjigi so tudi zelo lepe slike uniformnih poliedrov, ki so služile kot navdih kasnejšim raziskovalcem. Uniformni poliedri so tisti poliedri (ne nujno konveksni), ki imajo za lica regularne poligone ali regularne zvezde, in so ogliščno–tranzitivni (za vsaki dve oglišči A in B obstaja simetrija poliedra, ki prevede A v B).

5.1.18 18. mejnik: D. M. Y. Sommerwille (1879-1934)

Somerville 1905 opi vs e *psevdo rombikuboktaeder*, imenovan tudi podaljšana kvadratna gyrobikupola oz. Johnsonovo telo J37 (morda ga je poznal že Kepler). Narisal je Schleglov diagram tako rombikuboktaedra kot psevdo rombikuboktaedra. Ta polieder pogosto imenujejo tudi Millerjevo telo; včasih pripisujejo zasluge zanj ruskemu matematiku Ashkanazyju.

[56] Lahko je videti, da operacija dual ohranja družino platonskih teles. Dual kocke je oktaeder, in obratno. Tetraeder je dual samemu sebi. Ikozaeder je dual dodekaedra, in obratno.

Pomembnost tega mejnika je v tem, da kaže, da mnogi dokazi s tega področja geometrije zahtevajo občutljiv preplet teorije in analize–primera–za–primerom. To je še en primer, ki pokaže, da delo prejšnjih raziskovalcev ni bilo povsem korektno.

Vprašanje 18 *In v čem se razlikujeta rombikuboktaeder in psevdo rombikuboktaeder?*

Prvi je globalno, drugi le lokalno ogliščno regularen!

5.1.19 19. mejnik: Ernst Steinitz (1871-1928)

Dal je daleč najpomembnejši prispevek k teoriji poliedrov v zgodnjem XX. stoletju. Okrog 1916 *kombinatorično karakterizira konveksne tridimenzionalne politope.* To delo se je pojavilo v enciklopediji matematike, ki je bila objavljena v nemščini in v francoskem prevodu. Rademacher 1934 objavi dopolnjeno Steinitzevo skoraj dokončano knjigo o poliedrih. Steinitzevo delo, čeprav izjemno pomembno, je bilo pozabljeno vse do leta 1963. Joseph Malkovitch se ob tem sprašuje: *Zakaj se tako pogosto zgodi, da pomembno delo v geometriji pritegne tako malo pozornosti?*

5.1.20 20. mejnik: H. S. M. Coxeter (1907-)

Glavni razlog za študij pravilnih poliedrov je še vedno isti kot v času pitagorjecev, namreč, da njihove simetrične oblike ugajajo našemu umetniškemu občutku.

— H.S.M. Coxeter

Coxeter (in drugi) *razvije koncept regularnosti poliedrov, ki dovoljuje kot lica neravninska lica in lica z neskončno stranicami.* Coxeter (in drugi) predpostavi, da obstaja 75 uniformnih poliedrov (+ klasični primeri: prizme in antiprizme). Opravi pionirsko delo v *poliedrski teoriji grup*, kombinira algebraične in geometrijske tehnike. Tako npr. vseh 17 prostorskih grup izrazi kot podgrupe grup, generiranih z zrcaljenji. Vpelje *Coxeterjeve grupe* in *Coxeterjev simbol.* Njegova knjiga *Regular Polytopes* (1947) povzame vse znano delo o poliedrih, raziskuje nov material, poudari višje dimenzije. Coxeter in Moser sta s pomočjo sferne geometrije pokazala, da je grupa, definirana z relacijami $R^p = S^q = (RS)^2 = E$ (kjer je E identična grupa) neskončna, če je

$$(p-2)(q-2) \geq 4.$$

Od tod sledi, da je končnih grup, ki zadoščajo gornjim relacijam, le končno mnogo. Vpeljala sta pojem *fundamentalne domene ploskve* (to je tisti del ploskve, ki ga grupa simetrij ploskve preslika na celotno ploskev). Coxeterjev simbol grupe, generirane z zrcaljenji je graf, katerega vozlišča ustrezajo generatorjem grupe; dve vozlišči sta povezani le, če za ustrezni zrcaljenji R in S velja $(RS)^m = E$ šele za neki $m \geq 3$.

5.1.21 21. mejnik: George Dantzig (1914–2005)

Leta 1947 razvije *metodo simpleksov* za reševanje problemov linearnega programiranja.[57] Ta prispevek k teoriji poliedrov je nekoliko spregledan. Kot pravi Malkevitch, je Dantzigovo delo povzročilo velik porast raziskovanja strukture poti na poliedrih, kar je bilo zelo pomembno za razvoj kombinatorične teorije.

5.1.22 22. mejnik: Poliedri z regularnimi (poligonskimi) lici

Klasični rezultat, ki pravi: *Obstaja osem deltoedrov – konveksnih poliedrov, katerih lica so enakostranični trikotniki*, sta ponovno odkrila oziroma dokazala Freudenthal in van der Waerden. Naslednje vprašanje je bilo, presenetljivo, dolgo časa prezrto:

Vprašanje 19 *Kateri so konveksni poliedri, ki imajo za lica pravilne poligone?*

Norman Johnson je, okrog 1960, predpostavil, da je takih teles 92 (poleg platonskih, arhimedskih, ter dveh neskončih družin prizem in antiprizem). Johnson, Grünbaum, Zallgaler in drugi dokažejo to Johnsonovo hipotezo. Ta telesa zdaj imenujejo *Johnsonova telesa*.

5.1.23 23. mejnik: Branko Grünbaum (1929-)

Okrog 1962 je Steinitzevo delo reformuliral v jeziku teorije grafov. S tem je bilo mogoče vso kombinatorično teorijo tridimenzionalnih politopov raziskovati v ravnini. Leta 1967 je objavil pomembno knjigo *Convex Polytopes*, v kateri je povzel vse znanje o tem področju do tedaj. Leta 1977 je, razvijajoč Coxetrove ideje, opisal zelo splošen pojem poliedra, kjer je dopuščal zelo različne vrste *regularnih* lic.

5.1.24 24. mejnik: Oživljeno zanimanje za poliedre v zadnjih desetletjih

V zadnjem času zanimanje za poliedre močno narašča. Prirejajo se konference samo o njih (npr. *Shaping Space Conference*). Na njih so predstavljena nova in nova telesa s presenetljivimi simetrijami (zlasti sestavljena telesa iz več kopij pravilnih poliedrov lahko dajo telesa s presenetljivo bogatimi simetrijami), prirejajo se poliedrski sejmi (na katerih so predstavljene tudi različne nove igre in sestavljanke v zvezi s poliedri). Glede na dosedanji razvoj teorije poliedrov je smiselno predpostaviti, da bodo matematiki tudi v prihodnosti odkrivali (definirali in določili) nove in nove poliedre in družine poliedrov. Poliedri bodo, tako kot so v preteklosti in sedanjosti[58], tudi v prihodnosti zagotovo navdihovali tudi umetnike in arhitekte pri oblikovanju poliedrskih skulptur in struktur. Res, poliedri so ponovno vstali kot feniks iz pepela pozabe!

[57] Kot zanimivost omenimo, da je Dantzig na področju statistike rešil dva odprta problema, ki ju je pomotoma imel za domači nalogi, potem ko je zamudil na predavanje Jerzyja Neymana.

[58] Glej npr. poliedrske strukture George W. Harta, prikazane na spletni strani *Geometric Sculpture*, https://www.georgehart.com/sculpture/sculpture.html

6 Zaključek – motivacija za nadaljnji študij poliedrov

Po tem kratkem pregledu nekaterih mejnikov iz zgodovine poliedrov, ki je prikazal razvoj nekaterih najpomembnejših idej v zvezi s poliedri, bo bralcu, ki se zdaj bolje zaveda različnih problemov v zvezi s poliedri, kot tudi raznih pripomočkov, ki nam pomagajo soočiti se s temi problemi, morda laže razmišljati o poliedrih na bolj teoretičen način, in poseči tudi po kakšnem delu, ki poliedre obravnava bolj matematično.

Čeprav v tem gradivu nismo podali neke dokončne definicije tega pojma, si je bralec zdaj že zagotovo uspel izoblikovati lastno predstavo o tem, kaj je polieder.

Še vedno pa ostaja odprto vprašanje (o katerem lahko prav tako razmišlja in si ustvari svoje mnenje vsak bralec sam):

Vprašanje 20 *Ali je mogoče dosedanje rezultate in znanje o poliedrih zaokrožiti v neko sistematično aksiomatsko celoto oziroma teorijo (podobno kot je to storil Evklid v svojem času za geometrijo)?*

V tem učnem gradivu je podan zgoščen pregled zgodovine poliedrov, njihove teorije in njihovih številnih uporab v matematiki in onstran nje.

Čeprav je bilo zasnovano z namenom, podati kar se da celovit pregled tega (sicer praktično neizčrpnega) področja, ni odveč bralca opozoriti, da je v tem delu zbrano le najosnovnejše znanje o poliedrih. Po drugi strani pa je to znanje dovolj obsežno in predstavljeno dovolj natančno in podprto z referencami iz literature, da študentu matematike omogoča nadaljnji (samostojni) študij in poglabljanje v to sicer na prvi pogled elementarno, pa vendar osupljivo globoko in fascinantno področje matematike.

Takšno samostojno (domače) delo študentov, h kateremu je usmerjeno in želi pomagati to učno gradivo, je zelo zaželeno, kajti šele lastno raziskovanje in ukvarjanje s problemi določenega področja matematike prinese boljše razumevanje tega področja.

Za takšno nadaljnje samostojno preučevanje poliedrov je – ob zaključku tega dela, ki želi služiti kot odskočna deska za samostojno domače delo študentov – vsekakor smiselno podati nekaj predlogov in vprašanj, ki naj spodbudijo nadaljnje razmišljanje in raziskovanje (ta seznam pa se seveda da še dopolniti, tudi s predlogi samih študentov). Najprej pa še malo motivacije za nadaljnji študij poliedrov:

6.1 Čemu študirati poliedre še naprej

O motivaciji za študij poliedrov smo nekaj malega povedali že v Uvodu, a vseeno je vredno te misli na kratko ponoviti in razširiti (tudi s konkretnimi predlogi zas delo).

Poliedre je vredno študirati, ker so neizčrpno zanimivi in uporabni v matematiki in drugod. Poliedri so zgleden primer lepih matematičnih objektov. V matematiki ni pomembna le resnica, ampak tudi lepota. Za grdo matematiko ni mesta v njeni zgodovini, ohranijo se le najlepše teorije, izreki, formule, itd. Poliedre so študirali mnogi največji matematiki vseh časov. Odkrili so mnoge zanimive vidike, s katerih lahko preučujemo poliedre. Preučevanje poliedrov naravno spodbuja matematikovo ustvarjalnost. Ob študiju poliedrov in njihove zgodovine mimogrede spoznavamo tudi delo teh matematikov, pa tudi zgodovino matematike različnih časov in kultur, kar je lahko velika spodbuda za lastno učenje in raziskovanje v matematiki.

O poliedrih še zdaleč ne vemo vsega, kar bi bilo vredno vedeti, prej velja obratno: večina je še neodkritega. Prihodnost nam bo zagotovo odstrla še mnoge nove, doslej neznane načine raziskovanja poliedrov, pa tudi nova, presenetljiva odkritja v zvezi z njimi. Morda boste kakšne pomembne rezultate v zvezi s poliedri ali njihovo uporabo (npr. pri pouku matematike, v umetnosti, arhitekturi, konstrukciji različnih objektov, itd.) odkrili prav vi?

6.2 Kako (sistematično) študirati poliedre

Čeprav sodijo poliedri po osnovni razvrstitvi matematičnih področij v t.i. elementarno matematiko oz. geometrijo, so vsekakor lahko tudi vir zahtevnejših matematičnih problemov in teorij.[59] Resen in poglobljen študij poliedrov zahteva vztrajnost in disciplino, prav tako kot katerokoli drugo področje matematike.

Mnogi matematiki si sami naredijo cele zbirke poliedrov. Nekatere od teh zbirk krasijo vitrine matematičnih fakultet. Kot pravi stari kitajski pregovor:

Slišim, pozabim;
vidim, spominjam se;
storim, in razumem.

Zato je, če hočemo bolje razumeti poliedre, dobro, če si sami zgradimo nekaj njihovih modelov. Obstajajo cele knjige z recepti za to. Za začetek poizkusite sami zgraditi nekaj modelov poliedrov iz tršega kartona. Ob tem si pridobivamo občutek za prostorsko predstavo, lažje razumemo tudi razne pojme v zvezi simetrijo poliedrov.

Vsak nov pojem, ki ga spoznamo v zvezi s poliedri (npr. iz predavanj, knjig, člankov, spletnih strani o poliedrih, itd.) bomo bolje razumeli, če si ga bomo skušali razložiti s pomočjo teh konkretnih modelov. Veliko je treba brati dobro literaturo o poliedrih (ne le o njihovi teoriji, ampak tudi o njihovi zgodovini), nato pa reševati probleme v zvezi z njimi, ob tem pa si tudi izmišljati svoje, nove probleme. Lahko poskusite tudi napisati krajši (ali daljši) esej o poliedrih.

[59]Spomnimo se podobne situacije v teoriji števil, kjer so mnoge domneve, ki jih lahko razume vsak osnovnošolec, onstran dosega matematičnih orodij, ki so bila razvita doslej.

6.3 Kako spodbuditi raziskovanje poliedrov

Poliedri so danes zelo popularni. Za njihovo prihodnost se nam ni treba bati. V svetu se (okrog leta 2000 dalje) že prirejajo velike konference, na katerih se zbirajo strokovnjaki z različnih področij in razpravljajo o poliedrih, sestavljajo njihove modele, predstavljajo na novo odkrita telesa z bogatimi simetrijami (npr. dodekaedrsko in ikozaedrsko obenem) itd. Morda boste kdaj tudi sami lahko odkrili kakšne načine, kako bi lahko raziskovanje poliedrov samih, pa tudi njihove zgodovine, približali svojim učencem oz. študentom.

6.4 Še nekaj predlogov za nadaljnje raziskovanje poliedrov

(1) Raziščite in napišite kratko razpravo o tem, kako so poliedri povezani z grafi, in kako preučevanje simetrij poliedrov naravno vodi v preučevanje simetrij pri grafih ter simetrij (tridimenzionalnega) prostora.
(2) Klasificirajte izbrani razred poliedrov (npr. družino poliedrov, ki imajo središčno simetrijo in za lica same pravilne trikotnike ali štirikotnike).
(3) Poizkusite samostojno odkriti (bodisi s teoretično matematično konstrukcijo poliedra bodisi s konstruiranjem fizičnih modelov njegovega skeleta) nekaj nekonveksnih poliedrov, katerih lica se smejo sekati tudi v njihovi notranjosti (primer takšnega telesa je npr. piramida nad pentagramom).

6.5 Sklepna misel

Ta kratki pregled zgodovine poliedrov in skico njihove teorije končajmo z mislijo, da ljudje poliedre že tisoče let raziskujemo ne samo zaradi naše želje po znanju, ampak tudi zato, ker občudujemo njihovo lepoto. Kot se glasijo zaključnih verzi Keatsove znamenite pesmi *Oda grški vazi*:

Beauty is truth, truth beauty – that is all
Ye know on earth, and all ye need to know.

Ali, v slovenskem prevodu:

Lepota je resnica, resnica lepota – to je vse,
kar spoznaš na zemlji, in vse, kar ti je treba spoznati.

6.6 Seznam priporočene literature

Bralca, ki bi želel o poliedrih izvedeti več, še enkrat opozarjamo na izbor najprimernejših del za začetek študija poliedrov ter na obsežen seznam literature o poliedrih, ki ju oba najde v članku: G. W. Hart, *Annotated bibliography (of polyhedra references)*, dostopnem na https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/references.html.

7 Literatura

[1] A. D. Alexandrov, *Convex polyhedra*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

[2] P. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997.

[3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, New York etc. 1989.

[4] H. S. M. Coxeter, W. O. J MOser, *Generators and Relations for Fiscrete Groups*, 1972.

[5] *Shaping Space: A Polyhedral Approach*, Marjorie Senechal, George Flick (Editors), Birkhäuser, Boston, Basel, 1988.

[6] G. W. Hart, *Virtual Polyhedra, The Encyclopedia of Polyhedra,* https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html.

[7] I. Lakatos, *Proofs and refutations, The Logic of Mathematical Discovery*, 1976.