UNIVERZA NA PRIMORSKEM
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Matematične metode – teorija, izbrana poglavja

doc. dr. Jurij Kovič

DRUGO UČNO GRADIVO
46 strani

Sredozemsko kmetijstvo, dodiplomski študijski program

PRVA IZDAJA

Koper, 2020

Kazalo

Predgovor

To učno gradivo je namenjeno študentom programa Sredozemsko kmetijstvo. Prav tako ga lahko s pridom uporabijo tudi drugi študentje nematematičnih smeri za predmet Matematika 1.

Uvodnima poglavjema o logiki in množicah sledita poglavji o preslikavah in številih (naravnih, celih, racionalnih, realnih in kompleksnih). Sklop o linearni algebri obravnava vektorje, matrike in determinante ter sisteme linearnih enačb. Sklop o matematični analizi se začne z obravnavo zaporedij in vrst, sledijo poglavja o zveznosti, limiti, odvodu in integralu, numerični integraciji ter funkcijah več spremenljivk.

Dobro razumevanje teorije, predstavljene v tem gradivu, je trdna osnova za vse nadaljnje delo, tako za praktično reševanje nalog kot tudi za aplikativno uporabo matematičnih metod v specifičnih problemskih sklopih, značilnih za posamezme študijske usmeritve.

1. LOGIKA

1.1. **Izjave.** Izjave (trditve) označujemo s črkami: $p, q, r, \ldots$

*Logična vrednost izjav*e je 1 , če je izjava resnična/pravilna, in 0, če je izjava neresnična/nepravilna.

1.2. **Operacije z izjavami/trditvami.** Najpogosteje uporabljamo naslednje operacije:

Konjunkcija izjav p in q je resnična natanko tedaj, ko sta resnični izjavi p in q.
Disjunkcija izjav p in q je resnična natanko tedaj, ko je resnična vsaj ena od izjav p in q.
Implikacija izjav p in q je neresnična natanko tedaj, ko je izjava p resnična, izjava q pa neresnična.
Ekvivalenca izjav p in q je resnična natanko tedaj, ko sta izjavi p in q obe resnični ali obe neresnični.
Negacija izjave p, ki jo označimo $\overline{p}$, je resnična natanko tedaj, ko je izjava p neresnična.

Primer. Negacija izjave p: Dežuje. je izjava $\overline{p}$: Ne dežuje.
Negacija izjave q: Ceste so mokre. je izjava $\overline{q}$: Ceste niso mokre.

1.3. **Logični vezniki.** Za označevanje operacij med izjavami uporabljamo logične veznike, kot so:
$\wedge$ (in) za konjunkcijo
$\vee$ (ali) za disjunkcijo,
$\Rightarrow$ (implicira) za implikacijo,
$\Leftrightarrow$ (je ekvivalentno) za ekvivalenco
Zapis $p \Rightarrow q$ pomeni, da iz trditve p sledi trditev q, oziroma, da če velja p, potem velja q.
Zapis $p \Leftrightarrow q$ pomeni, da iz p sledi q, iz q pa sledi p.

1.4. **Resničnostne tabele.**

		konjunkcija	*disjunkcija*	*implikacija*	*ekvivalenca*
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Z resničnostnimi tabelami preverjamo resničnost sestavljenih izjav. Izjava je resnična, če so v stolpcu, ki pripada ključnemu logičnemu vezniku, same enke.

Primer. Zmeraj velja naslednje pravilo sklepanja: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
1	1	0	0	1	**1**	1
1	0	0	1	0	**1**	0
1	1	0	0	1	**1**	1
1	0	0	0	1	**1**	1

Primer. Iz $p \Rightarrow q$ ne sledi $q \Rightarrow p$.

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\Rightarrow$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	**1**	1
1	0	0	**1**	1
0	1	1	**0**	0
0	1	1	**1**	1

Primer. Iz $p \Rightarrow q$ ne sledi $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q)$	$\Rightarrow$	$(\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$
1	1	0	0	1	**1**	1
1	0	0	1	0	**1**	1
1	1	0	0	1	**0**	0
1	0	0	0	1	**1**	1

Resničnost sestavljene izjave ni odvisna od vsebine posameznih izjav, iz katerih je sestavljena, ampak le od njihovih logičnih vrednosti, tj. od njihove resničnosti ali neresničnosti.

1.5. **Lastnosti operacij z izjavami.** Omenimo le nekatere:
$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ (Negacija negacije izjave je ekvivalentna prvotni izjavi.)

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (komutativnost)

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (asociativnost)

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ in
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributivnost)

$\overline{p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
$\overline{p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ (De Morganova zakona)

1.6. **Kvantifikatorji.** V matematiki in logiki se pogosto uporabljajo tudi naslednji simboli:
$\forall$ ... za vsak
$\exists$ ... obstaja vsaj en
$\exists!$ obstaja natanko en

2. MNOŽICE

2.1. **Osnovni pojmi.** *Množica* je matematičen objekt, ki sestoji iz manjših objektov −*elementov.* Množico podamo bodisi z naštevanjem vseh njenih elementov bodisi z opisom lastnosti njenih elementov. Oznake:

$a \in A$ ... a je element množice A
$a \notin A$ ... a ni element množice A

Primer. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ vsebuje 4 elemente, $B = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$ vsebuje en sam element, množico A.

$A \subseteq B$ ... množica A je *podmnožica* množice B natanko tedaj, ko je vsak element množice A tudi element množice B, tj. $(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$.
$A \nsubseteq B$ ... množica A *ni podmnožica* množice B natanko tedaj, ko obstaja vsaj en element množice A, ki ni element množice B, tj. $(\exists x)(x \in A) \wedge (x \notin B)$.

Enakost dveh množic definiramo takole:
$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$, tj. dve množici sta *enaki*, če vsebujeta natanko iste elemente.

Pogosto nas zanimajo podmnožice dane množice. Definiramo jih takole:
$A \subset B$ ... A je *prava podmnožica* množice $B \Leftrightarrow A \subset B$ in $A \neq B$

Ena od podmnožic vsake množice je tudi prazna množica. Definiramo jo takole:
$\emptyset = \{\}$ ... *prazna množica* je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

Pogosto so vse množice, ki nas zanimajo pri obravnavi določenega problema, podmnožice ene in iste množice, ki ji v tedaj rečemo univerzalna množica.
U ... *univerzalna množica* (vsebuje vse obravnavane podmnožice)

2.1.1. *Družine množic.* Naj bo I neka neprazna *indeksna množica*, za katero velja, da je za vsak $i \in I$ definirana množica A_i. Potem je ustrezna *družina množic* $A := \{A_i \mid i \in I\}$.
Presek družine A je $\cap_{i \in I} = \{x \mid x \in A_i$ za vsak $i \in I\}$.
Unija družine A je $\cup_{i \in I} = \{x \mid x \in A_i$ za neki $i \in I\}$.

2.1.2. *Moč množice.* Množica je končna, če ima končno mnogo elementov. *Moč* (končne) množice je število njenih elementov.

2.2. **Operacije z množicami.** *Presek* množic: $A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
Unija množic: $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
Razlika množic: $A - B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
Simetrična razlika množic: $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$
Komplement množice: $A^C := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
Kartezični produkt množic: $A \times B := \{(x, y) \mid x \in A, x \in B\}$
Potenčna množica: $P(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$

2.2.1. *Nekatere lastnosti operacij z množicami.* Poglejmo si nekaj najvažnejših lastnosti:

Lastnosti preseka:
$A \cap B = B \cap A$
$(A \cap B) \cap C) = A \cap (B \cap C)$
$A \cap B \subseteq A$ in $A \cap B \subseteq B$
$A \cap A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

Lastnosti unije:
$A \cup B = B \cup A$
$(A \cup B) \cap C) = A \cup (B \cup C)$
$A \subseteq A \cup B$ in $B \subseteq A \cup B$
$A \cup A = A$
$A \cup \emptyset = A$
$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

Distributivnost:
$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Razlika (ali diferenca) množic:
$A - B \neq B - A$
$A - A = \emptyset$
$A - \emptyset = A$
$(A - B) - C = A - (B - C)$

Simetrična razlika:
$A \triangle B = B \triangle A$
$A \triangle A = \emptyset$
$A \triangle \emptyset = A$
$A \triangle B = (A \cup B) - (B \cap A)$

Univerzalna množica in komplement:
$\overline{\overline{A}} = A$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$A \cap A^C = \emptyset$
$A \cup A^C = U$
$\overline{\emptyset} = U$
$\overline{U} = \emptyset$
$A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$
$A = B \Leftrightarrow A^C = B^C$
$A - B = A \cap B^C$

Kartezični produkt:
$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$

3. PRESLIKAVE

3.1. **Preslikave.** Naj bosta A in B neprazni množici. *Preslikava* $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu $a \in A$ priredi natanko en element $f(a) \in B$. Množico A imenujemo *domena* ali *definicijsko območje* funkcije f in jo označimo z $D(f)$, množico B pa *kodomena*. Elementom iz domene pravimo *originali*, elementom iz kodomene pa *slike*. Množici vseh slik množice A pravimo *zaloga vrednosti* preslikave f in jo označimo z $Z(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.

3.1.1. *Enakost preslikav.* Preslikavi $f : A \to B$ in $g : C \to D$ sta *enaki* natanko takrat, ko velja: $A = C$, $B = D$ in $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in A$.

3.1.2. *Zožitev preslikave, razširitev preslikave.* Preslikava $g : A' \to B'$ je *zožitev* preslikave $f : A \to B$, če je $D(g) = A' \subseteq A = D(f)$ in $Z(g) = B' \subseteq B = D(f)$ in je $g(x) = f(x)$ za vsak $x \in A'$. V tem primeru pravimo tudi, da je preslikava f *razširitev* preslikave g.

3.1.3. *Graf preslikave. Graf preslikave* $f : A \to B$ je množica vseh urejenih parov $G(f) = \{(x, f(x) \mid x \in A\} \subset A \times B$.

3.1.4. *Kompozitum preslikav. Kompozitum preslikav* $f : A \to B$ in $g : B \to C$ je preslikava $g \circ f : A \longrightarrow C$, katere funkcijski predpis je $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

3.1.5. *Lastnosti preslikav.* $f : A \to B$ je *injektivna*, če ima poljuben par različnih originalov različni sliki, tj. če za vse $x_1, x_2 \in A$ velja: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, oz. ekvivalentno, če velja $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
$f : A \to B$ je *surjektivna*, če je vsak element iz kodomene B slika vsaj enega elementa iz domene A, tj. če za vsak $x \in B$ obstaja vsaj en $x \in A$, da je $y = f(x)$, oz. ekvivalentno, ko je $Z(f) = B$.
$f : A \to B$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

3.1.6. *Inverzna preslikava.* Naj bo $f : A \to B$ bijektivna. Njej *inverzna preslikava* je preslikava $f^{-1} : B \to A$, za katero velja $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.
Inverzna preslikava k preslikavi f^{-1} je preslikava f. Velja: $D(f^{-1)}) = Z(f)$ in $Z(f^{-1}) = D(f)$.
Kompozitum bijektivnih preslikav $f : A \to B$ in $g : B \to C$ je bijektivna preslikava $g \circ f : A \to C$.

3.2. **Funkcije.** V primeru, da sta domena A in kodomena B preslikave f podmnožici množice realnih števil, pravimo, da je f (*realna*) *funkcija* (*realne spremenljivke*).

3.2.1. *Naravno definicijsko območje.* Naravno definicijsko območje funkcije f je največja množica števil $x \in \mathbb{R}$, za katere ima funkcijski predpis $f(x)$ smisel oz. določa neko realno število. Včasih je funkcija podana samo s funkcijskim predpisom. V tem primeru privzamemo, da je definirana na svojem naravnem definicijskem območju.
Primer. Naravna definicijska območja funkcij, podanih s predpisi $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \ln(x), h(x) = \frac{1+x}{1-x}$, so: $D(f) = [0, \infty)$, $D(g) = (0, \infty)$, $D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$.

3.2.2. *Postopek za iskanje inverzne funkcije.* Funkcijski predpis inverzne funkcijo $f^{-1} : B \to A$ k dani bijektivni funkciji $f : A \to B$ poiščemo takole:
1. Zapišemo $y = f(x)$.
2. Iz gornje enačbe izrazimo x kot funkcijo y, dobimo $x = g(y)$.
3. Zamenjamo x in y, dobimo $y = g(x)$.
4. Tedaj je $f^{-1}(x) = g(x)$.

Velja: Graf inverzne funkcije f^{-1} je simetričen grafu funkcije$f$ glede na zrcaljenje prek simetrale lihih kvadrantov, tj. premice $y = x$.

3.2.3. *Lastnosti funkcij.* Funkcija je na intervalu $I \subset D(f)$:

- *soda*, če velja: $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in D(f)$;
- *liha*, če velja, $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D(f)$;
- *naraščajoča*, če velja, da iz $x_1 < x_2$ sledi$f(x_1) \leq f(x_2)$ za vsak par $x_1, x_2 \in I$.
- *strogo naraščajoča*, če velja, da iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) < f(x_2)$ za vsak par $x_1, x_2 \in I$.
- *padajoča*, če velja, da iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) \geq f(x_2)$ za vsak par $x_1, x_2 \in I$.
- *strogo naraščajoča* $I \subset D(f)$, če velja, da iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) > f(x_2)$ za vsak par $x_1, x_2 \in I$.
- *monotona*, če je naraščajoča ali padajoča na I.
- *periodična* s periodo P, če velja $f(x+P) = f(x)$ za vse pare $x, x+P \in D(f)$.

Primer. Eksponentna funkcija $f(x) = e^x$ in logaritemska funkcija $f(x) = \ln x$ sta strogo naraščajoči na vsem svojem naravnem definicijskem območju. Konstantna funkcija $f(x) \equiv c$ je monotona, saj je naraščajoča in padajoča (ni pa ne strogo naraščajoča, ne strogo padajoča). Funkcija $f(x) = \sin x$ je naraščajoča na intervalih $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, na intervalih $(\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$ pa je padajoča (za vsak $k \in \mathbb{Z}$).

3.2.4. *Ničle funkcije.* Število x_0 se imenuje *ničla* funkcije f, če velja $f(x_0) = 0$.

4. ŠTEVILA

4.1. **Številske množice.** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$\mathbb{N}$ ... množica naravnih števil
$\mathbb{Z}$ ... množica celih števil
$\mathbb{Q}$ ... množica racionalnih števil
$\mathbb{R}$ ... množica realnih števil
$\mathbb{C}$ ... množica kompleksnih števil

4.2. **Naravna števila.** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množica *naravnih števil.* V njej lahko seštevamo in množimo, rezultat je vselej spet naravno število. Množica $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množica *nenegativnih celih števil.*

4.2.1. *Peanovi aksiomi.* Vse lastnosti naravnih števil se da izpeljati iz petih *Peanovih aksiomov*:
1. 1 je naravno število.
2. Vsako naravno število n ima svojega naslednika n^+.
3. Različni naravni števili imata različna naslednika: $m \neq n \Rightarrow m^+ \neq n^+$.
4. 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
5. Če za množico $M \subseteq N$ velja: $1 \in M$, in če iz $n \in M$ sledi $n^+ \in M$, potem je $M = N$. Tej lastnosti pravimo *princip popolne ali matematične indukcije.*

4.2.2. *Postopek dokazovanja trditev/formul s popolno indukcijo.* Sestoji iz treh korakov:
1. (baza indukcije) Preverimo, da trditev velja pri $n = 1$.
2. (indukcijska predpostavka) Predpostavimo, da trditev velja za naravno število $n = k$.
3. (indukcijski korak) Pokažemo, da iz veljavnosti trditve pri $n = k$ velja veljavnost trditve pri $n = k + 1$.
Po načelu popolne indukcije tedaj trditev velja za vsa naravna števila.
Primer. Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $1 + 2 + 3 + \cdot + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Rešitev. Označimo levo stran enačbe $L(n) := 1 + 2 + 3 + \dots + n$, desno stran pa $D(n) := n^2$. Očitno velja $L(1) = 1 = D(1)$. Iz predpostavke, da velja $L(k) = D(k)$ pri nekem $k \in \mathbb{N}$, sledi $L(k+1) = L(k) + k + 1 = D(k) + k + 1 = k^2 + k + 1 = (k+1)^2 = D(k+1)$.

4.3. **Cela števila.** $\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$ je množica *celih števil.* V njej lahko seštevamo, množimo in odštevamo, rezultat je vselej spet celo število.

4.4. **Racionalna števila.** $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ je množica *racionalnih števil*; ulomka $\frac{m}{n}$ in $\frac{m'}{n'}$ predstavljata isto racionalno število natanko tedaj ko je $mn' = m'n$. V množici $\mathbb{Q}$ lahko seštevamo, množimo, odštevamo in delimo (razen z 0), rezultat je vselej spet racionalno število.

4.5. **Realna števila.** $\mathbb{R}$ je množica *realnih števil*; lahko jih zapišemo kot (končne ali nekončne) decimalne ulomke in ponazorimo s točkami na številski premici. Števila iz $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ imenujemo *iracionalna števila.*

Primer. Število $\sqrt{2}$ ni racionalno število.
Dokaz. Če bi se to število dalo zapisati kot $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, kjer sta si števili m in n tuji, potem bi po kvadriranju in množenju z m^2 dobili enačbo $2m^2 = n^2$. Od tod bi sledilo, da je n deljivo z 2, torej oblike $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$, tedaj pa bi iz $2m^2 = 4n^2$ po deljenju te enačbe z 2 sledilo, da je tudi m deljiv z 2, in števili m in n ne bi bili tuji, v nasprotju z začetno predpostavko.

4.5.1. *Urejenost realnih števil.* Realna števila so *urejena*: za vsak par števil $a, b \in \mathbb{R}$ je $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$ in $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ali $a = b$.
V prvem primeru rečemo, da je število *a strogo manjše* od števila *b*, v drugem pa, da je *manjše* od *b*. Množica realnih števil vsebuje *pozitivna* števila (večja od 0), *negativna* števila (manjša od 0) in število nič: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$. Za poljubna realna števila a, b, in c velja:
1. $a < b$ ali $a = b$ ali $a < b$ (zakon trihotomije).
2. Če je $a > b$ in $b > c$, potem je $a > c$ (tranzitivnost).
3. Če je $a > b$, potem je $a + c > b + c$.
4. Če je $a > b$ in $c > 0$, potem je $ac > bc$.
5. Če je $a < b$ in $c < 0$, potem je $ac < bc$.

4.5.2. *Intervali.* Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ lahko definiramo naslednje (zaprte, odprte, polzaprte) *intervale*, podmnožice $\mathbb{R}$, ki pogosto nastopajo v rešitvah neenačb:

$(-\infty, b)$	$[-\infty, b]$	(∞, ∞)
$[a, b)$	$[a, b]$	$[a, \infty)$
(a, b)	$(a, b]$	(a, ∞)

4.5.3. *Okolice.* Odprti interval $(a - \epsilon, a + \varepsilon) = O_\varepsilon(a)$ imenujemo ε-*okolica* točka a. Vsebuje vse točke $x \in \mathbb{R}$, katerih razdalja od točke a je manjša od ε, velja torej $d(x, a) < \varepsilon$. *Punktirana okolica* je okolica brez točke a, vsebuje torej vse točke, za katere je $0 < d(x, a) < \varepsilon$.
Primer. V ravnini $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times R$ je ε-okolica $O_\varepsilon(a, b)$ točke $A(a, b)$ množica vseh točk $T(x, y)$, katerih razdalja od točke A je manjša od ε, velja torej: $d(A, T) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 < \varepsilon}$.

4.5.4. *Odprte in zaprte podmnožice množice* $\mathbb{R}$. Točka se imenuje *notranja točka* množice A, če je neka njena okolica vsebovana v A. Točka je *zunanja točka* množice A, če ima vsaj ena njena okolica prazen presek z A. Točka je *robna točka* množice A, če vsaka njena okolica vsebuje točke, ki so v A, in točke, ki niso v A. Množica, ki vsebuje same notranje točke, se imenuje *odprta*, množica, ki vsebuje vse notranje in vse robne točke, se imenuje *zaprta*.

4.5.5. *Stekališča množic.* Število s je stekališče množice A, če je v vsaki njegovi punktirani okolici vsaj en element množice A.
Primer. Stekališči množice $A = \{(-1)^n \frac{n-1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ sta -1 in 1.

4.5.6. *Omejenost množic.* $A \subseteq R$ je *navzdol omejena*, če obstaja tako število $\alpha \in \mathbb{R}$, da je $x \geq \alpha$ za vse $x \in A$.
$A \subseteq R$ je *navzgor omejena*, če obstaja tako število $\beta \in \mathbb{R}$, da je $x \leq \beta$ za vse $x \in A$.
$A \subseteq R$ je *omejena*, če je navzdol in navzgor omejena.

4.5.7. *Iinfimum, supremum, minimum, maksimum.* Natančna (največja) spodnja meja množice A se imenuje *infimum* A, oznaka $\inf A$. Zanjo velja:
i) $\alpha \leq x$ za vsak $x \in A$, ii) za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neki $x_\varepsilon \in A$, da velja $\alpha + \varepsilon > x_\varepsilon$.
Če je $\inf A \in A$, mu pravimo *minimum* množice A, oznaka $\min A$.
Natančna (najmanjša) zgornja meja množice A se imenuje *supremum* A, oznaka $\inf A$. Zanjo velja:
i) $x \leq \beta$ za vsak $x \in A$, ii) za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neki $x_\varepsilon \in A$, da velja $\beta - \varepsilon < x_\varepsilon$.
Če je $\sup A \in A$, mu pravimo *maksimum* množice A, oznaka $\max A$.

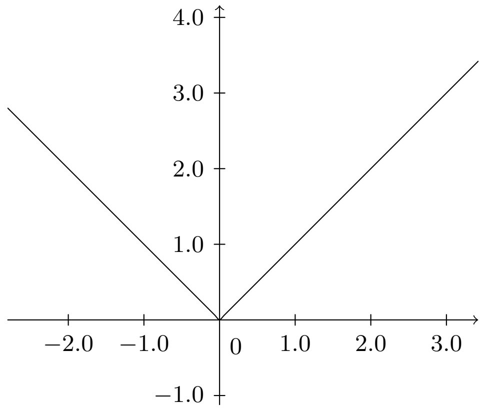
Velja: Vsaka neprazna navzdol omejena množica realnih števil ima infimum; vsaka neprazna navzgor omejena množica realnih števil ima supremum.

Primer. Infimum množice $A = \{\frac{n-1}{n} | n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}, \frac{3}{4}, \dots\}$ je 0, supremum pa 1. Minimum množice A je 0, maksimum pa ne obstaja (ker $\sup A = 1 \neq A$).

4.6. **Absolutna vrednost.** *Absolutna vrednost* realnega števila x, oznaka $|x|$, je definirana takole:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Tako je npr. $|-3| = |3| = 3$. Graf funkcije $y = |x|$ je prikazan na sliki:



Velja: Absolutna vrednost števila x je enaka razdalji točke x na številski premici od izhodišča.

Primer. Neenačbo $|x-1| \geq 2$ rešijo vsa števila $x \in \mathbb{R}$, ki so od 1 oddaljena za vsaj 2, torej vsa števila $x \in (\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

4.6.1. *Lastnosti absolutne vrednosti.* Za absolutno vrednost velja:
(i) $|x| \geq 0$ in $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $|xy| = |x||y|$
(iii) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
(iv) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (trikotniška neenakost)
(v) $|x-y|$ je razdalja med točkama x in y na številski premici.

4.7. **Kompleksna števila.**

4.7.1. *Osnovni pojmi.* Množica kompleksnih števil $\mathbb{C}$ je množica urejenih parov $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, v kateri definiramo seštevanje in množenje takole: za poljubna para realnih števil $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je

$$z + w = (a + c, b + d)$$

$$z \cdot w = (ac - bd, ac + bd).$$

Urejenemu paru $(1, 0) \equiv 1$ pravimo *realna enota*, urejenemu paru $(0, 1) \equiv i$ pa *imaginarna enota*. Vsako kompleksno število lahko zapišemo v obliki $z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$. Številu $x = Re(z)$ pravimo *realna komponenta*, številu $y = Im(z)$ pa *imaginarna komponenta* števila $z \in \mathbb{C}$.

4.7.2. *Ponazoritev kompleksnih števil.* Kompleksna števila si ponazorimo s točkami v *kompleksni ravnini*. Koordinatni osi koordinatnega sistema v kompleksni ravni se imenujeta *realna os* (oznaka Re) in *imaginarna os* (oznaka Im).

4.7.3. *Konjugiranje.* Številu $z = a + ib$ *konjugirano število* je $\bar{z} = a - bi$. Velja:
(i) $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$
(ii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \overline{w}$
(iii) $\overline{\overline{z}} = z$
(iv) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
(v) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$
(vi) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

4.7.4. *Absolutna vrednost kompleksnega števila.* Za $z = a + ib$ je njegova absolutna vrednost

$$| z | = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Velja:
(i) $|z| \geq 0$
(ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
(iii) $|zw| = |z||w|$
(iv) $|\overline{z}| = |z|$
(v) $|Re(z)| \leq |z|$ in $|Im(z)| \leq |z|$
(vi) $|z + w||z| + |w|$ (trikotniška neenakost)
(vii) $|z - w|$ je razdalja med točkama z in w v kompleksni ravnini.

4.7.5. *Polarni zapis kompleksnega števila.* Kompleksno število $z = a + ib$ lahko zapišemo tudi kot

$$z =| z | (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kjer je φ argument kompleksnega števila. Tedaj je $a =| z | \cos\varphi$ in $b =| z | \sin\varphi$.
Polarni zapis je še posebej primeren za množenje, potenciranje in korenjenje kompleksnih števil. Za kompleksni števili $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ velja:

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi),$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),$$

enačba $z^n = w$ ima n rešitev:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\cos(\frac{\psi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\psi + 2k\pi}{n}), k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

4.7.6. *Ničle polinomskih enačb. Osnovni izrek algebre* pravi: Vsak polinom stopnje $n \geq 1$ ima natanko n ničel v $\mathbb{C}$ (upoštevaje njihovo večkratnost).
Če ima polinom same realne koeficiente, nastopajo ničle v konjugirano kompleksnih parih.

5. VEKTORJI

5.1. **Vektorji v $\mathbb{R}^3$.** *Vektor* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ je usmerjena daljica od točke A do točke B. Dolžina vektorja $\overrightarrow{AB}$ je enaka dolžini daljice AB, označimo jo $|\overrightarrow{AB}|$. Dva vektorja sta *enaka*, če se ujemata v dolžini, smeri in usmerjenosti. Vektor lahko torej vzporedno premaknemo, pa ga s tem ne spremenimo.
Ničelni vektor $\overrightarrow{0}$ je vektor dolžine nič, ima isto začetno in končno točko, je brez smeri.
Nasprotni vektor vektorja $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ je vektor $-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BA}$.

5.1.1. *Osnovne operacije.* Poznamo naslednje operacije:
Vsota vektorjev $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$ je vektor $\overrightarrow{a + b} = \overrightarrow{AC}$. Lastnosti vsote:
(i) $\overrightarrow{a + b} = \overrightarrow{b + a}$ (komutativnost)
(ii) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ (asociativnost)
(iii) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$
(iv) $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$
(v) $|(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})| \leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$ (trikotniška neenakost)

Razlika vektorjev $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ je vektor $\overrightarrow{a - b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{CB}$.

Produkt vektorja $\overrightarrow{a}$ *s skalarjem* $\lambda \in \mathbb{R}$ je vektor $\lambda\overrightarrow{a}$ dolžine $|\lambda||\overrightarrow{a}|$, ki je vzporeden vektorju $\overrightarrow{a}$; je enako usmerjen kot $\overrightarrow{a}$, če je $\lambda \geq 0$, če pa je $\lambda < 0$, je nasprotno usmerjen. Lastnosti:
(i) $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
(ii) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$
(iii) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$
(iv) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$
(v) $-1 \cdot \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$

5.1.2. *Linearna kombinacija, linearna neodvisnost.* Če so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, potem imenujemo izraz $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$ *linearna kombinacija* vektorjev $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$. Vektorji $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ *so linearno neodvisni*, ko je $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = 0$ samo v primeru, ko so vsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$.
Velja: Vsaka množica, ki vsebuje ničelni vektor, je linearno odvisna. Neničelna vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ sta linearno neodvisna natanko tedaj, ko nista vzporedna, oz. ko $\overrightarrow{a} \neq \lambda\overrightarrow{b}$ za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$. V ravnini $\mathbb{R}^2$ so poljubni trije vektorji linearno odvisni. V prostoru $\mathbb{R}^3$ so poljubni štirje vektorji linearno odvisni.

5.1.3. *Baza.* Urejeni trojici linearno neodvisnih vektorjev $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ pravimo *baza* prostora $\mathbb{R}^3$.
Velja: Vsak vektor $\overrightarrow{d} \in \mathbb{R}^3$ lahko enolično zapišemo kot linearno kombinacijo poljubnih treh linearno neodvisnih vektorjev $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{d} = \lambda_1\overrightarrow{a} + \lambda_2\overrightarrow{b} + \lambda_3\overrightarrow{c}$. Koeficiente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ imenujemo *koordinate vektorja* v bazi $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ ter pišemo $\overrightarrow{d} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
Podobno, če imamo dva nekolinearna vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ v ravnini, potem lahko vsak drug vektor $\overrightarrow{c}$ v isti ravnini izrazimo kot njuno linearno kombinacijo: $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$.
<u>Primer.</u> Če izberemo za bazna vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ dva nevzporedna (npr. sosednja) vektorja pravilnega šesterokotnika, lahko izrazimo vse diagonale in vse stranice šesterokotnika kot linearno kombinacijo teh dveh vektorjev.

5.1.4. *Skalarni produkt. Skalarni produkt* vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ iz $\mathbb{R}^3$, ki oklepata kot φ, je število

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Kot med vektorjema lahko izračunamo iz formule:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

5.1.5. *Lastnosti skalarnega produkta.* Velja:
(i) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
(ii) $(\lambda\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \cdot (\lambda\overrightarrow{b}), \lambda \in \mathbb{R}$
(iii) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})$
(iv) $(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})$
(leva stran je večkratnik vektorja $\overrightarrow{c}$, desna stran pa večkratnik vektorja $\overrightarrow{a}$)
(v) če sta $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, potem je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ natanko tedaj, ko je $\varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.
(vi) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = 0$
(vii) $|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$. (Cauchy-Schwartzeva neenakost)

5.1.6. *Ortogonalnost.* Dva vektorja sta *pravokotna* (*ortogonalna*), če je njun skalarni produkt enak nič. *Ortogonalna baza* sestoji iz paroma pravokotnih vektorjev. *Normirana baza* je sestavljena iz enotskih vektorjev. *Ortonormirana baza* sestoji iz paroma pravokotnih enotskih vektorjev. *Standardno bazo* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sestavljajo trije paroma pravokotni enotski vektorji v smereh koordinatnih osi x, y, z prostora $\mathbb{R}^3$.

5.1.7. *Računanje s koordinatami v izbrani bazi.* Za $\overrightarrow{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ in $\overrightarrow{b} \equiv (b_1, b_2, b_3)$ velja: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \equiv (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ in $\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.
V standardni bazi $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ velja: če $\overrightarrow{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ in $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, potem je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

<u>Primer.</u> Skalarni produkt vektorjev $(1, 2, 3)$ in $(4, 5, 6)$ je $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 2 + 8 + 18 = 28$.

5.1.8. *Absolutna vrednost (dolžina) vektorja.* Absolutna vrednost in skalarni produkt sta povezana takole:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

V ortonormirani bazi je torej absolutna vrednost vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ enaka $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ je vektor

$$proj_{\vec{a}} \vec{b} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}.$$

5.1.9. *Vektorski produkt. Vektorski produkt* vektorja $\vec{a}$ z vektorjem $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, določen z naslednjimi lastnostmi:
1. Dolžina vektorja $|\vec{a} \times \vec{b}$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, oziroma

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi,$$

kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$,
2. Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$,
3. Ko vektor $\vec{a}$ po najkrajši poti zavrtimo v $\vec{b}$, kaže $\vec{a} \times \vec{b}$ v smeri gibanja desnosučnega vijaka.

5.1.10. *Lastnosti vektorskega produkta:* Velja:
(i) če sta $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, potem je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
(ii) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antikomutativnost)
(iii) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$
(iv) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
(v) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (vektorski produkt ni asociativen)
(vi) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$.

V standardni bazi velja naslednja formula, ki jo pogosto uporabljamo:
če $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} = (b_1, b_2, b_3)$, potem je

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}.$$

5.2. **Enačba premice in ravnine.** Z vektorji lahko opišemo položaj točke, lego premice, daljice in ravnine v prostoru. Iz vektorskih enačb dobimo enačbe za vsako komponento posebej.
V prostoru $\mathbb{R}^3$ si izberemo izhodišče O pravokotnega koordinatnega sistema z osmi x, y, z, na katerih leže vektorji standardne baze $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Lego *točke* $T(x, y, z)$ v prostoru podamo s koordinatami njenega *krajevnega vektorja* $\vec{r} = \overrightarrow{OT} = (x, y, z)$.
Lega *premice* p v prostoru je določena s točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ na njej in smernim vektorjem $\vec{s} = (a, b, c)$ na njej. Naj bo $T(x, y, z)$ poljubna točka na premici s krajevnim vektorjem $\vec{r} = (x, y, z)$.
Vektorska enačba premice p je:

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \times \vec{s} = \vec{0}.$$

Eksplicitna enačba je:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{s}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametrična enačba premice je:

$$x = x_0 + \lambda a$$
$$y = y_0 + \lambda b$$
$$z = z_0 + \lambda c$$

Kanonska enačba premice p je:

$$\frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{b} + \frac{z - z_0}{c}, (a, b, c, \neq 0).$$

Ravnina je v prostoru enolično določena s točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in dvema nekolinearnima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki ležita na njej, ali pa z *normalnim vektorjem* $\vec{n} = (a, b, c)$, pravokotnim na ravnino.

Naj bo $T(x, y, z)$ poljubna točka na ravnini s krajevnim vektorjem $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$.

Parametrična enačba ravnine je:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Vektorska enačba ravnine je:

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$

Implicitna enačba ravnine je:

$$ax + by + cz = d,$$

kjer je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

5.3. **Vektorji v $\mathbb{R}^n$.** *Vektorji* v $\mathbb{R}^n$ so urejene n-terice realnih števil $(a_1, \ldots, a_n)$. Običajno jih zapišemo kot stolpce ali kot transponirane vrstice. Prostor vseh urejenih n-teric realnih števil označimo $\mathbb{R}^n$. V njem lahko analogno kot v $\mathbb{R}^3$ definiramo vsoto vektorjev, produkt vektorja s skalarjem, linearno kombinacijo, linearno neodvisnost, bazo, koordinate; definiramo lahko tudi skalarni produkt, ne pa vektorskega.
Od nič različni vektorji $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ so *linearno neodvisni*, če je edina linearna kombinacija $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots \lambda_m \mathbf{x}_m$ teh vektorjev, ki je enaka nič, tista, ki ima vse koeficiente $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ enake nič. Množica vseh linearnih kombinacij danih vektorjev $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ je njihova *linearna ogrinjača* $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$. Če je $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = \mathbb{R}^n$, rečemo da so $x_1, \ldots, x_m$ *sistem generatorjev* za $\mathbb{R}^n$. Če so poleg tega še linearno neodvisni, rečemo da tvorijo *bazo* prostora n-teric $\mathbb{R}_n$.

Velja: Če so vektorji $x_1, \ldots, x_n$ *linearno neodvisni*, tedaj so koeficienti α_i vektorja $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n$ natančno določeni. Vse baze prostora n-teric imajo moč n.

6. MATRIKE

6.1. **Osnovni pojmi.** *Matrika* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *dimenzije* $m \times n$ je pravokotna tabela števil z m vrsticami in n stolpci.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Število v presečišču *i-te vrstice* $A_{(i)}$ in *j-tega stolpc*a $A^{(j)}$ matrike A označimo a_{ij} in mu pravimo (i, j)-*ti element* matrike.
Dve matriki A in B sta *enaki*, če sta istih dimenzij in imata enake istoležne elemente $a_{ij} = b_{ij}$ za vse indekse i, j.
Množico vseh matrik velikosti $m \times n$ označimo z $M_{m \times n}$. Če so vsi njihovi elementi realna števila, to množico označimo z $\mathbb{R}_{m \times n}$, če so njihovi elementi kompleksna števila, jo označimo s $\mathbb{C}_{m \times n}$.

Primer.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2 \times 3}, \qquad B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{2 \times 2}.$$

Ničelna matrika $0 = 0_{m \times n}$ je matrika, ki ima vse elemente enake 0.
Kvadratna matrika ima enako število vrstic in stolpcev ($m = n$).
Diagonalna matrika je kvadratna matrika, ki ima neničelne elementa $d_{ii} = \lambda_i$ le na glavni diagonali:

$$D = D_n = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Identična ali enotska matrika je diagonalna matrika, ki ima na glavni diagonali same enke.

$$I = I_n = diag(1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

6.2. **Operacije z matrikami.** Poznamo naslednje operacije: transponiranje, seštevanje (in odštevanje) matrik, množenje matrike s skalarjem in množenje matrik.

6.2.1. *Transponiranje.* *Transponirana matrika* dane $m \times n$ matrike $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ je $n \times m$ matrika $A^T = [a_{ji}]_{m \times n}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>Primer.</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.2.2. *Seštevanje.* Seštevamo lahko le matrike istih dimenzij. Vsota matrik $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ in $B\,[b_{ij}]_{m \times n}$ je

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

<u>Primer.</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Velja:
(i) $A + B = B + A$ (komutativnost)
(ii) $(A + B) + C = A + (B + C$ (asociativnost)
(iii) $A + 0 = 0 + A = A$
(iv) $A + (-A) = 0 \qquad (-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ je matriki $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *nasprotna matrika*).

6.2.3. *Množenje s skalarjem.* Produkt matrike $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ in skalarja $\lambda \in \mathbb{R}$ je matrika

$$\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}]_{m \times n}$$

<u>Primer.</u>

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

6.2.4. *Množenje matrik.* Množimo lahko le matriki, pri katerih se število stolpcev prve matrike ujema s številom vrstic druge matrike. Produkt matrike dimenzije $m \times p$ z matriko dimenzije $p \times n$ je matrika velikosti $m \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1p}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2p}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \cdots + a_{mp}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{bmatrix}$$

Element c_{ij}, ki je v i-ti vrstici in j-tem stolpcu produkta $C = AB$, dobimo kot skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Primer.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -2 \\ -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Za $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ ter identično matriko $I_n \in \mathbb{R}_{n\times n}$ je $AI_n = A$ in $I_n B = B$.

Matriki A *obratna ali inverzna matrika* $B = A^{-1}$ je matrika, katere produkt s prvotno matriko je identična matrika $AB = BA = I$.

Matrični produkt ni komutativen, za poljubno izbrani matriki A in B ne velja $AB = BA$. Samo če sta obe matriki kvadratni (in istih dimenzij), sta definirana oba produkta, in še tedaj v splošnem nista enaka.

Primer.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Je pa matrični produkt *asociativen*:

$$A(BC) = (AB)C,$$

distributiven z leve:

$$C(A + B) = CA + CB,$$

in *distributiven z desne*:

$$(A + B)C = AC + BC,$$

ter *homogen*: za vsak skalar c je

$$(cA)B = c(AB) = A(cB).$$

6.3. **Nekatere družine matrik.** Obstaja veliko pomembnih družin matrik. Omenimo le nekatere:
Zgornjetrikotna matrika je matrika, ki ima pod glavno diagonalo same ničle.
Spodnjetrikotna matrika ima same ničle nad glavno diagonalo.
Skalarna matrika $A = cI = diag(c, c, \ldots, c)$ je poseben primer diagonalne matrike, vsi njeni neničelni elementi so enaki.
Permutacijska matrika P ima v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko en neničeln element, in ta je enak 1.
Simetrična matrika se ohranja pri transponiranju (zrcaljenju preko glavne diagonale): $A = A^T$.
Poševno-simetrična matrika zadošča relaciji $A = -A^T$.
Ortogonalna matrika Q zadošča relaciji $QQ^T = Q^T Q = I$.
Involutivna matrika: $A^2 = I$.
Idempotentna matrika: $A^2 = A$.
Nilpotentna matrika: $A^p = 0$, kjer p neko naravno število.

6.4. **Matrike kot preslikave.** Na vektorje lahko gledamo kot na posebne primere matrik. Razlikujemo med vrstičnimi in stolpčnimi vektorji. Produkt matrike dimenzije $m \times n$ in stolpčnega vektorja $n \times 1$ je stolpčni vektor dimenzije $m \times 1$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Primer.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Matrika $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ je torej preslikava $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Stolpci $A^{(j)}$ matrike A ustrezajo slikam enotskih vektorjev $e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, velja torej $Ae_j = A^{(j)}$.

Produkt matrik A in B ustreza kompozitumu ustreznih preslikav, določenih s tema matrikama.

6.5. **Matrike in sistemi linearnih enačb.** *Linearna funkcija n spremenljivk* je funkcija oblike

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Linearna enačba z n spremenljivkami je enačba oblike

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Sistem m linearnih enačb z n spremenljivkami je množica enačb:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kjer so $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ *koeficienti* in $x_1, x_2, \dots, x_n$ *spremenljivke.*

Primer. Primeri linearnih funkcij so

$$f(x) = 3x, \quad g(x,y,z) = -x + 2y + 3z, \quad h(x_1,x_2,x_3,x_4) = -x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4,$$

primeri linearnih enačb so

$$3x = 2, \quad -x + 2y + 3z = 1, \quad x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2,$$

primer sistema linearnih enačb pa je

$$\begin{array}{rcl} x + y + z - 2t & = & 2 \\ 2x - 2z - 3t & = & 4 \\ 5y - z - 8t & = & 11. \end{array}$$

6.5.1. *Matrika sistema, razširjena matrika.* Označimo z

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *matriko koeficientov*
- $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *rešitev,*
- $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ *desno stran sistema.*

Če je $\vec{b} = \vec{0}$, rečemo, da je sistem enačb *homogen*.

Sistem linearnih enačb lahko zapišemo v matrični obliki:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Razširjena matrika sistema ima m vrstic in $n+1$ stolpec:

$$\widetilde{A} = \left[A \mid \vec{b} \right]$$

Primer. Za sistem

$$\begin{aligned} x + y + z - 2t &= 2 \\ 2x - 2z - 3t &= 4 \\ 5y - z - 8t &= 11, \end{aligned}$$

imamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 11 \end{array}\right]$$

Majhne sisteme linearnih enačb že znamo reševati (izrazimo eno spremenljivko iz ene enačbe in vstavimo v druge enačbe, seštevamo in odštevamo večkratnike enačb itd.). Spoznali bomo sistematično metodo za reševanje sistemov linearnih enačb.

6.5.2. *Elementarne operacije na vrsticah.* To so naslednje operacije, ki ne spremenijo rešitev sistema:

- (E1) zamenjamo lahko dve vrstici matrike,
- (E2) eni vrstici lahko prištejemo večkratnik druge vrstice,
- (E3) pomnožimo lahko vrstico z neničelnim številom.

6.5.3. *Gaussova eliminacija.* Naš cilj je z uporabo elementarnih operacij na vrsticah spremeniti matriko v posebno obliko, iz katere je enostavno prebrati rešitve. Metoda se imenuje *Gaussova eliminacija*.

Primer. Metodo si oglejmo na sistemu z razširjeno matriko

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 11 \end{array}\right]$$

ki smo jo priredili sistemu enačb:

$$\begin{array}{ccccl} x & +y & +z & -2t & = 2 \\ 2x & & -2z & -3t & = 4 \\ & 5y & -z & -8t & = 11 \end{array}$$

Gaussova eliminacija poteka takole:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 11 \end{array}\right] \cdot(-2) \quad \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 11 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & -6 & 11 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 44 & 22 & -44 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \end{array}\right]$$

Ali znamo iz gornjega zaporedja matrik rekonstruirati transformacije $(E1)-(E3)$, ki smo jih uporabili?[1]

Končni rezultat je torej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \end{array}\right] \quad \text{oziroma} \quad \begin{array}{rcl} x-t & = & 1 \\ y-\frac{3}{2}t & = & 2 \\ z+\frac{1}{2}t & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2+\frac{3}{2}t \\ z &= -1-\frac{1}{2}t \end{aligned} \qquad \text{oziroma} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobili smo enoparametrično družino rešitev.[2]

6.6. **Sled.** Kvadratnim matrikam priredimo dve pomembni števili, *sled* in *determinanto.*
Sled je vsota diagonalnih elementov: če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

potem definiramo

$$\operatorname{sl} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Primer.

$$\operatorname{sl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 + (-1) + 4 = 4.$$

6.6.1. *Lastnosti sledi.* Pri računanju sledi nam pomagajo njene lastnosti:

- $\operatorname{sl}(A+B) = \operatorname{sl} A + \operatorname{sl} B$
- $\operatorname{sl}(cA) = c \operatorname{sl} A$
- $\operatorname{sl}(AB) = \operatorname{sl}(BA)$ $(\neq \operatorname{sl} A \cdot \operatorname{sl} B)$
- $\operatorname{sl} A^T = \operatorname{sl} A$

Primer. Z uporabo sledi lahko pokažemo, da ne obstajata kvadratni matriki A in B dimenzije $n \times n$, za kateri bi veljalo: $AB - BA = I$. Tedaj bi namreč bila sled leve strani enaka $\operatorname{sl}(AB-BA) = \operatorname{sl}(AB) - \operatorname{sl}(BA) = 0$, sled desne strani pa bi bila enaka n.

[1] V drugi matriki smo drugo vrstico množili z 2. V tretji matriki smo tretjo vrstico prišteli drugi. V četrti matriki smo drugo vrstico pomnožili s 5 in prišteli tretji. V peti matriki smo tretjo vrstico delili s 44. V šesti matriki smo tretjo vrstico pomnožili z 9 in jo prišteli drugi vrstici. V sedmi vrstici smo drugo in tretjo vrstico pomnožili z -1 in ju prišteli prvi vrstici.

[2] Ni potrebno vselej reševati sistema linearnih enačb prav z Gaussovo eliminacijo. Včasih, v kakšnih posebnih primerih, lahko učinkovito uporabimo tudi metodo nasprotnih koeficientov ali pa zamenjalni način. Matematične metode, ki se jih naučimo, moramo uporabljati smiselno, z razmislekom, vselej se splača, preden se vržemo v računanje, pomisliti, katera metoda se najbolj prilega danemu problemu ali nalogi.

6.7. **Determinanta.** *Determinanto* definiramo rekurzivno (preko determinante manjše matrike).

Za 1×1 matriko je determinanta edino število v matriki:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Za 2×2 matriko izračunamo determinanto po formuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Za splošno kvadratno matriko uporabimo *razvoj po prvi vrstici*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Primer.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = -3 + 2 = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -4.$$

Za izračun determinante 3×3 matrike lahko uporabimo naslednje (Sarrusovo) pravilo:

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

To pravilo pravi: Od vsote produktov po treh števil na padajočih treh diagonalah odštej vsote produktov po treh števil na rastočih treh diagonalah.

Primer.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ - & - & - & & \end{array} =$$

$$2 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0 + 3 + 0 - 1 - 6 - 0 = -4$$

6.7.1. *Lastnosti determinante.* S temi lastnostmi si pogosto pomagamo pri računanju determinant:

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- Determinanta diagonalne, zgornjetrikotne ali spodnjetrikotne matrike je produkt diagonalnih elementov:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$
- Če sta dve vrstici (ali stolpca) enaki ali če je ena vrstica (ali stolpec) ničelna, je determinanta 0.
- Če zamenjamo dve vrstici (ali dva stolpca), determinanta spremeni predznak.
- Če dodamo večkratnik ene vrstice (ali stolpca) drugi vrstici (ali stolpcu), se determinanta ne spremeni.
- Če pomnožimo vrstico (ali stolpec) s številom, se determinanta pomnoži s tem številom.

6.7.2. *Računanje determinant.* Zaradi zgornjih lastnosti lahko uporabimo varianto Gaussove eliminacije za izračun determinante: uporabimo elementarne operacije na vrsticah in stolpcih, da spremenimo matriko v zgornjetrikotno, determinanta je potem produkt diagonalnih elementov.

Primer. Izračunajmo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Ali znamo iz gornjega zaporedja matrik rekonstruirati transformacije, ki smo jih uporabili na njih?[3]

6.7.3. *Uporaba determinant.* Determinante so pomembne pri sistemih z enakim številom spremenljivk in enačb (torej s kvadratno matriko koeficientov).
Velja: Če je determinanta $D = \det A$ sistema $Ax = b$ različna od nič, potem obstaja ena sama rešitev $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n$, dobimo jo po *Cramerjevih formulah*

$$x_k = \frac{D_k}{D},$$

kjer je D_k determinanta, ki jo dobimo iz D, če v njej k-ti stolpec zamenjamo s stolpcem b. Če pa je $\det A = 0$, potem se lahko zgodi, da ima sistem več rešitev, lahko pa se tudi zgodi, da nima nobene.

Homogeni sistem $A\vec{x} = \vec{0}$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ima vedno *ničelno rešitev.* Velja pa, da ima neničelno rešitev natanko tedaj, ko je $\det A = 0$.

Primer. Sistem $x + 2y = 0$, $2x + 4y = 0$ ima neničelno rešitev $x = 2, y = -1$, determinanta je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4 = 0$, medtem ko $x+2y = 0$, $x-y = 0$ nima neničelne rešitve, determinanta je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3$.

6.7.4. *Inverzna matrika.* Kvadratna matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *obrnljiva*, če obstaja taka matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $A \times B = A \times B = I_n$. Matriki B rečemo *inverz matrike* A in jo označimo z A^{-1}.

Izkaže se, da ima kvadratna matrika A inverz natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Inverz matrike velikosti 2×2 izračunamo po formuli

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Na primer, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{bmatrix}$.

Za večjo matriko A izračunamo inverz preko Gaussove eliminacije $[A|I_n] \to [I_n|A^{-1}]$.[4]

---

[3] V prvi matriki smo zamenjali prvo in tretjo vrstico, ob tem se je spremenil predznak determinante! V drugi matriki smo prvo vrstico pomnožili z -2 in jo prišteli tretji vrstici. V tretji matriki smo minus izpred matrike prenesli v drugo vrstico. V četrti matriki smo drugo vrstico prišteli tretji. V peti matriki smo iz četrte vrstice izpostavili faktor 2. V šesti matriki smo četrto vrstico prišteli tretji. V sedmi matriki smo drugo vrstico pomnožili z -1 in prišteli četrti vrstici. V sedmi vrstici smo tretjo vrstico pomnožili z -4 in prišteli četrti vrstici. Osma matrika je zgornje trikotna, njena determinanta je produkt diagonalnih elementov.

[4] To pomeni, da kvadratni matriki A na desni pripišemo enotsko matriko istih dimenzij, nato pa to matriko z elementarnimi transformacijami po vrsticah pretvorimo v obliko, kjer bo enotska matrika na levi, inverz matrike A pa se nam bo pojavil na desni.

Primer. Izračun

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

nam pove, da je

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Gaussovo eliminacijo lahko torej uporabimo na tri načine:
za reševanje sistemov linearnih enačb,
za izračun inverzne matrike,
za izračun determinante.

6.8. **Lastni vektorji in lastne vrednosti.** Vse matrike od zdaj naprej so *kvadratne.*

Neničelni vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je *lastni vektor* matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, če obstaja tako število $\lambda \in \mathbb{R}$, da je

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}\,,$$

oziroma

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0.$$

V tem primeru rečemo, da je λ *lastna vrednost* matrike A,$\vec{v}$ pa *lastni vektor*, ki pripada tej lastni vrednosti.[5]

Kako izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A? Ker iščemo rešitve homogenega sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$, velja, da je $\lambda \in \mathbb{R}$ lastna vrednost A natanko takrat, ko je

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Z drugimi besedami, najprej izračunamo *karakteristični polinom matrike* A, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, in poiščemo njegove ničle. To so lastne vrednosti A. Za vsako lastno vrednost poiščemo rešitve homogenega sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$; to so lastni vektorji matrike A.[6]

Primer. Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom je

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)\cdot 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

torej sta lastni vrednosti 3 in 2.

Za $\lambda = 3$ je

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix},$$

Gaussova eliminacija da

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izberemo lahko $x = 2$, $y = 3$.

[5]Matriko $A - \lambda I$ dobimo iz matrike A tako, da od vseh elementov na njeni glavni diagonali odštejemo λ.

[6]Povzemimo to še bolj na kratko: Če naloga od nas zahteva, da poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje kvadratne matrike A, potem ravnamo takole: lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ poiščemo kot ničle karakterisrtičnega polinoma $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Potem po vrsti te dobljene λ_k vstavljamo v $A - \lambda I$ in rešujemo ustrezni homogeni sistem; rešitve teh homogenih sistemov so lastni vektorji x_k. V teh lastnih vektorjih si nekatere komponente lahko poljubno izberemo, druge pa izrazimo z njimi.

Za $\lambda = 2$ je

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix},$$

Gaussova eliminacija da

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izberemo lahko $x = 1$, $y = 2$.

Torej ima A lastna vektorja

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

z lastnima vrednostma $3, 2$.

<u>Primer.</u> Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \\ -10 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Karakteristični polinom je

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 5 \\ -5 & 2-\lambda & -5 \\ -10 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda+3),$$

torej sta lastni vrednosti 2 in -3.

Za $\lambda = 2$ je

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & -5 \\ -10 & 0 & -10 \end{bmatrix},$$

Gaussova eliminacija da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oziroma sistem

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Izberemo lahko $y = 1$, $z = 0$ (in potem $x = 0$) ali $y = 0$, $z = 1$ (in potem $x = -1$). Dobimo torej dva (linearno neodvisna) lastna vektorja, ki pripadata lastni vrednosti $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Za $\lambda = -3$ je

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \\ -10 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

Gaussova eliminacija da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{2}z &= 0 \\ y-\frac{1}{2}z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Za $z=2$ dobimo $x=-1$, $y=1$, torej je lastni vektor

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Torej ima A lastne vektorje

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

z lastnimi vrednostmi $2, 2, -3$.

Primer. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom je λ^2, torej je edina lastna vrednost 0. Dobimo samo en lastni vektor, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Če poznamo lastne vrednosti, lahko hitro izračunamo sled in determinanto: če je A kvadratna $n \times n$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, je $\operatorname{sl} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ in $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

6.9. **Diagonalizacija.** Če ima $n \times n$ matrika n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, rečemo, da je *diagonalizabilna.*

Primer. Matriki

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \\ -10 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

sta diagonalizabilni, matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa ni.

Če ima matrika same različne lastne vrednosti, je vedno diagonalizabilna. Če se lastne vrednosti ponavljajo, je lahko diagonalizabilna, lahko pa tudi ne.

Predpostavimo, da je matrika A diagonalizabilna. Naj bo P (obrnljiva) $n \times n$ matrika, katere stolpci so (linearno neodvisni) lastni vektorji, in naj bo D diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi na diagonali (v istem vrstnem redu). Potem je

$$A = PDP^{-1}.$$

Primer. [7]

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

[7] Tu smo upoštevali že izračunane lastne vrednosti in lastne vektorje iz primerov iz prejšnjega razdelka 6.8

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \\ -10 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Diagonalne matrike je enostavno množiti med seboj in potencirati. Na primer,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Če znamo matriko A diagonalizirati, je enostavno izračunati njene potence: če je $A = PDP^{-1}$, je $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$, $A^3 = PD^3P^{-1}$ in v splošnem

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

<u>Primer.</u>

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \\ -10 & 0 & -8 \end{bmatrix}^{1000} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{1000} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Pri diagonalizaciji matrike lahko dobimo tudi kompleksne lastne vrednosti in lastne vektorje.
<u>Primer.</u> Vzemimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je

$$p_A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

lastni vrednosti pa sta $1+i$ in $1-i$.

Pri $\lambda = 1+i$ dobimo z Gaussovo eliminacijo $\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in lastni vektor $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, pri $\lambda = 1-i$ pa $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in lastni vektor $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Diagonalizacija $A = PDP^{-1}$ je torej

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

6.9.1. *Simetrične matrike.* Matrika je A *simetrična*, če je $A^T = A$. Primer simetrične matrike je

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Simetrična matrika A ima veliko lepih lastnosti:

(1) A ima same *realne* lastne vrednosti
(2) A lahko diagonaliziramo.
(3) A ima n (linearno neodvisnih) *ortogonalnih* lastnih vektorjev

Za lastne vektorje lahko izberemo enotske ortogonalne vektorje. Rečemo, da so taki vektorji *ortonormirani.*

Za matriko $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, katere stolpci so ti ortonormirani vektorji, velja $Q^TQ = I_n$ oziroma $Q^{-1} = Q^T$. Taki matriki rečemo *ortogonalna.*

Torej se lahko vsaka realna simetrična matrika A zapiše kot QDQ^T za ortogonalno matriko Q in realno diagonalno matriko D. Na primer, dobimo

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Naj bo A realna simetrična matrika.

- A je *pozitivno definitna*, če so vse lastne vrednosti pozitivne
- A je *pozitivno semidefinitna*, če so vse lastne vrednosti nenegativne
- A je *negativno definitna*, če so vse lastne vrednosti negativne
- A je *negativno semidefinitna*, če so vse lastne vrednosti nepozitivne
- A je *nedefinitna*, če ima A pozitivno in negativno lastno vrednost

Primer. $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ je pozitivno definitna, ker sta njeni lastni vrednosti 5 in 10.

Opomba. Definitne matrike igrajo pomembno vlogo pri iskanju ekstremov funkcij več spremenljivk.

7. ZAPOREDJA

7.1. **Osnovni pojmi.** *Zaporedje* je preslikava $a : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ v neko množico B. Sliko števila n, torej $a(n) = a_n$, imenujemo *n-ti člen* zaporedja.

Primer. $a(n) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je primer matričnega zaporedja oz. zaporedja matrik,
$b(n) = \sin nx$ je primer funkcijskega zaporedja oz. zaporedja funkcij,
$c(n) = \{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ je primer zaporedja množic.

Številsko zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je preslikava $a : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ naravnih števil v množico $B \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ realnih ali kompleksnih števil. Če je $B = \mathbb{R}$, govorimo o *realnem zaporedju*, če je $B = \mathbb{C}$ imamo opravka s *kompleksnim zaporedjem.*
V nadaljnjem so vsa zaporedja številska. Poleg neskončnih zaporedij včasih obravnavamo tudi končna zaporedja, definirana na primer na kakšni množici $[a..b] := \{a, a + 1, a + 2, \ldots, b - 1, b\} \subset \mathbb{N}$.

7.2. **Kako podamo zaporedje?**

(1) s formulo za splošni člen, kot v primerih
   $a_n = \frac{n-1}{n}$
   $b_n = \sqrt{n^2 + 1}$
   $c_n = 2^n + n^3 - 5$

(2) z rekurzijo, ki pove, kako dobimo nasledji člen zaporedja iz prejšnjega ali prejšnjih, kot npr.
   $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$
   $b_1 = 1, b_2 = 1, b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$ (Fibonaccijevo zaporedje $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 35\ldots$)

(3) s končnim zaporedjem iz nekaj prvih členov zaporedja (ta način zaporedja ne določa natančno, uporabljamo ga le, kadar smo prepričani, da je zakonitost, po kateri so tvorjeni členi, dovolj preprosta, da se razume, katero zaporedje imamo v mislih), kot v primerih
   $(a) = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$
   $(b) = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

7.3. **Podzaporedje.** Zaporedje $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *podzaporedje* zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če ga iz njega dobimo tako, da izpustimo nekaj členov, vrstni red preostalih pa ohranimo.
Primer. Zaporedje sodih števil $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ je podzaporedje zaporedja naravnih števil $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.

7.4. **Omejena zaporedja.** Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ je *navzgor omejeno*, če obstaja število $M \in \mathbb{R}$, da za vse člene zaporedja velja

$$a_n \leq M.$$

V tem primeru pravimo, da je M *zgornja meja* zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ je *navzdol omejeno*, če obstaja število $m \in \mathbb{R}$, da za vse člene zaporedja velja

$$m \leq a_n.$$

V tem primeru pravimo, da je m *spodnja mej*a zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Zaporedje je *omejeno*, če je navzgor in navzdol omejeno.

7.5. **Monotona zaporedja.** Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *monotono naraščajoče*, če za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *monotono padajoče*, če za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n \geq a_{n+1}.$$

Če v pogoju za monotonost nastopata znaka $<$ oz. $>$ namesto $\leq$ oz. $\geq$, govorimo o *strogo naraščajočem* oz. *strogo padajočem* zaporedju.
Primer. Konstantno zaporedje $c, c, c, \ldots$ je monotono naraščajoče in monotono padajoče, ni pa ne strogo naraščajoče na strogo padajoče.

7.6. **Limita zaporedja.** Število A je *limita* zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če v vsaki okolici α ležijo vsi členi zaporedja od nekega člena dalje, če torej velja, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$|A - a_n| < \varepsilon.$$

Primer. Število 0 je limita zaporedja $a_n = \frac{1}{n}$, saj za vsak $\varepsilon > 0$ velja, da je $|0 - \frac{1}{n}| < \varepsilon$ za vse $n > n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$.
Primer. Konstantno zaporedje $c, c, c, \ldots$ ima limito c.
Primer. Število 1 je limita zaporedja $1 + (-1)^n \frac{1}{n}$.
Limita je vselej, kadar obstaja, ena sama.
Če ima zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limito, potem ga imenujemo *konvergentno* in pišemo

$$A = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n.$$

Zaporedje, ki nima limite, imenujemo *divergentno*. Velja: Če ima omejeno zaporedje natanko eno stekališče, potem je to stekališče tudi limita tega zaporedja.
Velja: Če je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, potem je konvergentno. Podobno, če je zaporedje padajoče in navzgor omejeno, potem je konvergentno.
Primer. Rekurzivno podano zaporedje $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$ je naraščajoče in navzgor omejeno z 2, torej ima limito.
Cauchyjev kriterij: Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N})}$ je konvergentno natanko takrat, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n \geq n_0$ velja:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

7.7. **Stekališče zaporedja.** Število α je stekališče zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če v vsaki okolici α leži neskončno mnogo členov zaporedja od nekega indeksa dalje, če ima torej za vsak $\varepsilon > 0$ neenačba

$$|\alpha - a_n| < \varepsilon$$

neskončno rešitev.
Zaporedje ima lahko več stekališč.
Primer. Zaporedje $a_n = (-1)^n$ ima dve stekališči: 1 in -1, prav tako zaporedje $b_n = (-1)^n(\frac{n-1}{n})$.
Limita konvergentnega zaporedja je edino stekališče tega zaporedja.
Bolzano-Weierstrassov izrek: Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.

7.8. **Operacije z zaporedji.** Za zaporedji $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so definirane naslednje opracije:

vsota zaporedij:

$$a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

produkt zaporedja s skalarjem:

$$\lambda a = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

produkt zaporedij:

$$a \cdot b = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

če so vsi $b_n \neq 0$, tudi *kvocient zaporedij*

$$\frac{a}{b} = (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

7.9. **Pravila za računanje limit.** Naj bosta $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni zaporedji z limitama $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Potem velja:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B,$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = (\lambda A),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Če so vsi $b_n \neq 0$ in $B \neq 0$, potem je

$$\lim(\tfrac{a_n}{b_n}) = \tfrac{A}{B}.$$

Če za zaporedje $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ velja $a_n \leq c_n \leq b_n$ ter $A = B$, potem je $\lim c_n = A = B$.

8. VRSTE

8.1. **Osnovni pojmi.** Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ številsko zaporedje. Temu zaporedju priredimo zaporedje delnih vsot s členi

$$s_k = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n,$$

ki mu pravimo *(številska) vrsta*[8].
Če to zaporedje delnih vsot konvergira, njegovo limito imenujemo *vsota vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentna* natanko takrat, kadar konvergira zaporedje delnih vsot $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$. V nasprotnem primeru je vrsta *divergentna*.

[8]Na podoben način definiramo funkcijske vrste, kot so npr. potenčne vrste, trigonometrijske vrste, itd.

8.2. **Lastnosti konvergentnih vrst.** Omenimo le dve:
(1) Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

To je potreben, ne pa tudi zadosten pogoj za konvergenco vrste.

(2) Če sta vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni, potem sta konvergentni tudi vrsti $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ za poljuben $\lambda \in \mathbb{R}$ in velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

8.3. **Kriteriji konvergence vrst.** Omenimo le nekatere:
(1) *Primerjalni kriterij*: Denimo, da je $0 \leq a_n \leq b_n$. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, potem je konvergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Če pa vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem divergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Primer. *Harmonična vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

je divergentna (po primerjalnem kriteriju), saj velja: $1 \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \ldots,$ torej zaporedje delnih vsot postane poljubno veliko, saj preseže vsak večkratnik števila $\frac{1}{2}$.

(2) *Geometrijska vrsta*, dobljena iz geometrijskega zaporedja $a, aq, aq^2, aq^3 \ldots,$ je konvergentna natanko tedaj, ko je $|q| < 1$, v tem primeru je njena vsota enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Na primer, če je $a = 1, q = \frac{1}{2}$, je $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$.
(3) *Vrsta s pozitivnimi členi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kjer so vsi $a_n \geq 0$, je konvergentna natanko tedaj, ko je zaporedje njenih delnih vsot (navzgor) omejeno, če torej obstaja tak $M > 0$, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq M.$$

(4) Za *alternirajočo vrsto* $\sum_{i=1}^{n}(-1)^n a^n$, kjer je $a_n \geq 0$, velja *Leibnizev kriterij*: Če je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono padajoče in je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potem je alternirajoča vrsta $\sum_{i=1}^{n}(-1)^n a^n$ konvergentna, in velja ocena za napako: $|s - s_n| < \varepsilon$, kjer je s vsota vrste in s_n delna vsota vrste.
Alternirajoča vrsta $\sum_{i=1}^{n}(-1)^n a_n$ se imenuje *absolutno konvergentna*, če je konvergentna vrsta

$$\sum_{i=1}^{n} |a_n|.$$

(5) *Korenski kriterij*: Če je

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a}| < 1,$$

je vrsta $\sum_{i=1}^{n}(-1)^n a_n$ absolutno konvergentna, če je ta limita > 1, pa divergentna.
(6) *Kvocientni kriterij*: Če je

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1,$$

je vrsta $\sum_{i=1}^{n}(-1)^n a_n$ absolutno konvergentna, če je ta limita > 1, pa divergentna.

9. ZVEZNOST

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ za $D \subseteq \mathbb{R}$ je preslikava, ki vsakemu številu iz množice $D = D(f)$ (*domene*) priredi realno število. Pogosto je D interval; ta je lahko zaprt $[a, b]$, odprt (a, b) ali polodprt $[a, b)$ oz. $(a, b]$, lahko je tudi neomejen, npr. $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$ ali $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.
Pri analizi oz. opisu vedenja dane funkcije $f(x)$ v okolici določene točke $a \in D(f)$ si pomagamo s pojmi zveznosti, limite in odvoda.

9.1. **Zvezna funkcija.** Funkcija f je *zvezna v točki* a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse

$$|x - a| < \delta$$

velja

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Funkcija je *zvezna na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, če je zvezna v vsaki točki tega intervala.
V točkah, kjer je funkcija zvezna, je njen graf nepretrgan.

9.2. **Zveznost elementarnih funkcij.** Elementarne funkcije so zvezne na celotnem svojem (naravnem) definicijskem območju.
<u>Primer.</u> Tako so npr. polinomi (z realnimi koeficienti) zvezni povsod na $\mathbb{R}$, prav tako eksponentna funkcija ter funkciji sinus in kosinus. Logaritemska funkcija je zvezna na $(0, \infty)$. Funkcija $\tan x$ je zvezna povsod razen v točkah nezveznosti $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Racionalne funkcije $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ so zvezne povsod razen v ničlah imenovalca $q(x)$.

9.3. **Operacije z zveznimi funkcijami.** Vsota, razlika in produkt zveznih funkcij $f(x)$ in $g(x)$ so zvezne funkcije. Tudi kvocient, kjer je definiran. Prav tako je zvezen kompozitum $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

9.4. **Zvezne funkcije na zaprtem intervalu.** Naj bo funkcija $f(x)$ zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$. Potem:
(1) *Izrek o ekstremih.* $f(x)$ zavzame vsaj v eni točki x_M tega intervala svojo maksimalno vrednost

$$M = \max_{x \in I} f(x) = f(x_M),$$

prav tako $f(x)$ zavzame vsaj v eni točki x_m tega intervala svojo minimalno vrednost

$$m = \min_{x \in D} f(x) = f(x_m).$$

(2) *Izrek o vmesnih vrednostih.* $f(x)$ zavzame vsako vrednost med m in M v vsaj eni točki intervala $[a, b]$.
(3) *Izrek o ničlah.* Če ima funkcija $f(x)$ v krajiščih intervala $[a, b]$ različno predznačeni vrednosti:

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

potem ima na intervalu $[a, b]$ vsaj eno ničlo, t.j. $f(x) = 0$ vsaj v eni točki $x \in [a, b]$.
Predpostavka o zaprtosti intervala, na katerem je funkcija definirana, je bistvena za veljavnost (1), kot kaže naslednji primer.
<u>Primer.</u> $f(x) = \tan x$ je zvezna na odprtem intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, vendar funkcija tangens na tem intervalu ni ne navzgor ne navzdol omejena, torej na tem intervalu nima ne maksimalne ne minimalne vrednosti.
Na lastnosti (3) temelji *metoda bijekcije*, s katero lahko do poljubne natančnosti določimo ničlo zvezne funkcije, ki ima v krajiščih zaprtega intervala različno predznačeni vrednosti. To storimo z večkratnim drobljenjem oziroma razpolavljanjem intervala, na katerem je funkcija različno predznačena

10. LIMITA

10.1. **Limita funkcije.** Število L je *limita funkcije* $f(x)$ *v točki* a, če je f definirana na $I \setminus \{a\}$ za neki interval I, ki vsebuje a, in če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

za vsak $x \in I \setminus \{a\}$, za katerega je

$$|x - a| < \delta.$$

V tem primeru pišemo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

10.2. **Leva in desna limita.** Podobno kot limito definiramo *levo limito* $\lim_{x \to a, x<a} f(x)$ in *desno limito* $\lim_{x \to a, x>a} f(x)$ v dani točki a , le da v definiciji limite upoštevamo le točke levo oz. desno od a. Potreben (ne pa tudi zadosten) pogoj za to, da ima funkcija limito v dani točki, je, da ima v tej točki levo in desno limito; če sta ti dve limiti enaki, potem obstaja tudi limita v tej točki, in tedaj je

$$\lim_{x \to a, x<a} f(x) = \lim_{x \to a, x>a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

<u>Primer.</u> Funkcija $sign(x)$[9] v točki 0 nima limite, ima pa v točki 0 levo limito -1 in desno limito 1.

10.3. **Limita v neskončnosti.** $L = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow$ za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vse $x > M$ velja

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Podobno definiramo limito v primeru $x \to -\infty$: $L = \lim_{x \to -\infty} f(x) \Leftrightarrow$ za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vse $x < M$ velja

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

10.4. **Računanje limit.** Za limite funkcij, bodisi v neki končni točki, bodisi v neskončnosti, veljajo podobna pravila kot za limite zaporedij. Tako je npr.:

$$\lim_{x \to \infty} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \to \infty} f(x),$$

$$\lim_{x \to \infty} (f + g)(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) + \lim_{x \to \infty} g(x),$$

$$\lim_{x \to \infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \lim_{x \to \infty} g(x),$$

$$\lim_{x \to \infty} (\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x \to \infty} f(x)}{\lim_{x \to \infty} g(x)}$$

Najlažje je izračunati limito v točki a, če je funkcija $f(x)$ zvezna v točki a, tedaj je namreč

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

<u>Primer.</u> $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2}{x-3} = -6$

Včasih lahko funkcijo preoblikujemo, npr. s krajšanjem skupnega faktorja v števcu in imenovalcu, in dobimo funkcijo, ki je zvezna v dani točki, ter potem izračunamo limito, kot v naslednjih primerih:

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-1} = -1$

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-2x+4}{2x^3+4x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-2/x^2+4/x^3}{2+4/x-1/x^3} = \frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-2x+4}{2x^2-2x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-2/x+4/x^2}{2-2/x+1/x^2} = \infty$

[9] Funkcija $sign(x)$ zavzame vrednost -1 pri vseh $x < 0$, vrednost 0 v točki 0 in vrednost 1 za vse $x > 0$

11. ODVOD

11.1. **Odvod v točki.** *Odvod* funkcije f v točki x je število, določeno kot

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Funkcija f je *odvedljiva v točki* x, če ta limita obstaja.

11.2. **Odvedljiva funkcija.** Če je funkcija f odvedljiva povsod, kjer je definirana, rečemo, da je f *odvedljiva* funkcija. V tem primeru označimo z f' funkcijo, katere vrednost je v vsaki točki x enaka odvodu funkcije f, in tej funkciji f' rečemo *odvod funkcije* f. Izrazu

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

pravimo *diferenčni kvocient.* Odvod pogosto pišemo z Leibnizevo pisavo, kot *kvocient diferencialov* $\frac{df}{dx}$.

11.3. **Levi in desni odvod.** Včasih ima funkcija samo *levi odvod*, definiran kot leva limita diferenčnega kvocienta

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

ali samo *desni odvod*, ki je definiran kot desna limita diferenčnega kvocienta

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Če je funkcija odvedljiva v dasni točki, obstajata v tej tučki tudi levi in desni odvod in sta enaka.

<u>Primer.</u> Absolutna vrednost $f(x) = |x|$ v točki 0 ni odvedljiva, povsod drugod pa je. Levi odvod v točki 0 je -1, desni pa 1.

11.4. **Odvodi elementarnih funkcij.** Vse elementarne funkcije so odvedljive, tako je npr.:
$C' = 0$ (odvod konstantne funkcije je nič)
$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$
$(e^x)' = e^x$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\ln x)' = 1/x$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11.5. **Pravila za odvajanje.** $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ (aditivnost)
$(cf(x))' = cf'(x)$ (homogenost)
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (pravilo produkta oz. Leibnizevo pravilo)
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (pravilo kvocienta)
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ (verižno pravilo)

11.6. **Računanje odvodov.** Poleg tabele odvodov elementarnih funkcij pri računanju odvodov uporabljamo pravila za odvajanje, kot v naslednjih zgledih:
$(7x^4+5x^2+x-1)' = 28x^3+10x+1$

$(\cos x \cdot e^x)' = -\sin x \cdot e^x + \cos x \cdot e^x$

$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}$

11.7. **Naraščanje in padanje.** Odvod pove, kje funkcija narašča in kje pada. Natančneje, če je

$$f'(a) > 0,$$

je f v okolici točke a naraščajoča, če je

$$f'(a) < 0,$$

je f v okolici točke a padajoča. Če je

$$f'(a) = 0,$$

je funkcija v okolici točke a lahko naraščajoča, padajoča ali pa niti naraščajoča niti padajoča.

Primeri:

(1) Ker je $(e^x)' = e^x > 0$ za vsak x, je funkcija e^x strogo naraščajoča. Ker je $(\log x)' = 1/x$, je funkcija $\log x$ strogo naraščajoča povsod, kjer je definirana, torej na intervalu $(0, \infty)$.
(2) Za $f(x) = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$ je $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$, kar je kvadratna enačba z ničlama $1/3$ in 1. Torej je $f'(x)$ pozitivna na intervalih $(-\infty, 1/3)$ in $(1, \infty)$, kar sta tudi intervala, na katerih je f strogo naraščajoča, medtem ko je na $(1/3, 1)$ strogo padajoča.
(3) Funkcije x^3, $-x^3$ in x^4 imajo v točki 0 vse odvod 0, vendar je prva v okolici 0 strogo naraščajoča, druga strogo padajoča, tretja pa ne eno ne drugo.

11.8. **L'Hôspitalovo pravilo.** Odvod je uporaben tudi za računanje limit. Če računamo limito $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, pri čemer je $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in je

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

in

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ali

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

in

$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

potem velja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

če limita na desni obstaja. Temu izreku pravimo *l'Hôpitalovo pravilo.*

Primeri:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
(2) $\lim_{t\to 1} \frac{5t^4-4t^2-1}{10-t-9t^3} = \lim_{t\to 1} \frac{20t^3-8t}{-1-27t^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$
(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$
(4) $\lim_{x\to 0} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

11.9. **Tangenta na krivuljo, diferencial.** Z odvodom zlahka izračunamo tudi enačbe tangent na krivuljo. Denimo, da je f definirana na odprtem intervalu okoli točke a in da je v točki a odvedljiva. *Tangenta* na graf funkcije f v točki a je premica s smernim koeficientom $f'(a)$, ki ima v točki a vrednost $f(a)$. Ima torej enačbo

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a).$$

Prirastku neodvisne spremenljivke $\Delta x = x - a$ pravimo tudi *diferencial neodvisne spremenljivke* in ga označimo z dx.
Diferencial funkcije $f(x)$ je definiran kot produkt odvoda funkcije in diferenciala neodvisne spremenljivke:

$$df(x) = f'(x)dx$$

Diferencial funkcije nam pove, kolikšen je prirastek na tangenti, ko se x poveča za $dx = \Delta x = x - a$. Uporabljamo ga kot (linearno) aproksimacijo za spremembo vrednosti funkcije $f(x)$:

$$\Delta f \approx df = f' \cdot dx.$$

Primeri:

(1) Izračunajmo enačbo tangente na krivuljo $y = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ v točki, za katero je $x = 1$. Ker za $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ velja $f(1) = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ in $f'(1) = -1$, je enačba tangente $y = 0 + (-1)(x-1) = -x + 1$.
(2) Izračunajmo enačbo tangente na krivuljo $y = \cos x$ v točki $(0, 1)$. Ker je $(\cos x)' = -\sin x$ in je $\sin 0 = 0$, je enačba tangente $y = 1 + 0(x - 0) = 1$.
(3) Izračunajmo enačbo tangente na krivuljo $y = \sqrt{x}$ v točki, za katero je $x = 1$. Ker za $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ velja $f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ in $f'(1) = 1/2$, je enačba tangente $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

11.10. **Višji odvodi.** Odvodu $f'(x)$ rečemo tudi *prvi odvod funkcije* f. Če $f'(x)$ ponovno odvajamo, dobimo $f''(x)$, *drugi odvod funkcije* f, z odvajanjem le-tega dobimo *tretji odvod* f''', itd.

Primer. Če je $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3x + 2$, je $f'(x) = 4x^3 + 6x$ in $f''(x) = 12x^2 + 6$.

11.11. **Konveksnost, konkavnost.** Funkcija f je na danem intervalu *konveksna*, če njen graf leži pod vsako daljico med dvema točkama grafa, torej če velja

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

in *konkavna*, če njen graf leži nad vsako daljico med dvema točkama grafa, torej če velja

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

Najpreprostejše orodje za preverjanje konveksnosti oz. konkavnosti je drugi odvod. Natančneje, če je

$$f''(a) > 0,$$

je funkcija f konveksna v okolici točke a, in če je

$$f''(a) < 0,$$

je funkcija f konkavna v okolici točke a.

Primeri:

(1) Ker je $(e^x)'' = e^x > 0$, je eksponentna funkcija konveksna na $\mathbb{R}$.
(2) Za $f(x) = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$ je $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ in $f''(x) = 6x - 4$, torej je f konveksna na intervalu $(2/3, \infty)$ in konkavna na intervalu $(-\infty, 2/3)$. V točki $(2/3, 2/27)$ ima *prevoj*.
(3) Za $f(x) = \cos x$ je $f''(x) = -\cos x$, torej je $\cos x$ konkavna, kjer je pozitivna, in konveksna, kjer je negativna.

11.12. **Lokalni ekstremi.** Funkcija f ima v dani točki a *lokalni maksimum*, če je

$$f(a) \ge f(x)$$

za vse x iz neke okolice točke a. Podobno, funkcija f ima v dani točki a *lokalni minimum*, če je

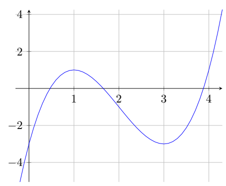
$$f(a) \le f(x)$$

za vse x iz neke okolice točke a.

11.12.1. *Lokalni ekstremi odvedljive funkcije na odprtem intervalu.* Lokalne ekstreme odvedljive funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ iščemo z naslednjim postopkom:

- rešimo enačbo $f'(x) = 0$;
- rešitve so *kritične* oz. *stacionarne točke* in so *kandidati* za lokalne ekstreme;
- upoštevamo le kritične točke z intervala (a, b);
- če je $f'(x) = 0$ in $f''(x) > 0$, je v točki x lokalni minimum;
- če je $f'(x) = 0$ in $f''(x) < 0$, je v točki x lokalni maksimum;
- če je $f'(x) = f''(x) = 0$, test odpove.

Primer. Poiščimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ na intervalu $(2, 4)$. Velja $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 3)(x - 1)$, tako da je edini kandidat za lokalni ekstrem $x = 3$ ($x = 1$ je zunaj intervala). Ker je $f''(x) = 6x - 12$, je $f''(3) = 6 > 0$, tako da je $x = 3$ lokalni minimum.



Primer. Funkciji $f(x) = x^3$ in $f(x) = x^4$ imata kritično točko $x = 0$ in tako prvi kot drugi odvod sta enaka 0, tako da zgornji postopek ne da odgovora, ali je $x = 0$ lokalni maksimum, lokalni minimum ali nič od tega. V resnici $x = 0$ ni lokalni ekstrem funkcije $f(x) = x^3$, je pa lokalni minimum funkcije $f(x) = x^4$.

11.13. **Globalni ekstremi odvedljive funkcije na zaprtem intervalu.** Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ima v dani točki a *globalni maksimum*, če je

$$f(a) \geq f(x)$$

za vse $x \in D(f)$. Podobno, funkcija f ima v dani točki a *globalni minimum*, če je

$$f(a) \leq f(x)$$

za vse $x \in D(f)$.
Primer. Funkcija $f : [-1, 2]$, definirana s predpisom $y = f(x) = x^2$, ima globalni minimum $y_{min} = 0$ v stacionarni točki $x_{min} = 0$, globalni maksimum $y_{max} = 4$ pa v robni točki $x_{max} = 2$.
Primer. Funkcija $f(x) = \cos x$ ima globalni maksimum $y_{max} = 1$ v točkah $x_{max} = x_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ima *vedno* globalne ekstreme. Poiščemo jih takole:

- kandidati za globalne ekstreme so a, b in kritične točke;
- izračunamo $f(x)$ za vse kandidate za globalne ekstreme; kandidat z največjo vrednostjo nam da globalni maksimum, kandidat z najmanjšo vrednostjo pa globalni minimum.

Primer. Kandidati za globalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ na $[2, 4]$ so 2, 3 in 4. Ker je $f(2) = -1$, $f(3) = -3$ in $f(4) = 1$, je globalni maksimum dosežen pri 4 z vrednostjo 1, globalni minimum pa je dosežen pri 3 z vrednostjo -3.

11.14. **Linearna aproksimacija.** *Linearna aproksimacija* funkcije f pri a je linearna funkcija z isto vrednostjo in odvodom pri a, kot ju ima f:

$$\mathcal{L}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Njen graf je tangentna premica na graf f pri a.
Primer. Če je $f(x) = \sqrt{x}$ in $a = 1$, je linearna aproksimacija

$$\mathcal{L}(x) = f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Ker je $f(1) = 1$ in

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{oziroma} \quad f'(1) = \frac{1}{2},$$

dobimo

$$\mathcal{L}(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x + 1}{2}.$$

11.15. **Aproksimacije višjega reda.** Z višjimi odvodi lahko poiščemo kvadratno, kubično itd. aproksimacijo funkcij. Na primer, *kvadratna aproksimacija* funkcije f v točki a je

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Primer. Za $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ in $a=1$ je kvadratna aproksimacija[10]

$$1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2=\frac{1}{8}\left(-x^2+6x+3\right).$$

Kubična aproksimacija funkcije f v točki a je kubična aproksimacija

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3.$$

Primer. Za $f(x)=\sqrt{x}$ in $a=1$ je kubična aproksimacija

$$1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3=\frac{1}{16}\left(x^3-5x^2+15x+5\right).$$

11.16. **Taylorjev polinom in Taylorjeva vrsta.** Naj bo f vsaj n-krat odvedljiva funkcija v okolici točke a. Najboljša aproksimacija funkcije f v okolici točke a, s polinomom stopnje n je

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

kjer je $f^{(n)}(a)$ n-ti odvod funkcije f v točki a in $n!=1\cdot 2\cdots n$. Polinomu $P_n(x)$ rečemo *n-ti Taylorjev polinom funkcije f* v točki a. Ko n raste, je (običajno) vrednost polinoma vse bližje vrednosti funkcije. Če je f v okolici točke a neskončnokrat odvedljiva, je njena *Taylorjeva vrsta funkcije f v točki a*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Primeri:

(1) Za $f(x)=e^x$ in $a=0$ dobimo $f'(x)=f''(x)=\ldots=e^x$, $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=1$, torej je n-ti Taylorjev polinom enak $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots\frac{x^n}{n!}$. Taylorjeva vrsta funkcije e^x v točki 0 je

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Taylorjeva vrsta funkcije e^x v točki 1 je

$$e+e(x-1)+\frac{e(x-1)^2}{2}+\cdots\frac{e(x-1)^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(x-1)^n}{n!}.$$

(2) Za poljuben polinom $p(x)$ stopnje n in poljubno točko a so Taylorjevi polinomi od n-tega naprej enaki $p(x)$. Tako je npr. za $f(x)=x(x-1)^2$ in $a=2$ je $f(x)=x^3-2x^2+x$, $f'(x)=3x^2-4x+1$, $f''(x)=6x-4$, $f'''(x)=6$, $f^{(n)}(x)=0$ za $n\geq 4$ in zato $f(2)=2$, $f'(2)=5$, $f''(2)=8$, $f'''(2)=6$ in $f^{(n)}(2)=0$ za $n\geq 4$. Zato dobimo

$$\begin{aligned}
&P_0(x)=2\\
&P_1(x)=2+5(x-2)=5x-8\\
&P_2(x)=2+5(x-2)+4(x-2)^2=4x^2-11x+8\\
&P_3(x)=2+5(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3=x^3-2x^2+x=f(x)
\end{aligned}$$

[10] Tu smo upoštevali, da je $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$ in $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$. V kubični aproksimaciji bomo rabili še $f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$.

(3) Za $f(x) = \cos x$ in $x = 0$ je $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f''''(x) = \cos x$, potem se odvodi ponavljajo. Dobimo

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

in podobno za $f(x) = \sin x$ in $x = 0$

$$P_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

(4) Za $f(x) = x^{1/2}$ in $a = 1$ je $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$, zato je $P_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^3}{8}$.

(5) Za $f(x) = \cos x$ je $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f''''(x) = \cos x$, potem se odvodi ponavaljajo. Dobimo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

in podobno

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

11.17. **Analiza in risanje grafa funkcije.** Pri analizi in risanju grafa funkcije najprej določimo

- naravno definicijsko območje funkcije $D(f)$
- zalogo vrednosti funkcije $Z(f)$
- začetno vrednost funkcije, t.j. $f(0)$
- ničle funkcije, t.j. rešitve enačbe $f(x) = 0$, in njihovo sodost ali lihost
- pole, tj. ničle imenovalca, če je funkcija oblike $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
- ekstreme (lokalne in globalne)
- vedenje funkcije na robu definicijske območja (z uporabo limit)
- vedenje funkcije v neskončnosti (z uporabo limit)
- intervale naraščanja, padanja (z uporabo prvega odvoda)
- intervale konveksnosti, konkavnosti, prevoje (z uporabo drugega odvoda).

Graf ponavadi začnemo risati v začetni vrednosti, tj. pri $x = 0$, razen če funkcija tam ni definirana. Če je $f(x) = 0$, je pogosto koristno najti še neko točko, v kateri ima funkcija neničelno vrednost in začeti risanje od nje (na levo in desno). V lihih ničlah (in polih) graf prečka os x, v sodih pa ne.

12. NEDOLOČENI INTEGRAL

12.1. **Primitivna funkcija.** Funkcija $F(x)$ je *primitivna funkcija* funkcije $f(x)$, če velja

$$F'(x) = f(x).$$

Če je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, potem je vsaka funkcija $F(x) + C$, kjer je C poljubno realno število, tudi primitivna funkcija $f(x)$. Drugih primitivnih funkcij funkcija $f(x)$ nima.[11] Številu C rečemo *integracijska konstanta.*

12.2. **Nedoločeni integral.** Neskončni družini vseh primitivnih funkcij funkcije $f(x)$ pravimo *nedoločeni integral* funkcije $f(x)$ in pišemo

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Primer. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

[11] Če je namreč $F'(x) = f(x)$ in $G'(X) = f(x)$, je $(G - F)'(x) = 0$, torej je $G(x) = F(x) + C$, saj je edina funkcija, ki ima odvod povsod enak nič, konstanta.

12.3. **Tabela nedoločenih integralov.** Iz tabele odvodov dobimo ustrezno *tabelo nedoločenih integralov*:

funkcija	*odvod*	*funkcija*	*integral*
$G(x)$	$G'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + C$
C	0	0	C
$x^n, n \neq -1$	nx^{n-1}	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x\rvert + C, x \neq 0$
e^x	e^x	e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

12.4. **Pravila za računanje nedoločenih integralov.** Sledijo iz pravil za računanje odvodov funkcij:

12.4.1. *Integral vsote.* Iz pravila za odvod vsote funkcij $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$ dobimo pravilo za *integral vsote funkcij*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C.$$

Primer.

$$\int 4x^3 + x^2 + 3x - 10 = x^4 + \frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - 10x + C.$$

12.4.2. *Uvedba nove spremenljivke.* Iz pravila za verižno odvajanje $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$ dobimo *pravilo substitucije*

$$\int f'(g(u))g'(u)dx = \int f(u)du$$

Primer. Integral

$$I = \int x^2 e^{x^3} dx$$

po substituciji $u = x^3, du = 3x^2dx, x^2dx = \frac{du}{3}$ preide v

$$I = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

12.4.3. *Integracija po delih.* Iz Leibnizeve formule za odvod produkta $(uv)' = u'v + uv'$ dobimo formulo za *integracijo po delih* (per partes)

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Pri računanju po tej metodi se velja držati naslednje sheme:

$$\begin{array}{ll} u = \dots, & dv = \dots \\ du = \dots, & v = \dots . \end{array}$$

Vse, kar se nahaja pod integralskim znakom, torej razdelimo na dva dela, na u in dv. Pri tem izberemo u tako, da se pri odvajanju poenostavi (npr. potenca, logaritem), dv pa tako, da pri integriranju ne postane bolj zapletena (npr. eksponentna funkcija, sinus, kosinus). V nalogah je velikokrat treba integracijo po delih ponoviti večkrat zaporedoma. Tipičen tak primer je $\int P(x)e^x dx$, kjer je $P(x)$ polinom.
Primer. $\int xe^x dx$ rešimo z metodo per partes, kjer vzamemo:
$u = x, dv = e^x dx$
$du = dx, v = e^x$. Tedaj je

$$\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

13. DOLOČENI INTEGRAL

Določeni integral omejene nenegativne funkcije $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ lahko najprepreprosteje opišemo kot ploščino lika L med grafom funkcije in abscisno osjo ter premicama $x=a$ in $x=b$; dejansko pa je ploščina takšnega lika definirana prek določenega integrala, katerega korektna definicija temelji na pojmu limite.

13.1. **Določeni (Riemannov) integral.** Naj bo funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omejena na zaprtem intervalu $[a,b]$. Razdelimo ta interval s točkami $x_1,\dots,x_n$ na n podintervalov, tako da velja $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Na vsakem od teh podintervalov $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ izberimo točko ξ_k. Potem je vsota

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

približek ploščine lika L med grafom funkcije in abscisno osjo ter premicama $x=a$ in $x=b$. Zdaj povečujmo število delilnih točk, hkrati pa naj tudi dolžine vseh podintervalov gredo proti nič. Če obstaja limita zaporedja vsot $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, neodvisna od načina, kako drobimo interval $[a,b]$ in kako izbiramo točke ξ_k, potem to limito imenujemo *določeni integral* funkcije f v mejah od a do b, in jo označimo

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Spremenljivka x, ki nastopa v določenem integralu $\int_a^b f(x)dx$, je za samo vrednost integrala povsem nebistvena. Prav lahko bi isti integral zapisali npr. tudi kot $\int_a^b f(t)dt$.

13.2. **Integrabilna funkcija.** Nima vsaka funkcija določenega integrala na $[a,b]$.Če pa ga ima, pravimo, da je (na danem intervalu) *integrabilna.*

Velja: Če je f zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a,b]$, potem določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ obstaja; povedano na kratko, zvezna funkcija na zaprtem intervalu je integrabilna.

13.3. **Osnovni izrek integralskega računa.** Računanje določenega integrala po definiciji je praviloma zelo nerodno in zato v praksi neuporabno. Na srečo obstaja preprostejši način: računanje določenega integrala lahko prevedemo na računanje nedoločenega integrala.

Naj bo $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$ in x poljubna točka s tega intervala. Označimo integracijsko spremenljivko s t in integrirajmo od a do x. Pišimo

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Tedaj velja: (1) Določeni integral je zvezna funkcija zgornje meje: za poljuben $h>0$ gre razlika $F(x+h)-F(x)$ proti nič, ko gre h proti nič.
(2) Če je funkcija $f(x)$ zvezna, je njen določeni integral odvedljiva funkcija zgornje meje in velja

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x dt=f(x)$$

Zdaj znamo poiskati funkcijo, katere odvod je dana zvezna funkcija $f(x)$. To je ravno $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Katerikoli drug nedoločeni integral (natančneje: primitivna funkcuja) zvezne funkcije $f(x)$ se od določenega integrala s spremenljivo zgornjo mejo razlikuje le za integracijsko konstanto

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+C$$

(3) Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, in če je $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ njena primitivna funkcija (to pomeni, da je $F'(x)=f(x)$), potem je

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=:F(x)|_a^b$$

To je osnovni izrek infinitezimalnega računa (Newton-Leibnizeva formula). Povejmo to še z besedami:

Če poznamo nedoločeni integral oz. primitivno funkcijo $F(x)$ (zvezne) funkcije $f(x)$, potem izračunamo določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ tako, da od vrednosti $F(b)$, ki jo $F(x)$ zavzame na zgornji meji, odštejemo vrednost $F(a)$, ki jo $F(x)$ zavzame na spodnji meji.

13.4. **Lastnosti določenega integrala.** Pri računanju določenih integralov si pogosto pomagamo tudi z lastnostmi določenega integrala:
(1) Če sta funkciji $f(x)$ in $g(x)$ integrabilni na intervalu $[a, b]$, potem je tam integrabilna tudi njuna vsota:

$$\int_a^b ((f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(2) Za poljubno število $\lambda \in \mathbb{R}$ velja

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

(3) Če je funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ vsaj odsekoma zvezna, in če je c poljubno število med a in b, potem velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(4) Če v določenem integralu zamenjami meji, integral spremeni predznak

$$\int_b^a \lambda f(x)dx = -\int_a^b \lambda f(x)dx$$

(5) Določeni integral z enakima mejama ima vrednost nič

$$\int_a^a \lambda f(x)dx = 0$$

(6) Če je funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ integrabilna, je na tem intervalu integrabilna tudi njena absolutna vrednost in velja

$$|\int_a^a f(x)dx| \leq \int_a^a |f(x)|dx$$

<u>Primer.</u> Določeni integral funkcije $f(x) = x^3$ na intervalu $[0, 1]$ je

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}|_0^1 = 1 - 0 = 1,$$

integral iste funkcije na intervalu $[-1, 1]$ je

$$\int_{-1}^0 x^3 dx = \frac{x^4}{4}|_{-1}^0 = 0 - 1 = -1.$$

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}|_{-1}^1 = 1 - 1 = 0.$$

Če bi hoteli izračunati ploščino p lika med grafom funkcije $f(x) = x^3$ in abscisno osjo na intervalu $[-1, 1]$, bi morali izračunati integral absolutne vrednosti funkcije f, oziroma računati takole:

$$p = \int_{-1}^1 |x^3|dx = \int_{-1}^0 (-x^3)dx + \int_0^1 x^3 dx = -(-1) + 1 = 2.$$

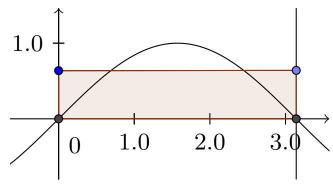
13.5. **Povprečna vrednost.** Z določenim integralom lahko računamo povprečno vrednost funkcije f na intervalu $[a,b]$:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

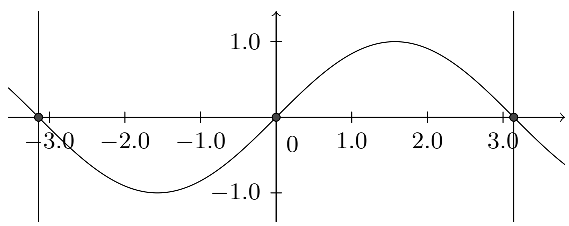
Povprečna vrednost nenegativne funkcije na intervalu $[a,b]$ je enaka višini pravokotnika z osnovnico $b-a$, katerega ploščina je enaka ploščini (krivočrtnega) lika pod krivuljo $y=f(x)$, omejenega še z abscisno osjo in navpičnima premicama $x=a$ in $x=b$.

Primer. Povprečna vrednost funkcije $f(x)=\sin x$ na intervalu $[0,\pi]$ je

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi}(-\cos x)|_0^\pi = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}.$$



Povprečna vrednost iste funkcije na intervalu $[-\pi,\pi]$ je enaka nič, kar vidimo tudi brez računanja, saj je $\sin x$ liha funkcija, interval $[-\pi,\pi]$ pa simetričen glede na koordinatno izhodišče.



13.6. **Dolžina loka krivulje v pravokotnih koordinatah.** Dolžino loka krivulje $y=f(x)$ med točkama $(a,f(a))$ in $(b,f(b))$ izračunamo po formuli

$$d = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Primer. Poiščimo dolžino astroide[12]

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$$

Z odvajanjem enačbe astroide dobimo

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Torej je dolžina loka četrtine astroide (v prvem kvadrantu):

$$\frac{1}{4}d = \int_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx = \frac{3}{2}a,$$

dolžina astroide je torej $6a$.

[12]Astroida ima obliko enostavne sklenjene krivulje, ki je simetrična za zrcaljenje prek obeh koordinatnih osi in seka os x v točkah $(a,0)$ in $(-a,0)$, os y pa v točkah $(0,a)$ in $(0,-a)$.

14. NUMERIČNA INTEGRACIJA

Nekaterih integralov se ne da izračunati po formuli, v zaključeni obliki. Tako npr. ni mogoče natančno izračunati integralov $\int_0^1 e^{x^2}dx$ in $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}dx$, ker ni mogoče najti ustreznih nedoločenih integralov in tako ni mogoče uporabiti Newton-Leibnizeve formule.
Prav tako ni mogoče natančno izračunati določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$, če je funkcija $f(x)$ določena z nekim znanstvenim eksperimentom, in nimamo formule zanje, ampak so njene vrednosti (in še to samo v določenih točkah) določene s podatki, dobljenimi z meritvami s pomočjo instrumentov.
Vendar ni vselej potrebno natančno določiti vrednost določenega integrala. Pogosto potrebujemo samo približno vrednost določenega integrala. V takih primerih si pomagamo z *numerično integracijo* (pravijo ji tudi *aproksimativna integracija*). Oglejmo si nekaj takšnih metod.

14.1. **Aproksimacija s pravokotniki.** Določeni integral lahko aproksimiramo z vsoto ploščin pravokotnikov, ki imajo za eno stranico $\Delta x = \Delta_n = \frac{b-a}{n}$, višina i-tega pravokotnika pa je enaka vrednosti funkcije f v neki točki i-tega intervala. Lahko vzamemo npr. leve točke i-tega podintervala ("leva aproksimacija"), desne točke ("desna aproksimacija) ali pa središčne točki i-tega podintervala ("pravilo središčne točke"). Ta aproksimacija je veliko boljša od prvih dveh.
Tako dobimo naslednjo aproksimacijsko formulo za pravilo središčne točke:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x(f(\bar{x_1}) + \cdots + f(\bar{x_n})),$$

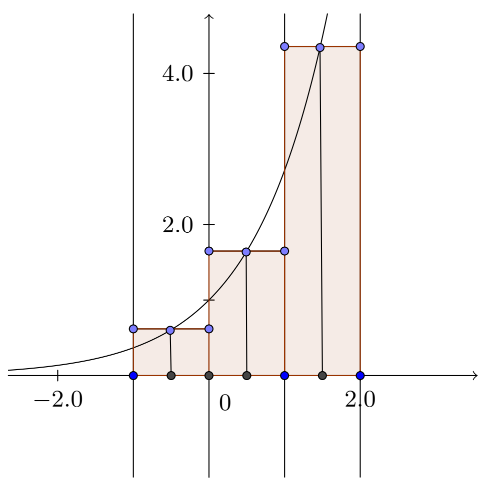
kjer je

$$\bar{x_i} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

<u>Primer.</u> Vzemimo funkcijo $y = e^x$ na intervalu $[-1, 2]$. Če integracijski interval razdelimo na tri enake dele, dobimo po tej formuli približno vrednost

$$\int_{-1}^2 e^x dx \approx 1 \cdot (e^{-1/2} + e^{1/2} + e^{3/2}).$$

Opomba. V danem primeru obstaja tudi natančna vrednost, ki jo dobimo po Newton-Leibnizevi formuli, in je enaka $\int_{-1}^2 e^x dx = e^x \mid_{-1}^2 = e^2 - e^{-1}$.



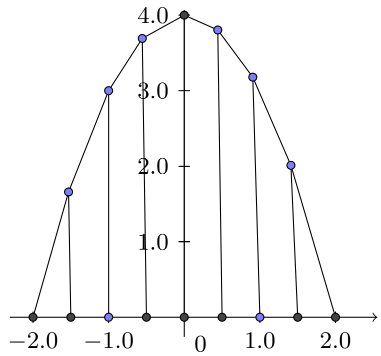
14.2. **Trapezna formula.** Zelo preprosta metoda je tudi *trapezna metoda*, ki na vsakem podintervalu ploščino ustreznega krivočrtnega lika aproksimira s ploščino trapeza. Če je

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

in pišemo $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$, potem je

$$I_n = \frac{\Delta_n}{2}(f(a) + 2f(a+\Delta_n) + 2f(a+2\Delta_n) + \cdots + 2f(a+(n-1)\Delta_n) + f(b))$$

pri velikih vrednostih n dober približek za pravo vrednost integrala I.



Za absolutno napako $R_n = |I - I_n|$ pri trapezni metodi dobimo oceno

$$R_n \leq \frac{h^2}{12}(b-a)M_2,$$

kjer je $M_2 = |\max f''(x)|$ za $a \leq x \leq b$ in $h = \frac{b-a}{n}$.

Primer. Z uporabo a) trapeznega pravila in b) pravila središčne točke in delitvijo integracijskega intervala na $n = 5$ enakih delov aproksimirajmo integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.
Rešitev. a) Imamo $n = 5, a = 1, b = 2$ in $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = 0.2$. Po trapeznem pravilu dobimo

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx T_5 = \frac{0.2}{2}\left[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)\right] =$$

$$0.1(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}) \approx 0.695635.$$

b) Središčne točke petih podintervalov so $1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ in 1.9. Po pravilu središčne točke dobimo

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \Delta x\left[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9) + f\right] \approx 0.691908.$$

Primerjajmo oba približka še z vrednostjo integrala, ki se da v tem primeru izračunati tudi eksplicitno, s pomočjo Newton-Leibnizeve formule:

$$\int_1^2 = \ln x\,|_1^2 = 0.693147\ldots$$

Opomba. Napaka pri pravilu središčne točke je navadno približno za polovico manjša kot napaka pri uporabi trapeznega pravila.
Opomba. Zaradi akumuliranja napak, ki se pojavljajo pri zaokožanju rezultatov armetičnih operacij, ni smiselno deliti integracijskega intervala na zelo veliko delov. S povečevanjem n se lahko natančnost izračuna povečuje.

14.3. **Simpsonova formula.** Obstajajo tudi boljše metode, npr. *Simpsonovo pravilo*: tu (za sod n) vzamemo naslednjii približek (dobljen tako, da posamezne dele funkcije nadomestimo s parabolami; ko seštejemo ploščine pod posameznimi posameznih parabolami, dobimo formulo):

$$I_n = \frac{\Delta_n}{3}(4f(a) + f(a+\Delta_n) + 2f(a+2\Delta_n) + \cdots + 4f(a+(n-1)\Delta_n + f(b)).$$

Za absolutno napako R_n dobimo pri Simpsonovem pravilu oceno

$$R_n \leq \frac{h^4}{180}(b-a)M_4 = \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4},$$

kjer je $M_4 = max|f^{IV}(x)|$ za $a \leq x \leq b$ in $h = \frac{b-a}{n}$.

15. FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

15.1. **Funkcija več spremenljivk.** *Funkcija več spremenljivk* $f\colon D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^n$, je preslikava, ki vsaki n-terici spremenljivk $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ iz D priredi realno število.

Primeri:

(1) $f(x, y) = \log(x + 2y) - xy$
(2) $f(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy^2 + 5xy - 4$
(3) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
(4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4$

15.2. **Graf funkcije več spremenljivk.** Funkcijo f dveh spremenljivk lahko predstavimo z *grafom* $G(f)$, ki sestoji iz vseh točk oblike $(x, y, f(x, y))$, kjer je $(x, y) \in D$, geometrijsko pa je to neka ploskev nad območjem D v koordinatni ravnini $x0y$. Tako je npr. graf funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ rotacijski paraboloid, dobljen z rotacijo parabole $z = x^2$ okrog osi z, graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ pa je navzdol obrnjen stožec stožec z vrhom v koordinatnem izhodišču.

15.3. **Parcialni odvodi.** *Parcialna odvoda* funkcije $f(x, y)$ sta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = f_x(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = f_y(x, y)$$

Parcialni odvod pove, kako se spreminja vrednost funkcije f, če se spreminja samo ena spremenljivka, druga pa je konstantna. Izračunamo ga tako, da izbrano spremenljivko obravnavamo kot dejansko spremenljivko, drugo pa kot konstanto.

<u>Primer.</u> Za $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2 - 4y + 5$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2y$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 2y - 4$.

Podobno definiramo parcialne odvode funckije n spremenljivk:

$$f_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$

<u>Primer.</u> Za $f(x, y, z) = x^3 \cos(yz)$ je $f_x(x, y, z) = 3x^2 \cos(yz)$, $f_y(x, y, z) = -x^3 z \sin(yz)$ in $f_z(x, y, z) = -x^3 y \sin(yz)$.

15.4. **Lokalni ekstremi funkcije več spremenljivk.** Naj bo $f(x_1, \ldots, x_n)$ funkcija n spremenljivk, definirana na domeni D. Rečemo, da je $(a_1, \ldots, a_n)$ lokalni minimum funkcije f, če velja $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(a_1, \ldots, a_n)$ za vse $(x_1, \ldots, x_n)$ iz neke okolice $(a_1, \ldots, a_n)$. Rečemo, da je $(a_1, \ldots, a_n)$ lokalni maksimum funkcije f, če velja $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(a_1, \ldots, a_n)$ za vse $(x_1, \ldots, x_n)$ iz neke okolice $(a_1, \ldots, a_n)$. Če je točka $(a_1, \ldots, a_n)$ lokalni maksimum ali lokalni minimum, rečemo, da je *lokalni ekstrem*.

Če so vsi parcialni odvodi v točki $(a_1, \ldots, a_n)$ enaki 0, je $(a_1, \ldots, a_n)$ *kritična točka* funkcije f.

Velja, da če je $(a_1, \ldots, a_n)$ lokalni ekstrem funkcije f, je tudi kritična točka. Obratno ne velja vedno.

<u>Primer.</u> Funkciji $f(x, y) = x^2 + y^2$ in $f(x, y) = x^2 - y^2$ imata obe imata kritično točko $(0, 0)$, ki je v prvem primeru lokalni minimum, v drugem pa ne (je *sedlo*).

15.4.1. *Hessejeva matrika.* Če želimo preveriti, ali je dana kritična točka lokalni minimum ali maksimum, uporabimo *Hessejevo matriko*, matriko drugih parcialnih odvodov:

$$H_f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x_1, \ldots, x_n) & f_{x_1x_2}(x_1, \ldots, x_n) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ f_{x_2x_1}(x_1, \ldots, x_n) & f_{x_2x_2}(x_1, \ldots, x_n) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_1, \ldots, x_n) & f_{x_nx_2}(x_1, \ldots, x_n) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

Za funkcijo dveh spremenljivk $f(x,y)$ je

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Primer. Za $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2 + 4x + 3$ je

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrika $H_f(x,y)$ je simetrična, zato ima same realne lastne vrednosti.

Velja:

- V kritični točki, v kateri je Hessejeva matrika pozitivno definitna (torej ima same pozitivne lastne vrednosti), ima funkcija lokalni minimum,
- v kritični točki, v kateri je Hessejeva matrika negativno definitna (torej ima same negativne lastne vrednosti), ima funkcija lokalni maksimum,
- v kritični točki, v kateri je Hessejeva matrika nedefinitna (torej ima tako pozitivne kot negativne pozitivne lastne vrednosti), pa ni ne lokalni minimum ne lokalni maksimum.

Če so vse lastne vrednosti Hessejeve matrike nenegativne, vendar so nekatere enake 0, ne moremo vedeti, ali je v točki lokalni minimum ali ne.

Primer. Za $f(x,y) = x^2 + y^2$ je $f_x(x,y) = 2x$ in $f_y(x,y) = 2y$, torej je edina kritična točka $(0,0)$. Ker je Hessejeva matrika enaka

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

z (dvojno) lastno vrednostjo 2, je $(0,0)$ lokalni minimum. Za $f(x,y) = x^2 - y^2$ je $f_x(x,y) = 2x$ in $f_y(x,y) = -2y$, torej je edina kritična točka $(0,0)$. Ker je Hessejeva matrika enaka

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

z lastnima vrednostma 2 in -2, $(0,0)$ ni ne lokalni minimum ne lokalni maksimum.

Primer. Poiščimo še lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 10x + 10y$$

na $D = \mathbb{R}^2$.

Parcialna odvoda sta

$$f_x(x,y) = 2x + y + 10$$
$$f_y(x,y) = 2y + x + 10$$

in sta oba enaka 0, če je $x = y = -10/3$. Ker je

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

z lastnima vrednostma 3 in 1, je $(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$ lokalni minimum.

15.5. **Lokalni ekstremi funkcije dveh spremenljivk.** Za funkcijo dveh spremenljivk lahko test povemo tudi takole:
Naj bo (x,y) kritična točka funkcije $f(x,y)$.

- Če sta tako sled kot determinanta Hessejeve matrike v točki (x,y) pozitivni, potem je (x,y) lokalni minimum,
- če je sled negativna, determinanta pa pozitivna, je (x,y) lokalni maksimum,
- če pa je determinanta negativna, (x,y) ni ne lokalni minimum ne lokalni maksimum.

Literatura

[1] A. Cedilnik, Matematični priročnik, Didakta, Radovljica, 1995.
[2] B. P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.
[3] P. Grošelj, Matematične metode za študente Biotehnične fakultete, Univerza v Ljubljani, Biotehniška fakulteta, Ljubljana 2017.
[4] D. W. Jordan, P. Smith, Mathematical techniques, An Introduction for the engineering, physical, and mathematical sciences, Oxford University Press, 2008.
[5] P. Mizori–Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, I, II., Ljubljana 1991.
[6] J. Usenik, Matematične metode I, II, Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko, Krško 2009.
[7] J. Stewart, Calculus: Early Transcendentals, Eight Edition, International Metric version, Cengage Learning, United States, 2015.