UNIVERZA NA PRIMORSKEM

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Leonhard Euler (1707 – 1783) – univerzalni matematik

doc. dr. Jurij Kovič

DRUGO UČNO GRADIVO

62 strani

Zgodovina in filozofija matematike,

Matematika, dodiplomski študijski program

PRVA IZDAJA

Koper 2020

Kazalo

1 Predgovor

To učno gradivo podaja zgoščen pregled Eulerjevega dela in prispevkov na različnih področjih matematike. Namenjeno je dodiplomskim študentom 3. letnika študijskega programa Matematika pri izbirnem predmetu *Zgodovina in filozofija matematike*. S pridom ga bodo lahko uporabljali tudi vsi tisti, ki jih zanima in si želijo konkretnih zgledov, kako lahko študij zgodovine matematike pomaga h boljšemu učenju, globljemu razumevanju in privlačnejšemu poučevanju matematike ter kako lahko odločilno motivira za odlično individualno in timsko raziskovalno delo na področju matematike, pa tudi k pisanju matematičih člankov in knjig.

In zakaj je v tem učnem gradivu izmed vseh velikih matematikov predstavljen prav Euler? Ker je prav on, s svojim ogromnim opusom in izjemnim ugledom ter vplivom na sodobnike in naslednje generacije, ključna figura v razvoju matematike, kot jo poznamo danes.

Zgodovina matematike, ki ima lastnosti tako naravoslovne tudi humanistične vede, je za večino matematikov zanimiva toliko bolj, kolikor več je v njej matematike, in kolikor manj je v njej zgodovine. Zato jedro tega učnega gradiva predstavlja pregled nekaterih ključnih Eulerjevih prispevkov k različnim področjem matematike. Vendar pa poudarek tega dela ni na faktografskem nizanju podatkov in dejstev o njegovih dosežkih, pa tudi ne na podrobni matematični rekonstrukciji posameznih njegovih prispevkov, dokazov, itd., ampak želi predvsem pokazati, na kakšne načine je Eulerjevo delo še danes živo, aktualno in pomembno za današnjega študenta, pedagoga in raziskovalca. Ker je vsako poglavje zasnovano tako, da odgovori na takšna vprašanja o Eulerju, ki so zanimiva za prav vsakega matematika, lahko to gradivo služi študentom kot zgled za podobno preučevanje dela drugih velikih matematikov, npr. v okviru domačega dela, seminarske naloge, ali morda tudi članka s področja zgodovine matematike. Eden od ciljev predmeta *Uvod v zgodovino matematičnih znanosti* je namreč pomagati študentom spoznati in osvojiti orodja in metode za samostojno raziskovanje zgodovine matematike, ter spodbujati njihovo sposobnost sintetiziranja in pisnega posredovanja matematičnih vsebin. To učno gradivo ima torej, poleg predstavitve Eulerjevega matematičnega dela, tudi ta dodatni, didaktični namen.

2 Eulerjeva univerzalnost in aktualnost

Najbolj presenetljiva pri Eulerju je njegova univerzalnost. Od modernih matematikov se mu je še najbolj približal Hilbert; vendar je ta delal precej drugače kot Euler. Hilbertova kariera je bila razdeljena na bolj ali manj jasno ločena obdobja v katerih se je skoraj izključno posvečal enemu samemu področju. Toda z Eulerjem je bilo precej drugače. Znova in znova se je vračal k svojim temam, včasih celo po več desetletjih. Pogled na kronologijo njegovih del razodene, da je počel mnogo različnih stvari v istem obdobju.

V. S. Varadarajan: Euler Through Time: A New Look at Old themes, AMS, 2006.

2.1 Zakaj danes študirati Eulerja?

Za motivacijo naštejmo nekaj razlogov, zakaj je pomembno študirati Eulerja tudi danes, čeprav je matematika od njegovih časov precej napredovala:

(1) Ker je Euler eden najbolj univerzalnih in ustvarjalnih matematikov vseh časov, nam lahko preučevanje njegovega dela osvetli večino osnovnih matematičnih področij (npr. analizo, algebro, teorijo števil, geometrijo, itd.), ki jih razumemo celoviteje, če poznamo njegov prispevek k tem področjem.

(2) Euler je odločilno prispeval k številnim matematičnim področjem, metodam, pojmom, oznakam, itd., jih bodisi začel, razvil, na novo interpretiral, jih populariziral, volival na njihov razvoj, itd.

(3) Kot eden najbolj plodovitih matematičnih piscev vseh časov je naslednjim generacijam zapustil ogromen opus (30.000 strani) izredno kakovostne in domiselne matematike, ki je lahko še danes zgled pedagogom in piscem matematičnih člankov in knjig pri kar se da jasni in privlačni predstavitvi različnih matematičnih vsebin, raziskovalcem pa navdih in motivacija za drzno, domiselno, prodorno in metodično odkrivanje še neznanih matematičnih področij ter povezovanje na videz nezdružljivih matematičnih teorij.

(4) Euler je bolj kot katerikoli drug matematik posedoval tako matematične sposobnosti in talente (kot so npr. spodobnost dokazovanja, računanja, prepoznavanja vzorcev, razvijanja novih konceptov in teorij, itd.) in pisateljski talent (tako so npr. njegova *Pisma nemški princesi* še danes nepreseženi

zgled poljudnoznanstvenega bestsellerja), njegova *Mehanika*, v kateri je Newtonovo fiziko predstavil v modernem jeziku matematične analize, pa je med sodobniki požela veliko občudovanja in pohval. V današnji digitalni dobi, ko jezikovna pismenost drastično upada, saj večino informacij pridobimo z ekranov računalnikov in pametnih telefonov, je celo branje, kaj šele pisanje knjig, pri mlajših generacijah vse bolj redka veščina, zato je ponovno spodbujanje in prepoznavanje teh veščin kot vrednot zelo pomembno. In če nam danes ni poseben problem naučiti se novega programskega jezika, ki ga bo že čez nekaj let zamenjal in izrinil neki drugi programski jezik, pa je toliko težje najti nekoga, ki bi se bil npr. pripravljen naučiti latinščine, da bi lahko bral kakšno Eulerjevo delo v originalu. Morda pa bo to učno gradivo vseeno koga spodbudilo prav k temu, in bomo kdaj dobili tudi prevod kakšnega Eulerjevega dela v slovenščino.

(5) Euler je, ker je njegovo delo tako obsežno in v celoti ohranjeno, kar je v zgodovini matematike oboje velika redkost, tako rekoč idealna figura za spoznavanje tako zgodovine matematike kot tudi njenih metod. V zgodovini matematike poizkušamo spoznati in kolikor mogoče dobro razumeti način razmišljanja matematikov drugih časov, pa tudi drugih kultur. Pri tem poizkušamo najti vire kolikor mogoče blizu izvirnim, primarnim tekstom, čeprav se, zaradi nepoznavanja tujih jezikov, moramo dostikrat zateči k sekundarnim ali terciarnim virom, prevodom ali povzetkom. Pri branju nadomestkov (učbeniške matematike), se namreč marsikaj izgubi, kar še posebej velja v primeru Eulerja, njegove domišljije in izvirnosti. Euler je – za razliko od Gaussa, ki je vzvišeno skrival načine, kako je prišel do svojih rezultatov (rekoč da katedrala, ko je zgrajena, ne potrebuje več zidarskih odrov) – rad pokazal bralcu tudi pot, po kateri je prišel do svojih odkritij. Ta pot je dostikrat vključevala induktivno sklepanje in postavljanje hipotez na podlagi odkrivanja vzorcev, prepoznanih pri velikem številu preučenih posebnih primerov.

(6) Euler je pri sodobnikih veljal za "utelešenje analize". Infinitezimalni račun je danes, poleg linearne algebre (ta se je močneje razvila šele v XX. stoletju), eno izmed najbolj vsestransko uporabnih področij matematike, zato je pomembno omeniti prispevek, ki ga je Euler naredil tudi na tem področju.

3 Eulerjevo življenje

Še pred nekaj stoletji, npr. v času Fibonaccija, so matematiki v Evropi imeli na voljo le malo matematičnih knjig. Posamezen matematik je lahko obvladal celotno matematično znanje prejšnjih generacij. Euler je bil morda zadnji veliki matematik, ki je še posedoval takorekoč univerzalno matematično znanje svoje dobe. Danes kaj takega ni več mogoče. Za razliko od matematikov preteklosti se moramo danes specializirati na določeno področje. V današnji informacijski dobi, ko so vsakovrstni podatki lahko dostopni, bodisi v knjigah oz. knjižnicah bodisi v elektronski obliki, je veščina izluščiti bistveno (glede na določen vnaprej določen raziskovalni cilj) zelo pomembna. Večini matematikov življenja drugih matematikov sama po sebi niso prav nič zanimiva. Ker pa je Euler tako pomembna figura v zgodovini matematike, ni odveč poznati vsaj nekaj osnovnih dejstev tudi o njegovem življenju.

3.1 Kaj si velja zapomniti o Eulerjevem življenju?

Tu je zbranih nekaj osnovnih podatkov o njegovi življenjski poti in osebnosti:

(1) Rojen je bil spomladi 1707 (blizu Basla v Švici), umrl v starosti 76 let jeseni 1783.

(2) Njegov oče je bil protestantski duhovnik, ne najbolj premožen. Tudi njegova mama je bila iz duhovniške družine. Tako se je zdel vnaprej določen za duhovnika.

(3) Kot oseba je bil konvencionalen, prijazen, darežljiv, preprost. Na intelektualnem področju pa je bil velik in drzen raziskovalec, pionir, ki je potoval skozi čudovite matematične pokrajine.

(4) Že mlad je pokazal dar za jezike. Imel je tudi izvrsten spomin. (za govore, pesmi, tabele praštevil, itd.). Znal je tudi izvrstno računati na pamet.

(5) Na Univerzo v Baslu se je vpisal star 14 let. Tam je spoznal njenega najslavnejšega profesorja, Johanna Bernoullija (1667–1748). Čeprav ni bil njegov učitelj v običajnem pomenu besede, je postal vodnik mlademu študentu, priporočal mu je matematično čtivo, z njim vsako soboto popoldne razpravljal o tistih mestih, ki so se mu zdela posebej težka, in mu, kot se je Euler tega še leta pozneje spominjal, prijazno razložil vse, kar ni razumel. Z leti se je njun odnos spreminjal, z napredkom Eulerja je Bernoulli vse bolj

postajal Eulerjev učenec. Nekoč mu je ta mož, ki ni zlahka dajal komplimentov, pisal takole: "*Jaz razlagam analizo, kot je bila v svojem otroštvu, ti pa ji daješ njeno odraslo, zrelo podobo.*"

(6) Na univerzi je študiral tudi druge predmete. Nazadnje se je odvrnil od študija teologije in postal matematik. Že pri 20 letih je požell priznanje na mednarodnem znanstvenem tekmovanju (za svojo analizo porazdelitve tovorov na ladji), kar je bilo znanilec nadaljnjih uspehov.

(7) Leta 1725 je v Rusijo prišel Johannov sin in Eulerjev prijatelj Daniel Bernoulli (1700–1782) na mesto profesorja matematike na novi St. Peterburški Akademiji. Naslednje leto je bil tja povabljen Euler, ki je potem tja prišel leta 1727. Tam sta prijatelja na dolgo in široko razpravljala o fiziki in matematiki, in ti njuni pogovori so do neke mere začrtalo smer evropske znanosti v naslednjih desetletjih.

(8) Leta 1733 je Daniel Bernoulli dobil akademsko pozicijo v Švici. Tako se je Eulerju odprla pot do prostega mesta v matematiki, ki ga je kmalu zavzel. Kmalu potem se je poročil, s hčerko švicarskega slikarja, ki je živel v Rusiji. V štirih desetletjih srečnega skupnega življenja se jima je rodilo trinajst otrok, od tega jih je, kot je bilo takrat običajno, le pet preživelo do pubertete, le trije pa so preživeli svoja starša.

(9) Intelektualno življenje v Rusiji je Eulerju popolnoma odgovarjalo. Dostikrat je tudi svetoval vladi, pripravljal zemljevide, svetoval ruski mornarici, itd. Njegova slava je rasla.

(10) Med njegovimi zgodnejšimi zmagoslavji je bila rešitev t. i. Baselskega problema, s katerim so se neuspesno ukvarjali matematiki prejšnjega stoletja. Treba je bilo določiti natančno vrednost neskončne vrste

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \cdots + 1/k^2 + \cdots$$

Problem je zastavil leta 1644 Pietro Mengeli (1625-1686), širši matematični javnosti pa ga je leta 1689 predstavil Jakob Bernoulli (1654–1705) − Johannov brat in Danielov stric. Numerične aproksimacije so pokazale, da je ta vrednost nekje v bližini 8/5, natančne vrednosti pa matematiki niso znali določiti. Eulerjev rezultat iz leta 1735 je predstavljal veliko presenečenje, kajti pokazal je, da je vsota te vrste $\pi^2/6$.

(11) Euler je nadaljeval s plodnim in uspešnim delom. Objavljal je članek za člankom. Včasih je bila polovica člankov v reviji St. Peterburške

akademije njegovih. A v tem obdobju so se pojavili trije problemi: i) Tujci v Rusiji so padli v nemilost. ii) Akademijo je vodil pompozen birokrat Johann Schumacher, ki je zatiral talent, kjerkoli ga je mogel. iii) Leta 1783 je Euler oslepel na desno oko, kar je sam pripisal prekomernemu delu, morda pa je bilo tudi posledica vnetja. Vendar to ni prav nič vplivalo na Eulerjevo delo in raziskovalni program. Ogromno je prispeval h klasični teoriji števil, utiral je nove poti v analitični teoriji števil, postavil je temelje teoriji particij, in napisal *Mehaniko*, ki je predstavila Newtonove zakone gibanja v okviru infinitezimalnega računa, in so jo imenovali "mejnik v zgodovini fizike".

(12) Rastoči ugled mu je prineslo povabilo pruskega kralja Friderika Velikega (1712–1786), naj postane član obnovljene Berlinske akademije. Zaradi težke politične situacije v Rusiji, se je Eulerju ponudba zdela vabljiva. Tako se je skupaj z ženo Katarino in otroci leta 1741 preselil v Berlin, ki mu je bil dom četrt stoletja. V tem času je objavil dve od svojih največjih del – leta 1748 tekst o funkcijah, *Introduction in analysin infinitorum*, ter leta 1755 *Institutiones calculi differentiali.* V tem času je tudi raziskoval kompleksna števila in odkril t.i. Eulerjevo identiteto

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

poizkušal pa je dokazati tudi osnovni izrek algebre.

(13) V Berlinu je na povabilo, naj inštruira v elementarni znanosti princeso iz Anhalt Dessaua napisal tudi knjigo več kot 200 "pisem", objavljanih po odlomkih kot *Pisma Eulerja o različnih predmetih iz naravne filozofije naslovljena na nemško princeso.* Pisma nemški princesi so postala mednarodna uspešnica in Eulerjeva najbolj brana knjiga ter vse do danes eden najboljših primerov poljudnoznanstvenega čtiva.

(14) Z ruskimi kolegi na Akademiji je ves čas svojega bivanja v Berlinu ohranjal stike. Ni imel najboljših odnosov ne z nemškim kraljem, Friderikom Velikim, ne z njegovim ljubljencem, filozofom Voltairom. Leta 1766 se je zato rad vrnil na Akademijo v St. Petersburg. Leta 1771 je bil že skoraj povsem slep. 1773 je umrla njegova žena Katarina. Vseeno je neutrudno nadaljeval s svojim delom. Okrog 1775 je napisal v povprečju en članek na teden.

(15) Umrl je Leta 1783. Še zadnjega dne je računal, in sicer je raziskoval orbito planeta Urana. Zapustil nam je ogromno dediščino, iz katere si bomo ogledali le majhen delček.

4 Eulerjevo delo

Da bi tako dobili vsaj pogled iz ptičje perspektive na Eulerjeve dosežke, je bolje razdeliti njegov opus na različna področja in potem pogledati na njegov prispevek k vsakemu od njih: mehaniko, fiziko, astronomijo in gibanje planetov, optiko (tako teoretično kot praktično), kombinatorično topologijo in teorijo grafov, in tako dalje. Sama neizmernost naloge podati pregled Eulerjevih prispevkov k različnim vejam matematike postane očitna, ko začnemo brati uvode k različnim zvezkom Opera Omnia.

V. S. Varadarajan: Euler Through Time: A New Look at Old themes, AMS, 2006.

4.1 Kaj je prispeval k različnim področjem matematike?

Euler je, kot eden najustvarjalnejših matematikov vseh časov, odločilno prispeval k številnim področjem matematike, kot so npr.

- Teorija števil
- Analiza
- Algebra
- Geometrija
- Kombinatorika
- Logaritmi
- Neskončne vrste in produkti

Njegova *Zbrana dela – Opera omnia*, še vedno izhajajo, obsegajo pa 80 zvezkov, od tega 29 zvezkov o matematiki.

Ker je Eulerjevo delo tako obsežno, je lahko vsak pregled tega dela samo prvi in zelo grob približek dejanskega obsega njegovih dosežkov.

Čeprav torej celovit pregled vsega njegovega dela praktično ni mogoč, pa je njegovo delo vseeno vredno vsaj bežno preleteti, vsaj iz naslednjih razlogov:

1) ob tem se lahko veliko naučimo in si razširimo matematična obzorja,

2) to nas lahko motivira tako za nadaljnje raziskovanje Eulerjevega dela kot tudi posameznih matematičnih področij in njihove zgodovine.

Eulerjevo delo je, zaradi njegove obsežnosti, smiselno pregledovati po posameznih področjih (in še to po ne vseh, zgoraj omenjenih, saj bi to zelo povečalo obseg besedila). Ob tem bomo na kratko pregledali tudi razvoj nekaterih izmed temeljnih matematičnih področij, in sicer nas bo zanimalo:

i) Kaj so naredili Eulerjevi predhodniki,

ii) Kaj je prispeval Euler,

iii) Kaj so naredili Eulerjevi nasledniki.

Tako bomo ob preučevanju Eulerja zgoščeno pregledali tudi velik in pomemben del zgodovine (sodobne) matematike, h katere razvoju je prav Euler, morda bolj kot kdorkoli drug pred njim in po njem, odločilno prispeval.

4.2 Teorija števil

V antiki sta se s teorijo števil ukvarjala Evklid (v treh knjigah *Elementov*) in Diofant (v ohranjeni knjigi *Aritmetika*).

V 17. stoletju se je s teorijo števil ukvarjal praktično samo francoski matematik in pravnik Pierre de Fermat (1601–665), ki je študiral Diofantovo delo. Fermat svojih rezultatov ni objavljal, mnoge svoje trditve je puščal nedokazane – kot izziv drugim matematikom, naj jih dokažejo, če znajo.

Tudi v 18. stoletju je teorija števil veljala za manj pomembno disciplino.

To pa se je spremenilo, ko se je z njo začel ukvarjati Euler, potem ko ga je na Fermatovo delo opozoril nemški matematik Christian Goldbach (1690–1764). Večino Fermatovih rezultatov je Euler dokazal sam, nato pa teorijo razvijal dalje. S teorijo števil se je ukvarjal vse življenje z velikim navdušenjem in uspehom. Njegova dela s področja teorije števil obsegajo kar 4 od 75 zvezkov njegovega zbranega dela (*Opera Omnia*). Dokazal je mnogo splošnih rezultatov, vpeljal mnoge nove pojme, razvil mnoge nove metode, s katerimi je podal nove dokaze znanih izrekov ali dokazal nove. Te metode razvijajo še naprej in dajejo pomembne rezulate še danes. Ukvarjal se je tako s “klasično” teorijo števil, kot tudi z “analitično”, katere začetnik je. Euler je teorijo števil vzpostavil kot sistematično matematično disciplino oziroma je postavil njene temelje, na katerih so lahko gradili drugi, kot npr. Lagrange, Legendre, Gauss, Hardy, Ramanujan, Littlewood, itd.

Omenimo nekaj Eulerjevih prispevkov k teoriji števil:

[1] V analizo celih števil je vpeljal neskončne vrste, rodovne funkcije in neskončne produkte.

[2] Ukvarjal se je tudi z aditivno teorijo števil ter s problemom porazdelitve praštevil v zaporedju vseh naravnih števil.

[3] Vse življenje ga je zanimala aritmetična narava nekaterih števil, kot so e, $\ln 2$, Eulerjeve konstante C, ki jo danes pišemo γ, itd. Dokazal je, da so naravni logaritmi x racionalnih števil b pri racionalni bazi a transcendentni, oziroma da je $a^x = b$ pri $a, b \in \mathbb{Q}$ lahko res le za trancendenten x.

[4] Dokazal je naslednjo Fermatovo trditev: “*Če je p praštevilo in a celo število, ki ni deljivo s p, potem je število*

$$a^{p-1} - 1$$

deljivo s p.”

[5] Vpeljal je funkcijo $\phi(m)$, definirano kot število naravnih števil, manjših od m in tujih m, in pokazal njeno multiplikativnost:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$$

če sta si števili a in b tuji. Pokazal je tudi, da za vsako praštevilo p velja:

$$\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}.$$

[6] Ugotovil je, da se ostanki po modulu m potenc $a^0, a^1, a^2, ...$ celega števila a, tujega številu m, periodično ponavljajo, s tem ko je pokazal, da je število $a^{\phi(m)} - 1$ deljivo z m. *Perioda* q zaporedja takega ostankov potenc $a^0, a^1, a^2, ...$ po modulu m je lahko manjša od $\phi(m)$, a vselej deli $\phi(m)$. Če obstaja tak a, da je red a po modulu m enak $\phi(m)$, potem se vsako število, tuje m, da izraziti kot potenca a^k tega števila, ki torej igra vlogo, enako vlogi osnove logaritmov, red k pa igra vlogo logaritma.

[7] Euler je, sledeč tej analogiji, vpeljal pojem *primitivnega korena* po modulu m. To je tako število g, da je $g^k - 1$ deljivo z m tedaj in le tedaj,

ko je k večkratnik števila $\phi(m)$. Vpeljal je tudi pojem *indeksa* števila N po modulu m pri osnovi g, to je takega k, da je izraz $g^k - N$ deljiv z m. Ugotovil je lastnosti indeksov, njihov obstoj pa je znal dokazati le za primer, ko je m praštevilo p. Da primitivni koreni obstajajo le v primerih modulov oblike p^α, $2p^\alpha$, 4, je dokazal šele Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

[8] S pomočjo teorije indeksov je dokazal obstoj primitivnih korenov za poljubno praštevilo p (čeprav ne strogo, kar je storil šele Gauss v *Disquisitiones arithmeticae* leta 1801), in *Wilsonov izrek*, ki pravi: "*Število*

$$(m-1)! + 1$$

je vselej deljivo z m, če je m praštevilo." Ta dokaz bi danes zapisali takole:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1) \equiv a^{0+1+2+\ldots m-2} = a^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \equiv$$

$$a^{\frac{m-1}{2}} a^{(m-1)\frac{m-3}{2}} \equiv a^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1 (mod\, m).$$

Če je namreč m praštevilo, je $a^{m-1} \equiv 1$ in $(a^{\frac{m-1}{2}})^2 \equiv 1$, torej je $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1$, saj je a primitivni koren, zato ne more biti $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$.

[9] Euler je vpeljal tudi pojem *potence stopnje n po praštevilskem modulu p* kot takšno število a, da je $x^n - a$ deljivo s p.[1] Najzanimivejše od teh potenc so kvadrati. Euler je raziskoval njihove lastnosti, in odkril *kvadratni reciprocitetni zakon*, ki formulira zvezo med obstojem rešitev kongruenc $x^2 \equiv a (mod\, q)$ in $x^2 \equiv a (mod\, p)$. "*Če sta p ali q oblike $4n+1$, potem je a hkrati kvadrat ali nekvadrat po modulih p in q. Če pa imata p in q oba obliko $4n-1$, potem je a obvezno kvadrat po enem od njiju, po drugemu pa ne.*" Ta zakon je stogo dokazal šele Gauss. Torej je že Euler vpeljal osnovne pojme *teorije kongruenc*, ki jo je sicer dokončno zgradil Gauss.

[11] Euler se je sistematično ukvarjal tudi s teorijo *verižnih ulomkov* in našel mnogo njihovih uporab. Za e je leta 1737 našel neskončni verižni ulomek $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots, 2n, 1, 1, \ldots]$, s čimer je dokazal, da je e iracionalno število (saj ima vsako racionalno število končen verižni ulomek).

[12] Precej dela je posvetil vprašanju obstoja celoštevilskih in racionalnih rešitev enačb, kot npr. enačbe $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$. Obravnaval je tudi druge probleme *diofantske analize* z dvema in tremi neznankami. Rešil

[1] Problem obstoja potenc je pomemben npr. pri zapisu števil s kvadratnimi formami.

je tudi neke sisteme enačb v celih številih. Fermat je npr. postavil nalogo: $x + y = u^2, x^2 + y^2 = v^4$. Zanimivo je, da je najmanjša celoštevilska rešitev: x = 4565486027761, y = 106165293520.

[13] Dokazal je veliki Fermatov izrek (da ne obstajajo netrivialne rešitve enačbe $x^n + y^n = z^n$, če je $n \geq 3$ v celih številih) za primera $n = 3$ in 4, po *metodi neskončnega spusta*; dokazal je, da če bi obstajala neka taka rešitev, bi morala obstajati neka rešitev v manjših številih. To vodi v protislovje.

[14] Euler je našel tudi *nov kriterij za ugotavljanje, ali je neko število n praštevilo ali ne*, s pomočjo reprezentacije števila v obliki vsote $n = x^2 + y^2$ dveh različnih kvadratov pozitivnih števil x in y. Fermat je trdil, da je vsako praštevilo oblike $p = 4k+1$ vsota dveh kvadratov naravnih števil, $p = x^2+y^2$. Euler je pokazal to in še več, in sicer, da se vsako praštevilo oblike $4n + 1$ enolično izraža na tak način, oziroma, da ima enačba $n = x^2 + y^2$ eno samo rešitev v naravnih številih x in y, $x < y$, kjer sta si x in y tuja, medtem ko se sestavljeno število, če se da tako izraziti, da izraziti tako na več načinov. Tako je, s pomočjo tablice kvadratov, veliko lažje ugotoviti, da so določena števila praštevila, kot pa z metodo deljenja števila z vsemi števili do $\sqrt{(N)}$. Njegov kriterij pravi: "*Potreben in zadosten pogoj za to, da je število oblike* $4n + 1$ *praštevilo, je, da ima reprezentacijo, ki je ena sama, in prava*" (t.j. taka, pri kateri sta si x in y tuji si števili).

Tako je npr. odkril, da so 82421, 100981 in 2626557 praštevila, medtem ko 1000009, 233033 in 32129 niso. Imamo sicer enolično reprezentacijo $32129 = 95^2 + 152^2$, vendar pa ta ni prava, saj imata 95 in 152 skupen faktor 19.

[15] Euler je obravnaval tudi splošnejša vprašanja reprezentacije praštevil p v obliki $p = x^2 + Ny^2$.

[16] Zanimala so ga tudi poligonska števila in izražava števil kot njihovih vsot. Fermat je v svojih pismih Mersennu, Pascalu in drugim zapisal, da je *vsako število vsota treh trikotniških števil, štirih kvadratov, 5 petkotniških števil, 6 šestkotniških števil, itd.* (0 štejemo kot poligonsko vstevilo). Gauss je to dokazal za trikotniška števila; 10 julija 1796 (ko je bil star 19 let), je v svoj matematični dnevnik zapisal: "*EUREKA. num* $= \triangle + \triangle + \triangle$." Cauchy je leta 1815 dokazal splošni izrek (od 5 petkotniških števil dalje). Euler je dokazal poseben primer izreka za 4 kvadrate, a le za racionalne rešitve. Šele ko je videl Lagrangev dokaz, ga je Euler uspel še poenostaviti.

4.3 Kompleksna števila

4.3.1 Eulerjevi predhodniki in zadrega s kompleksnimi števili

Kompleksna števila se v zgodovini najprej pojavijo v rešitvah kubičnih enačb $ax^3+bx^2+cx+d=0$. V Italiji, nekje od 13. do 16. stoletja, še pred pojavom analitične geometrije, so matematiki iskali eksplicitne rešitve enačb tretje in četrte stopnje. Svoje rešitve so zapisovali verbalno, brez algebrajskega simbolizma, ki ga je prispeval šele Francois Viéte. Poznali so že recept za reševanje kvadratne enačbe (Al Khowarizmi, Omar Hajam), po analogiji so iskali podobno metodo za reševanje kubične enačbe.

Omar Hajam (perzijski pesnik, filozof, matematik in astronom iz druge polovice 11. stoletja, na Zahodu najbolj znan po prevodih svojih 600 štirivrstičnih pesmi, zbranih v knjigi *Rubaiyat*) je v knjigi "*Algebra*" (*O dokazih problemov algebre in muqabale*) je podal rešitve šestih tipov kubičnih enačb, v katerih nastopata monom in binom:

$$x^3 + ax = b$$

$$x^3 + b = a$$

$$x^3 = ax + b$$

$$x^3 + ax^2 = b$$

$$x^3 + b = ax^2$$

$$x^3 = ax^2 + b$$

Tu sta a in b vselej pozitivni števili (sicer bi imeli le dva tipa: brez kvadratnega člena, in brez linearnega člena). Do rešitev je prišel z geometrijsko metodo, in sicer z določitvijo presečišč stočnic (npr. dveh parabol ali parabole in kroga). Vsak tip enačbe zahteva nekoliko drugačno geometrijsko metodo (konstrukcijo).

Metodi *al-jabr* in *al-muqabala* sta v Italiji najprej postali poznani po latinskih prevodih al-Khowarizmijeve *Algebre*, ki jih je priskrbel Gerard iz Cremone, ter po delu Leonarda iz Pise (Fibonaccija). Med njunimi nasledniki je najbolj znan pisec aritmetičnih učbenikov Luca Pacioli.

V trinajstem stoletju je razvoj matematike v Italiji močno pospešil prehod iz blagovne trgovine v monetarno trgovino. Razvilo se je bančništvo, potreba po računanju obresti in dolgov. Namesto rimskih številk, ki so bile za računanje prenerodne, so začeli uporabljati arabske.

S kubičnimi in bikvadratnimi enačbami so se v Italiji ukvarjali: mojster Benedetto iz Firenc, mojster Biaggio iz Firenc, Attonio Mazzinghi, Luca Pacioli, mojster Dardi iz Pise, Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Gerolamo Cardano, Lodovico Ferrari, Rafael Bombelli, in drugi. Ker še ni bilo razvitega matematičnega simbolizma, so uporabljali nekakšno "retorično algebro", vsak je npr. uporabljal svoje izraze ali oznake za x, x^2, x^3, x^4, itd. Namesto formul, kot jih poznamo danes, so uporabljali besedne opise postopkov, ki pripeljejo do rešitev. Dostikrat so bili razloženi le na konkretnih številskih primerih. Po zgledu postopka (formule) za reševanje kvadratne enačbe so iskali rešitve enačb tretje in četrte stopnje, v katerih bi lahko nastopali tudi radikali (koreni). Scipione del Ferro (1465–1526) iz Bologne je leta 1515 odkril takšno rešitev za *reducirano kubično enačbo*

$$x^3 = mx + n$$

oziroma enačbo tretje stopnje brez kvadratnega člena. V teh rešitvah se zgodovinsko prvič pojavijo koreni negativnih števil.

Dejansko so takrat razlikovali med tremi tipi reduciranih kubičnih enačb, ker so dopuščali le pozitivne koeficiente in pozitivne x:

$$\begin{aligned} x^3 + px &= q \\ x^3 &= px + q \\ x^3 + q &= px. \end{aligned}$$

Bistvo te metode je (zelo splošno uporaben trik!): neznanko nadomestimo z dvema parametroma, $x = u + v$, kjer u in v pametno izberemo tako, da dobimo zanju sistem dveh enačb. Rešitvi za druga dva tipa reduciranih kubičnih enačb je našel Niccolo Tartaglia.

Rešitve kubičnih enačb Scipiona del Ferra in Tartaglie je objavil Gerolamo Cardano 1545 v knjigi *Ars Magna.*[2] Od takrat jim pravimo *Cardanove formule.*

[2] V isti knjigi je objavil tudi rešitve za enačbe 4. stopnje Lodovica Ferrarija.

Izrek 1 *Rešitev reducirane kubične enačbe* $x^3 = mx + n$ *je*

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}.$$

<u>Primer.</u> Če vzamemo konkreten primer $x^3 = 6x + 4$, je $m = 6$ in $n = 4$, dobimo (namesto pričakovanih treh realnih rešitev) presenetljiv rezultat, za katerega se zdi, da ne more biti pravilen:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}.$$

Graf funkcije $y = x^3 - 6x + 4$ ima namreč eno ničlo pri -2, in lahko je videti, da mora imeti še dve realni ničli. V dobljenem izrazu pa se " očitno" pojavljajo imaginarna števila. Kaj je šlo narobe? Italijanski matematiki 16. stoletja so bili soočeni z dilemo: bodisi so Cardanove formule nepopolne, nepravilne, nezanesljive, uporabne le včasih, bodisi se nekje v tem rezultatu skriva realno število!

To drugo možnost je zagovarjal Rafael Bombelli (1526-1573). Predpostavil je, da je tretji koren iz kompleksnega števila kompleksno število oblike $p+q\sqrt{-1}$, vstavil ta "nastavek" v prvotno enašbo in ta dva parametra p in q pametno izbral tako, da je dobil sistem dveh enačb za p in q, ki je naposled pripeljal do tega, da sta se pri seštetju korenov imaginarna korena pokrajšala, ter dobil pričakovano realno rešitev (v gornjem primeru bi bila ta $x = -2$). Če namreč pozabimo predsodke in kubiramo izraz:

$$(-1 + \sqrt[3]{-1})^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2\sqrt{-1} + 3(-1)(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3$$

$$= (-1 + 3\sqrt{-1})^3 - \sqrt{-1} = 2 + 2\sqrt{-1}.$$

Torej je smiselno sklepati, da je $\sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} = -1 + \sqrt{-1}$. Podobno vidimo, da je $(-1+\sqrt{-1})^3 = 2-2\sqrt{-1}$ in zaključimo, da je $\sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}} = -1-\sqrt{-1}$. Od tod po Cardanovi formuli za enačbo $x^3 = 6x + 4$ vendarle dobimo realno rešitev $x = -2$.

Vendar je tudi sam Bombelli priznal, da stvari še niso povsem jasne. Najprej se mu je zdelo, da gre za "*rešitev, ki temelji bolj na sofizmu kot na resnici*". Do neoporečne metode je manjkalo še kar še vsaj dvoje: 1) Kako vedeti, za splošno reducirano enačbo tretje stopnje, kateri izraz kubirati, da bomo lahko izvedli podoben trik? In kje sta še druga dva realna korena?

Zadrega matematikov v zvezi s kompleksnimi števili – ali lahko dokažemo, da dejansko obstajajo in če obstajajo, kako jih strogo definirati – je trajala nadaljnjih sto petdeset let. Cardano je primer, ko v rešitvah nastopajo kvadratni koreni iz negativnih števil, imenoval "casus irreducibilis". Vseeno je, v zvezi z rešitvijo naloge: "*Razdeliti 10 na dva dela (sumanda), katerih produkt je 40.*", potem ko je dobil rešitvi $5+\sqrt{-15}$ in $5-\sqrt{-15}$ v zadregi priznal, da gre sicer za nemogočo rešitev, ki mu sicer povzroča "mentalne muke", vendar pa formalno zadošča pogojem naloge. Njegova zadrega je bila razumljiva. Delili so si jo tudi drugi matematiki naslednjih sto petdest let, Descartes v *Géometrié* (1637) za korene negativnih števil vpelje izraz "*imaginarni*" koreni. Celo Leibniz je imenoval $\sqrt{-1}$ "ta amfibija med bitjem in nebitjem". Vprašanje obstoja kompleksnih števil še ni bilo razrešeno.

4.3.2 Euler in kompleksna števila

Šele Euler je pojasnil zadevo in pomagal odpraviti predsodke do kompleksnih števil, predvsem s tem, ko je pokazal, kako zelo so uporabna. Tako je npr. z njimi poiskal korene enote, uporabil De Moivreovo formulo, da je izpeljal identiteto $e^{i\phi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$, iz nje pa slavno formulo $e^{i\pi} + 1 = 0$ ter $i^i = e^{-\pi/2}$. Definiral je sinus in kosinus kompleksnega števila $a+bi$ in pokazal, da je $\sin^2(a+bi) + \cos^2(a+bi) = 1$, ter logaritme negativnih števil, kar ni zadovoljivo uspelo ne Johannu Bernoulliju ne Gottfriedu Wilhelmu Leibnizu.

Vprašanje 1 *Zakaj mu je vse to uspelo, oz. kaj mu je pomagalo pri tem?*

(1) Stvari je raziskal globlje od svojih predhodnikov.

(2) Euler ni imel pomislekov glede kompleksnih števil. Za Eulerja je bila značilna neomajna vera v moč simbolov in manipulacij z njimi ter matematična drznost za skok v neznano. Z imaginarnimi količinami je računal po istih pravilih, ki veljajo za realna. To je bil nekakšen njegov kompas, po

katerem se je ravnal, ko je raziskoval neznano področje kompleksnih števil. Tudi v formule, ki so veljale v realnem, je mirno vstavljal imaginarna števila (npr. v izraze za vrste, ali pa je v integralu substituiral realno spremenljivko z imaginarno: $y = xi$), podobno kot je produkt neskončno linearnih členov obravnaval kot polinom neskončne stopnje, ki mora imeti neskončno rešitev. Z divergentnimi vrstami je formalno računal podobno kot s konvergentnimi. Lahko bi rekli: narava simbolov (domena, iz katere so) ga ni zanimala.

(3) Pomagalo mu je morda tudi to, da je Viéte vpeljal črke za označevanje spremenljivih količin in konstant, kar je omogočilo manipuliranje oziroma računanje s simboli (namesto s števili). In Euler je bil dober prav v tem. Euler je tudi vpeljal oznako $i = \sqrt{-1}$.

(4) V svoji knjigi *Elementi Algebre* je opisal $\sqrt{-1}$ kot "*niti nič, niti večje kot nič, niti manj kot nič...*" in zapisal "... *vsiljuje se nam ideja števil, ki so po svoji naravi nemogoča; in zato jih ponavadi imenujejo imaginarne količine, ker obstajajo samo v domišljiji.*" Nato pa je prešel v zagovor teh števil: "*...navkljub temu pa se ta števila pojavljajo v umu; obstajajo v naši domišljiji in imamo dovoljšnjo predstavo o njih; ...nič nam ne preprečuje, da ne bi uporabljali teh imaginarnih števil, in jih uporabili v računih.*" In to je Euler v svojih raziskavah tudi storil. Kot vsi veliki pionirji je pokazal pot v neznano.

4.3.3 Eulerjeva rešitev reducirane kubične enačbe

Girolamo Cardano (1501-1576) je sredi 16. stoletja pokazal, da je splošno enačbo tretje stopnje $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ s substitucijo $z = x - \frac{a}{3}$ mogoče preoblikovati v reducirano kubično enačbo

$$x^3 = mx + n.$$

Namesto izpeljave originalne rešitve reducirane enačbe 3. stopnje Scipiona del Ferra, ki jo je objavil Cardano v knjigi *Ars Magna* leta 1545, si oglejmo Eulerjevo domiselno izpeljavo, ki jo je podal v knjigi *Elementi algebre* leta 1770. Vedel je že (iz Cardanovih formul), oziroma, če smo natančni, predpostavil je, da se da rešitev izraziti kot vsota dveh kubičnih korenov, zato je rešitev iskal v obliki:

$$x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}.$$

S kubiranjem te enakosti je dobil

$$
\begin{aligned}
x^3 &= p + 3\sqrt[3]{p^2 q} + 3\sqrt[3]{p q^2} + q \\
&= 3\sqrt[3]{pq}(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}) + (p+q) = (3\sqrt[3]{pq})x + (p+q)
\end{aligned}
$$

Dobljena enakost ima isto strukturo kot reducirana kubična enačba $x^3 = mx + n$, zato je vpeljal $3\sqrt[3]{pq} = m$ in $p + q = n$ in izrazil p in q z m in n, nato pa predstavil rešitev v obliki $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Izziv 1 *Bi znali po zgornjih smernicah sami dokončati ta izračun?*

Rešitev. Imamo že $p + q = n$, za določitev p in q rabimo še $p - q$. Tega pa dobimo iz $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = n^2 - 4pq$.

Kako pa bi dobili $4pq$? Česa še nismo uporabili? Iz $3\sqrt[3]{pq} = m$ dobimo $pq = \frac{m^3}{27}$, torej je $4pq = 4\frac{m^3}{27}$. Od tod dobimo s seštetjem izrazov za $p+q$ in $p-q$ najprej $2p = n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^3}{27}}$ in $2q = n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^3}{27}}$ in odtod

$$
x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}.
$$

Če na primer s to formulo rešimo enačbo $x^3 = 6x + 9$, kjer je $m = 6$ in $n = 9$, dobimo rešitev $x = 3$.

4.3.4 Krožno–delitvena enačba

Euler je leta 1751 raziskoval *korene enote*, t.j. rešitve *krožno–delitvene enačbe*[3]

$$
x^n - 1 = 0.
$$

[3]S to enačbo so se ukvarjali že drugi, tako npr. Edward Waring (1736–1798) v delu *Meditationes algebraicae* (Oxford 1770). Alexandre-Théophile Vandermonde(1735–1796)je uspel leta 1771 rešiti enačbo $x^{11} - 1 = 0$. Njegova metoda je imela pomanjkljivosti, zato Gauss, ki je leta 1801 v *Disquisitiones arithmeticae* dokončno rešil splošno krožno–delitveno enačbo z radikali (pokazal je, pri katerih n je to mogoče), Vandermonda ni omenil, čeprav je nanj (v zvezi s to enačbo) nedvomno vplival. Gauss je namreč menil, da je kakršnakoli matematična trditev kaj vredna samo, če je popolnoma dokazana. Lebesgue, ki je pisal o tem, pravi, da je to stališče "*profondement injuste*" (globoko nepravično). Po Lebesgeovem mnenju do nobenega odkritja v matematiki nikoli ni prišlo z deduktivno logiko. Odkritja vedno pridejo kot rezultat ustvarjalnega napora domišljije ("*un travail de creation de l'imagination*"), strogi dokaz pride kasneje. S krožno–delitveno enačbo se je ukvarjal tudi Lagrange.

Po rešitvah z uporabo kvadratnih korenov pri $n = 2, n = 3, n = 4$ je Eulerju uspelo najti take rešitve tudi pri $n = 5$:

$$1, \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4},$$
$$\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Z uporabo kompleksnih števil mu je uspelo pokazati čisto splošno: ”*Vsaka količina ima dva kvadratna korena, tri kubične korene, štiri četrte korene, in tako dalje.*” Za dokaz te trditve je potreboval De Moivreov izrek oz. formulo. Abraham De Moivre (1667-1754) je našel zgodnjo verzijo tega izreka. Šele Euler pa je spoznal njegovo pomembnost in ga uporabil na moderen način. Ta izrek je danes temelj kompleksne algebre.

4.3.5 Eulerjev dokaz De Moivreove formule

V svoji knjigi *Introductio in analysin infinitorum* (1748) je Euler obravnaval izraze oblike $\cos\varphi \pm i\sin\varphi$, ki nastopajo v faktorizaciji

$$1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Ti izrazi so ”zaprti za množenje”, kajti

$$(\cos\phi \pm \sin\phi)(\cos\varphi \pm \sin\varphi) =$$
$$(\cos\phi\cos\varphi - \sin\phi\sin\varphi) \pm i(\sin\phi\cos\varphi + \cos\phi\sin\varphi) =$$
$$\cos(\phi+\varphi) \pm i(sin(\phi+\varphi).$$

Pri $\phi = \varphi$ imamo

$$(\cos\phi \pm i\sin\phi)^2 = \cos(2\phi) \pm iq\sin(2\phi).$$

Od tod je bil le še korak (uporaba popolne indukcije) do De Moivreovega izreka za vse $n \geq 1$:

$$(\cos\phi \pm i\sin\phi)^n = \cos(n\varphi) \pm i\sin(n\varphi).$$

Ta rezultat je z velikim uspehom uporabil npr. pri iskanje korenov kompleksnih števil, pri razvoju vrst za $\cos x$ in $\sin x$, in pri odkritju identitete, ki povezuje eksponentno funkcijo ter funkciji kosinus in sinus.

4.3.6 Koreni kompleksnih števil

Euler je podal recept za najdenje korenov kompleksnih števil v dolgem članku iz 1749 z naslovom *Recherches sur les racines imaginaires des equations*.

Vzel je neničelno kompleksno število $z = a + ib$, in ga, kot bi rekli danes, zapisal v polarni obliki: vpeljal je $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ in poiskal tak kot ϕ med $-\pi/2$ in $\pi/2$, za katerega velja $\sin\phi = b/c$, od koder je dobil $\cos\phi = a/c$ in

$$z = a + bi = c(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Potem je pokazal, da ima z n različnih n-tih korenov, danih z

$$\sqrt[n]{c}(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n})$$

za $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. To je dokazal tako, da je potenciral te izraze na n-to potenco (pri tem je seveda uporabil uporabil De Moivreov izrek).

Nato je pripomnil, da je očitno, da ima $\sqrt[n]{a + bi}$ obliko $M + Ni$. Z drugimi besedami, koreni kompleksnih števil so kompleksna števila, ali povedano še drugače: kompleksna števila so zaprta za operacijo korenjenja. Te lastnosti nimajo ne naravna, ne racionalna, ne realna števila.

Zdaj, s formulo za računanje n–tih korenov kompleksnih števil v roki, je lahko razjasnil tudi problem rešitve neke enačbe tretje stopnje, dobljene s Cardanovo formulo:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}.$$

Izračunal je tretje korene iz $2 + 2i$ in $2 - 2i$ in vse tri rešitve vstavil v Cardanove formule, in (preko kompleksnih števil) dobil tri realne rešitve.[4]

[4]Ob tem se velja spomniti slavne, velikokrat citirane Hadamardove izjave: "*Najkrajša pot med dvema resnicama v realni domeni je preko kompleksne domene.*"

4.3.7 Izpeljava vrst za sinus in kosinus

V *Introductio* je Euler uporabil De Moivreov izrek (čeprav za današnje standarde nerigorozno) in izpeljal vrsti za sinus in kosinus. Najprej je zapisal

$$\cos n\phi = \frac{(\cos\phi + i\sin\phi)^n + (cos\phi - i\sin\phi)^n}{2}.$$

Desno stran je razvil po binomskem izreku, nato pa izvedel drzen (nerigorozen) skok v neskončnost: pisal je $x = n\varphi$, predpostavil, da je n neskončno velik, torej je $\varphi = x/n$ neskončno majhen, od koder je dobil $cos\varphi = 1, \sin\varphi = \varphi = x/n$ (danes bi to pisali s pomočjo limit, ki pa jih v njegovem času še niso poznali). Pri neskončno velikem n tudi nima smisla razlikovati med $n, n-1, n-2, \ldots$, zato je vse produkte takih števil pisal kar kot potenco števila n. Tako je dobil vrsto

$$\cos x = 1^n - \frac{n\cdot n(1)^{n-2}(x/n)^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot n\cdot n\cdot n(1)^{n-4}(x/n)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots =$$

$$1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

in tako "dokazal" razvoj $\cos x$ v vrsto. Podobno je dobil vrsto za sinus:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot}\cdots$$

4.3.8 Eulerjeva identiteta

Z uporabo De Moivreovega izreka je dokazal tudi slavno Eulerjevo identiteto.

Izrek 2 *Za vsak realen x je $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.*

Prvi dokaz. Pri izpeljavi te formule je privzel, da je n "*neskončno veliko število*" in $\phi = x/n$ neskončno majhno. Tedaj je $\cos\phi = 1$ in $\sin\phi = \phi = x/n$, in za $\cos x$ je dobil izraz

$$\cos n\phi = \frac{(\cos\phi + i\sin\phi)^n + (cos\phi - i\sin\phi)^n}{2} = \frac{(1+ix/n)^n + (1-ix/n)^n}{2}.$$

Vemo, da je Euler enačil e^ω in $1+\omega$ pri infinitezimalnih ω. Torej je lahko sklepal takole: če je a končno število in n neskončno velik, je $e^a = \left(e^{a/n}\right)^n = (1+\frac{a}{n})^n$. Tako je iz gornje enačbe dobil

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-x}}{2}$$

Podobno je izpeljal

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-x}}{2}.$$

S seštetjem teh enačb je dobil formulo, ki bo za vedno eno od njegovih največjih odkritij:

$$\cos x + i \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = e^{ix}.$$

Po svoji navadi je Euler podal še alternativne dokaze tako pomembnega izreka. Oglejmo si še dva taka dokaza njegove identitete $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Eden gre preko integralskega računa, eden preko neskončnih vrst.

Drugi dokaz. Vpeljal je $\sin x = y$, torej je $x = \sin^{-1} y = \int dy/\sqrt{1-y^2}$. Zdaj je v integral mirno (brez vsakršne utemeljitve, zakaj se to sme) vpeljal kompleksno spremenljivko s substitucijo $y = iz$, $dy = i\,dz$ in dobil

$$x = \int \frac{i\,dz}{\sqrt{1-(iz)^2}} = i \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = i\,ln(\sqrt{1+z^2+z}).$$

Ker je $z = y/i = \sin x/i$, je dobil $z^2 = \sin^2 x/i^2 = -sin^2 x$ in od tod $x = i\ln(\sqrt{1-\sin^2 x + \frac{\sin x}{i}} = i\ln(\cos x - i \sin x)$. Zato je

$$ix = i^2 ln(\cos x - i \sin x) = ln\frac{1}{(\cos x - i \sin x)} = ln(\cos x + i \sin x),$$

in zdaj je zlahka dokončal dokaz:

$$e^{ix} = e^{\ln(\cos x + i \sin x)} = \cos x + i \sin x.$$

Tretji dokaz. V tretjem dokazu iste trditve je izhajal iz znane vrste za eksponentno funkcijo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + ...$$

in vanjo vstavil ix namesto x ter upošteval že znani razvoj funkcij $\sin x$ in $\cos x$.

Če v Eulerjevo identiteto vstavimo $x = \pi$, dobimo

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Ko se je seznanil s temelji kompleksnih števil, je vse bolj prodiral v neznano ozemlje. Vprašal se je, na primer, ali bi se dalo definirati sinus in kosinus " *imaginarnega loka*". In razrešil je tudi problem logaritmov kompleksnih števil, o katerem se je pred njim veliko razpravljalo.

4.3.9 Sinus in kosinus kompleksnega števila.

Kaj bi lahko bil oziroma kaj naj bi pomenil ozraz $\cos(a + bi)$? Euler se je tega lotil po korakih. Najprej je določil $\cos(bi)$, tako da je v vrsto za $\cos x$ vstavil $x = bi$, in dobil za rezultat realno število

$$\cos(bi) = \frac{e^b + e^{-b}}{2}.$$

S to formulo je lahko rešil tudi "nerešljivo" enačbo, kot je $2 = \cos x$. Iz

$$2 = \cos x = \cos(bi) = \frac{e^b + e^{-b}}{2} = \frac{e^{2b} + 1}{2e^b}$$

je dobil kvadratno enačbo

$$(e^b)^2 - 4(e^{b)} + 1 = 0$$

z rešitvama $e^b = 2 \pm \sqrt{3}$, torej je $b = ln(2 \pm \sqrt{3})$. Tako ima enačba dve kompleksni rešitvi $x = bi = i\ln(2 \pm \sqrt{3})$.

Podobno je dobil

$$\sin(bi) = i\frac{e^b - e^{-b}}{2}.$$

S pomočjo formul za $\sin(\alpha+\beta)$ in $\cos(\alpha+\beta)$ je dobil izraze za $cos(a+bi)$ in $\sin(a + bi)$. Pokazal je, da je vsota kvadratov teh dveh izrazov enaka 1 (tako kot pri realnih številih).

4.3.10 Logaritmi kompleksnih števil

Že zgodaj v 18. stoletju sta se Johann Bernoulli in Gottfried Leibniz vsak na svoj način otila ožjega problema: določiti naravo logaritmov *negativnih* števil. Problem je rešil Euler v vrsti člankov v letih od 1747 do 1749.

Najprej je analiziral napake svojih predhodnikov. Ugotovil je, da mora biti $ln(-x) = ln(x) + ln(-1)$. Bernoulli je dokazoval, da je $ln(-1) = 0$, Leibniz pa je pokazal, da to ne more biti res. Določiti $ln(-1)$ je bila Eulerjeva naloga. Enostavno je logaritmiral $e^{i\pi} = -1$ in dobil $ln(-1) = ln(e^{i\pi}) = i\pi$. To je pomenilo, da je $ln(-x) = ln(x) + i\pi$.

Vprašal se je tudi, koliko (kompleksnih) logaritmov lahko ima neničelno število. Najprej je iz enačbe $x = e^y = (1 + \frac{y}{n})^n$ sklepal (ne pa tudi dokazal), da jih mora biti neskončno, nato pa je to tudi dokazal. Sklepal pa je takole: Kvadratna enačba $(1+y/2)^2 = x$ ima dve rešitvi, kubična enačba $(1+y/3)^3 = x$ ima tri rešitve, polinomska enačba $(1 + y/n)^n = x$ ima n rešitev, enačba, kjer je na desni neskončna vrsta (n pa neskončen), pa ima neskončno rešitev! Vzel je neničeln $a + bi$ in ga zapisal v polarni obliki, pisal $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ in izbral φ tako, da je $\sin\varphi = b/c$. Potem je trdil, da je za vsak $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\ln(a + bi) = \ln c + i(\varphi \pm 2\pi k).$$

4.3.11 Fermatova enačba $y^3 = x^2 + 2$

Euler je pokazal tudi, da ima Fermatova enačba $y^3 = x^2 + 2$ edino pozitivno celoštevilsko rešitev $y = 3, x = 2$, tako kot je to trdil Fermat. Njegov dokaz ni povsem strog, v njem se skliče na enoličnost razcepa števil v kolobarju $a + i\sqrt{2}$, ki pa je ne dokaže. Piše:

$$y^3 = (x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$$

in trdi, da morata biti oba faktorja na desni kuba. Tako trdi, da obstajata celi števili a in b, da je:

$$x + i\sqrt{2} = (a + ib\sqrt{2})^3.$$

Od tod izračuna:

$$x + i\sqrt{2} = a^3 - 6ab^2 + i(3a^2b - 2b^2)\sqrt{2}.$$

Z izenačenjem imaginarnih delov dobi

$$1 = 3ab^2 - 2b^2 = b(3a^2 - 2b^2).$$

To je možno le, če je $b = \pm 1$, $3a^2 - 2b^2 = \pm 1$, faktorja pa imata isti predznak. Možnost $b = -1$ vodi v protislovje: iz $-(3a^2 - 2b^2) = 1$ sledi $3a^2 - 2 = -1$ in $3a^2 = 1$. Torej je $b = 1$ in $a = \pm 1$. Tedaj pa je $x = a^3 - 6ab^2 = a^3 - 6a$. Če $a = +1$, je $x = 1 - 6 = -5$, če je $a = -1$, je $x = -1 + 6 = 5$. Torej je edina pozitivna rešitev $x = 5$, torej je $y^3 = 27$ in $y = 3$.

4.3.12 Eulerjevi nasledniki in kompleksna števila

Eulerjevo delo na področju kompleksnih števil so nadaljevali Gauss (1777–1855), Cauchy (1789-1857), Riemann (1826–1866) in Weierstrass (1815-1897). Intepretacija kompleksnih števil s točkami v kompleksni ravnini (Argand, Gauss) je omogočila še en lahek dokaz De Moivreove formule. Množenje kompleksnega števila z $e^{i\phi}$ je namreč isto kot vrtenje točke z okrog izhodišča za kot ϕ. Gauss je dokazal, da se da pravilni 17-kotnik konstruirati z ravnilom in šestilom, ko je pokazal, da se $\cos(2\pi/17)$ da dobiti s pomočjo operacij seštevanja, odštevanja, bisekcijo in kvadratnimi koreni. Teorija matrik (nastala okrog 1850) je omogočila, da lahko kompleksna števila predstavimo tudi z matrikami 2×2. De Moivreovo formulo se da tedaj dobiti tudi iz Cayley-Hamiltonovega izreka, brez "fizikalnega" razloga – sklicevanja na rotacije v kompleksni ravnini.

4.3.13 Uporabe Eulerjeve identitete

Omenimo samo dva primera uporabe Eulerjeve identitete

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

(1) Leta 1912 je Srinivasa Ramanujan (1887-1920) uporabil kompleksna števila in Eulerjevo formulo in rešil "*zanimiv*" problem, ki je bil objavljen prejšnje leto v *Journal of Indian Mathematical Society.* Sumiral je vrsto

$$P(x) = \Sigma_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos mx}{(m+1)(m+2)}$$

tako, da ji je prištel z i pomnoženo ustrezno vrsto za sinus

$$Q(x) = \Sigma_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin mx}{(m+1)(m+2)},$$

nato je na tej vsoti uporabil razcep na parcialne ulomke ter na vsakem od njih vrsto za $\ln(1+x)$, ki sicer velja za realne x, on pa jo je uporabil tudi na kompleksnih – enako kot je to počel Euler. Sledita dve strani računov. Nazadnje je odcepil realni del dobljenega rezultata in to je bil $P(x)$.

(2) Carl Siegel (1896-1981) je 1936 pokazal, da je a^b transcendentno število, če a ni 0 ali 1, je pa algebraično število, b pa racionalno število. Pomemben poseben primer je $a = i$ in $b = -2i$. Torej je i^{-2i} transcendentno število. Od tod sledi, da je transcendentno tudi število e^{π}, saj je po Eulerjevi formuli

$$i^{-2i} = e^{(i\pi/2)(-2i)} = e^{\pi}.$$

Številne uporabe Eulerjeve identitete in Eulerjeve formule lahko zainteresirani bralec najde tudi v knjigi [3] (Paul J. Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula cures many mathematical ills*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006). Kompleksna analiza (ki je brez njenega čvrstega temelja – stroge definicije kompleksnih števil kot urejenih parov realnih števil – seveda ne bi bilo) je danes eno najbolj raziskovanih področij matematike. Zainteresirani bralec, ki ga to področje zanima, lahko poseže npr. po naslednji knjigi s tega področja: [4] (Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 1998).

4.4 Še nekaj primerov Eulerjevih prispevkov

Po Eulerju se v matematiki imenuje cela vrsta izrekov, formul, pojmov itd. Tako je npr. v teoriji poliedrov slavna njegova formula $v - e + f = 2$, ki opisuje zvezo med številom oglišč, robov in lic (konveksnega) poliedra. V teoriji diferencialnih enačb je znan npr. *Eulerjev poligon*. Euler je s svojo rešitvijo znanega problema Königsberških mostov tudi eden začetnikov *teorije grafov*. V geometriji je znana *Eulerjeva premica*, na kateri leže tri znamenite točke trikotnika (kar je dokazal kar z analitično metodo!).

5 Študije primerov

5.1 Kako študirati Eulerjevo delo?

V tem poglavju je predstavljen majhen, a reprezentativen vzorec Eulerjevih prispevkov k posameznim področjem matematike. Primeri so vzeti iz teorije števil in algebre, in lahko služijo tudi kot zgled, kako lahko študiranje izbranih odlomkov iz Eulerjevih del (pa tudi iz del drugih matematikov) uporabimo (vsaj kot motivacijo) bodisi pri pouku matematike bodisi kot izhodišče za zastavljanje nadaljnjih raziskovalnih vprašanj. Prav na ta način je zgodovina matematike lahko najbolj koristna sami matematiki, in to je tudi eden od glavnih razlogov, zakaj se je vredno in smiselno bolj poglobljeno ukvarjati z njo.

Poglejmo si najprej tri Eulerjeve prispevke (o popolnih številih, praštevilih in particijah) k teoriji števil, ki jo je s svojimi izvirnimi tehnikami, fascinantnimi izračuni in elegantno dobljenimi rezultati prav on naredil za pomembno vejo matematike ter utrl pot za njen nadaljnji razvoj.

5.2 Popolna števila

Evklid je v VII. knjigi svojih *Elementov* definiral *popolna števila.*

Definicija 1 *Popolno število je takšno število (večje od 1) ki je enako vsoti svojih pravih deliteljev.*

Stari Grki so poznali le 4 taka števila:

$$6 = 1 + 2 + 3 = 2^1(2^2 - 1),$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 2^2(2^3 - 1),$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 2^4(2^5 - 1),$$

$$\begin{aligned} 8128 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064 \\ &= 2^6(2^7 - 1). \end{aligned}$$

Vsa ta števila so soda, lihi faktor pa je praštevilo oblike $2^k - 1$. Evklid je opazil skupni vzorec, po katerem so zgrajena ta števila, in dokazal naslednji izrek:

Izrek 3 *Če je $2^k - 1$ praštevilo in je $N = 2^{k-1}$, potem je N popolno število.*

Dokaz. Naj bo $p = 2^k - 1$ praštevilo. Zaradi enolične faktorizacije so pravi delitelji števila $N = 2^{k-1}(2^k - 1) = 2^{k-1}p$ deljivi le s prašteviloma 2 in p. Vsota teh deliteljev je enaka

$$(1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-1}) + (p + 2p + 4p + ... + 2^{k-2}p) =$$
$$(1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-1}) + p(1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-2}) =$$
$$(2^k - 1) + p(2^{k-1} - 1) = p + p2^{k-1} - p = p2^{k-1} = N,$$

torej je N res popolno število.

Niso vsa števila oblike $2^k - 1$, kjer je k praštevilo, praštevila. Najmanjši protiprimer je $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Praštevila oblike $2^k - 1$ se imenujejo *Mersennova praštevila* po njihovem popularizatorju Marinu Mersennu (1588–1648). Leta 1772 je Euler pisal Danielu Bernoulliju, da je dokazal, da je $2^{31} - 1$ praštevilo. To je osmo največje Mersennovo praštevilo. René Descartes (1596-1650) je v pismu Mersennu 15. novembra 1638 trdil, da je vsako sodo popolno število oblike $2^{k-1}(2^k - 1)$, kjer je $2^k - 1$ praštevilo. Descartesovo domnevo je dokazal šele Euler. Vpeljal je naslednjo definicijo.

Definicija 2 *$\sigma(n)$ je vsota vseh deliteljev števila n.*

Med delitelje n seveda sodi tudi število n. S pomočjo te funkcije je preprosto karakteriziral praštevila in popolna števila, in našel še nekatere lastnosti te funkcije (danes imenovane *Eulerjeva funkcija*).

Izrek 4 *1. p je praštevilo če in samo če je $\sigma(p) = p + 1$.*
2. N je popolno število če in samo če je $\sigma(N) = N + N = 2N$.
3. Če je p praštevilo, potem je $\sigma(p^r) = \frac{p^{r+1}-1}{p-1}$.
4. Če sta p in q različni praštevili, potem je $\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q)$.
5. Če sta si a in b tuji števili, potem je $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Zdaj je lahko dokazal naslednji izrek.

Izrek 5 *Če je N sodo popolno število, potem je $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$, kjer je $2^k - 1$ praštevilo.*

Dokaz. Naj bo N sodo in popolno število. Potem je oblike $N = 2^{k-1}b$, kjer je b lih in $k \geq 1$. Ker je N popolno, je $\sigma(N) = 2N = 2(2^{k-1}b) = 2^k b$. Ker sta 2^{k-1} in b tuji si števili, je $\sigma(N) = \sigma(2^{k-1}b) = \sigma(2^k - 1)\sigma(b) = 2^{k-1}\sigma(b)$. Od tod dobimo

$$\frac{2^k}{2^k - 1} = \frac{\sigma(b)}{b}.$$

Leva stran je okrajšani ulomek. Torej je za nek $c \geq 1$:

$$\sigma(b) = c2^k$$

in $b = c(2^k - 1)$.

Denimo, da je $c > 1$. V tem primeru se da pokazati, da so vsa števila $1, b, c$ in $2k - 1$ različna (tako da pokažemo, da so paroma različna). Tedaj pa je $\sigma(b) \geq 1+b+c+(2^k-1) = b+c+2^k = c(2^k-1)+c+2^k = 2^k(c+1) > c2^k = \sigma(b)$.

Torej mora biti $c = 1$. Tedaj je $b = c(2^k - 1) = 2^k - 1$ in $\sigma(b) = c2^k = 2^k = (2^k-1)+1 = b+1$, torej je b praštevilo. Q.E.D.

J. J. Sylvester (1814–1897) je leta 1888 uspel dokazati;

Izrek 6 *Liho popolno število ima vsaj tri različne praštevilske faktorje.*

Dokaz. Denimo najprej, da ima liho popolno število en sam praštevilski delitelj, torej je oblike $N = p^r$, kjer je p liho praštevilo in $r \geq 1$. Potem je $2N = \sigma(N)$, torej je $2p^r = \sigma(p^r) = \frac{p^{r+1}-1}{p-1}$. Torej je $2p^r - p^{r+1} = 1$, kar ni mogoče, saj p deli levo stran, desne pa ne.

Kaj pa če ima N dva praštevilska delitelja? Denimo, da je $N = p^k q^r$ liho popolno število in $p < q$ sta lihi praštevili. Tedaj je

$$2N = \sigma(N) = \sigma(p^k q^r) = \sigma(p^k)\sigma(q^r).$$
$$2N = (1 + p + p^2 + \cdots + p^k) \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^r).$$

Delimo obe strani z $N = p^k q^r$ in dobimo:

$$2 = (1 + 1/p + 1/p^2 + \cdots + 1/p^k) \times (1 + 1/q + 1/q^2 + \cdots + 1/q^r)$$
$$\leq (1 + 1/3 + 1/3^2 + \cdots + 1/3^k) \times (1 + 1/5 + 1/5^2 + \cdots + 1/5^r)$$
$$\leq \sum_{i=0^\infty} \frac{1}{3^i} \times \sum_{i=0^\infty} \frac{1}{5^i} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2,$$

kar je protislovje. Torej ima liho popolno število vsaj tri različne praštevilske faktorje. Q.E.D.

5.3 Praštevila

Praštevila, njihove značilnosti, struktura in porazdelitev so med najbolj raziskovanimi področji v matematiki. Obstajata dva razreda praštevil (in praštevila teh dveh razredov se precej razlikujejo v svojih lastnostih):

praštevila oblike $4k + 1 : 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, ...$

praštevila oblike $4k - 1 : 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, ...$

Že Evklid je dokazal, da je praštevil neskončno mnogo (znani dokaz s protislovjem). Torej (to je "nekonstruktivni" argument) je *vsaj eden* od obeh razredov neskončen (v resnici sta neskončna oba).

Lažje, po analogiji z Evklidovim dokazom, se da dokazati:

Izrek 7 *Obstaja neskončno mnogo praštevil oblike* $4k - 1$.

Dokaz. Najprej pokažemo, da je produkt dveh števil oblike $4k + 1$ spet število take oblike:

$$(4r + 1)(4s + 1) = 16rs + 4r + 4s + 1 = 4(4rs + r + s) + 1.$$

Zdaj denimo, da imamo neko končno množico praštevil oblike $4k - 1$, in sicer $p_1 = 4k_1 - 1, p_2 = 4k_2 - 1, ..., p_n = 4k_n - 1$. Definirajmo število

$$M = 4(p_1 \times p_2 \times ... \times p_n) - 1.$$

Če je M praštevilo, potem je M novo praštevilo te oblike. V nasprotnem primeru pa je M deljiv z vsaj enim praštevilom oblike $4k-1$. Vendar to število ne more biti enako nobenemu od praštevil p_i, saj bi potem delilo levo stran enačbe $4(p_1 \times p_2 \times ... \times p_{n)} - M = 1$, desne pa ne! Q.E.D

Fermat je prvi postavil naslednjo domnevo, Euler pa jo je prvi dokazal:

Izrek 8 *Praštevilo oblike* $4k + 1$ *lahko vselej zapišemo kot vsoto dveh kvadratov na en in en sam način, medtem ko nobenega praštevila oblike* $4k - 1$ *ne moremo zapisati v obliki vsote dveh kvadratov.*

Primer. $37 = 1 + 6^2, 137 = 4^2 + 11^2, 281 = 5^2 + 16^2$.

Vse to še vedno ostaja v domeni "klasične" teorije števil. Euler pa je odkril, da lahko pri raziskovanju naravnih števil s pridom uporabimo tudi analitične tehnike in orodja (npr. neskončne vrste, celo divergentne)!

Mejnik je predstavljal Eulerjev članek iz leta 1737, *Variae observationi circa series infinitas*, v katerem je Euler med drugim "dokazal" naslednjo relacijo (ki povezuje neskončno vrsto in neskončni produkt):[5]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdots}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdots}.$$

"Dokazal"jo je takole: Naj bo

$$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x=x-\frac{1}{2}x&=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\right]\\&=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots.\end{aligned}$$

Tu je zdaj pripomnil, da "noben imenovalec ni sodo število". Vrsto za x je delil s 3 in dobil vrsto za $\frac{1}{3}x$, ki jo je odštel od $\frac{1}{2}x$ ter dobil vrsto

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}x=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots,$$

"kjer imenovalci niso deljivi ne z 2 ne s 3."V naslednjem koraku je dobil

$$\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}x-\frac{1}{5}\left[\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}x\right]=\frac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 5}x=1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots.$$

Na vsakem koraku je odstranil novo praštevilo in njegove večkratnike iz fonda imenovalcev. Tako je vselej dobil vrsto, ki se je začela z $1+1/p$, kjer je bilo p najmanjše še neodstranjeno praštevilo. Euler je zaključil, da bi neskončno mnogo teh deljenj in odštevanj vodilo v enačbo:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdots}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdots}x=1.$$

in končno navzkrižno množenje bi dalo želeni rezultat.[6]

---

[5] Razmislite in natančno formulirajte (s pomočjo limite), kaj naj bi "enačaj" v tem primeru sploh pomenil.

[6] Dokaz je problematičen, ker na samem začetku uporabi harmonično vrsto, ki je divergentna. Razmislite, ali bi se ga dalo zapisati v strogi obliki brez uporabe divergentnih vrst!

Drug argument, ki privede do iste relacije, je:

$$
\begin{gathered}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots= \\
\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right]\times\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right]\times \\
\times\left[1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right]= \\
\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{11}}\times\cdots= \\
\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdots}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdots}.
\end{gathered}
$$

V moderni notaciji bi to zapisali

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\Pi_p\frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

Od tod sledi Eulerjev dokaz, da je praštevil neskončno: ker vrsta $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergira, divergira tudi $\Pi_p\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$, kar je možno le, če je praštevil neskončno.

Euler je s pomočjo neskončnih vrst dokazal tudi, da je vsota recipročnih vrednosti vseh praštevil neskončna, in sicer takole. Naj bo

$$M=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdots}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdots}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{10}{11}\times\cdots}.$$

Potem je izračunal $\ln M$ in vsakega od členov $-\ln(1-1/p)$ razvil po formuli

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots.$$

Tako je dobil neskončno mnogo neskončnih vrst, jih sumiral po stolpcih ter dobil

$$\ln M=A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\frac{1}{5}E+\cdots,$$

kjer so $A, B, C, ...$ vsote recipročnih vrednosti vseh praštevil, vseh njihovih kvadratov, vseh njihovih kubov, itd. Nato je pokazal, da je vsota $\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\frac{1}{5}E+\cdots$ končna, od koder je sledilo, da je $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots=A=\infty$, torej vsota recipročnih vrednosti vseh praštevil divergira.

5.4 Particije

Definicija 3 *Particija je razdelitev naravnega števila na vsoto naravnih števil.*

Primer. 6 ima 11 particij: $6, 5+1, 4+2, 4+1+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1$.

Euler je obravnaval tudi particije na različne sumande:

$$6, 5+1, 4+2, 3+2+1$$

in particije na same lihe sumande (lahko tudi enake):

$$5+1, 3+3, 3+1+1+1, 1+1+1+1+1+1.$$

Philippe Naudé je Eulerja leta 1740 vprašal, če kaj ve o številu načinov, na katere lahko število razdelimo na sama različna števila. Euler je rezultat poslal v nekaj tednih. Oglejmo si le, kako je pokazal:

Izrek 9 *Particij naravnega števila na različne sumande je enako mnogo kot particij na lihe sumande.*

Našel je naslednjo zvezo med preštevanjem particij in množenjem algebraičnih binomov: če razvijemo produkt $Q = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots$, dobimo vrsto

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + \cdots,$$

v kateri vsak koeficient pomeni število različnih načinov, na katere je mogoče eksponent izraziti kot vsoto različnih števil. Vpeljal je tudi

$$R = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots},$$

recipročno vrednost neskončnega produkta. Z uporabo sumacijske formule za geometrijsko vrsto $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots$ je dobil

$$R = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots).$$

Vse eksponente je zapisal kot vsote lihih števil in dobil

$$R = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + \cdots,$$

kjer so koeficienti pri potencah izražali število načinov, na katere se da ustrezni eksponent zapisati kot vsoto lihih števil. Zdaj je moral dokazati še $R = Q$. Vpeljal je $P = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)\cdots$, in z množenjem (po principu zadrge) dobil

$$\begin{aligned} PQ &= (1-x)(1+x)(1-x^2)(1+x^2)(1-x^3)(1+x^3)\cdots \\ &= (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdots, \end{aligned}$$

pripomnil, da "so vsi faktorji PQ vsebovani v P", in zaključil, da je

$$\frac{1}{Q} = \frac{P}{PQ} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots$$

torej je

$$Q = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots} = R.$$

Če shematsko analiziramo dokaz, vidimo, da je Euler storil naslednje:

a) vpeljal je tri neskončne produkte P, Q, R in pokazal z njihovo algebrajsko manipulacijo, da je $Q = R$.

b) Koeficiente pri razvoju produktov P in Q v vrsto je povezal z določenima tipoma particij (na različna števila, in na liha števila).

c) Ker sta ustrezni vrsti enaki, se števila teh particij ujemajo.

In kako je Eulerju prišlo na misel, vpeljati analitične tehnike v teorijo števil? Euler se je ukvarjal s problemom reprezentacije naravnih števil kot vsote štirih kvadratov. V pismu Goldbachu je zapisal, da bi bil najbolj naraven način, da se dokaže ta izrek ta, da se pokaže, da so vsi koeficienti vrste

$$(1 + x + x^4 + x^9 + \ldots)^4 = \Sigma k_n x^n$$

pozitivni. Koeficient k_n pri potenci x^n namreč pove, na koliko načinov se da zapisati n kot vsota štirih kvadratov. Ta Euler zapis je začetek uporabe analitičnih metod pri problemu predstavljanja števil kot vsot kvadratov in dejansko v teoriji števil kot celoti.

To Eulerjevo idejo je realiziral Jacobi, ki pa je za izhodišče svojega dokaza izreka, da je vsako naravno število vsota štirih kvadratov, vzel funkcijo

$$\vartheta(x) = 1 + 2x^4 + 2x^9 + ...$$

5.5 Ničle polinomov

Tudi v algebri je Eulerjevo delo pomenilo velik korak naprej in pomagalo matematikom, ki so prišli za njim, da so videli še dlje. Pomembno je prispeval k dvema temeljnima sklopoma problemov iz algebre, ki sta mučila že njegove predhodnike, oba pa se nanašata na polinome oziroma polinomske enačbe. Prvi sklop problemov se nanaša na eksistenco in število ter naravo ničel polinomov n–te stopnje (z realnimi koeficienti) oziroma na njihovo faktorizacijo v ireducibilne faktorje (po zgledu enolične faktorizacije naravnih števil v obliki produkta potenc različnih praštevil). Drugi sklop problemov se nanaša na iskanje formul za rešitve take enačbe.

Problem 1 *Koliko ničel danega polinoma z realnimi koeficienti je realnih?*

Descartesovo "pravilo predznakov" je podalo neke ocene v zvezi s številom pozitivnih in negativnih ničel.

Problem 2 *Ali so rešitve polinomske enačbe* $p(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$*, kjer so vsi koeficienti* a_i *realna ali kompleksna števila, vselej samo realna ali kompleksna števila (in nobena druga)?*

To se zdi logično, vendar ni samo po sebi umevno; načeloma bi namreč lahko bila med ničlami polinoma še kakšna druga, nam še povsem neznana števila, kot je opozoril Gauss v svoji doktorski disertaciji, ko je najprej pokazal na napake v dokazih osnovnega izreka algebre svojih predhodnikov.[7]

Ze Eulerjevi predhodniki so domnevali, da velja t.i. *osnovni izrek algebre*:

Izrek 10 *Vsak polinom z realnimi koeficienti se da razstaviti na produkt linearnih in kvadratnih polinomov z realnimi koeficienti (in to v bistvu na en sam način, do multiplikativne konstante in do vrstnega reda faktorjev natančno).*

Ta izrek se v moderni formulaciji, ko nimamo več zadrege s kompleksnimi števili, glasi takole:

[7]Res, če bi dopuščali koeficiente iz obsega kvaternionov, bi imel npr. polinom z razcepom $p(x) \equiv (x-(1+i+j+k))(x-(1-3i+2j+4k)$ za ničli kvaterniona $x_1 = 1+i+j+k$ in $x_2 = 1-3i+2j+4k$.

Izrek 11 *Vsaka polinomska enačba n-te stopnje z realnimi koeficienti*

$$p(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

ima vselej vsaj eno (in posledično n) rešitev v obsegu kompleksnih števil.

Na primer, če se spomnimo Eulerjeve rešitve krožno–delitvene enačbe s pomočjo kompleksnih števil, vemo, da velja razcep

$$x^n - 1 = (x - \omega_0)(x - \omega_1) \cdots (x - \omega_{n-1}),$$

kjer so $\omega_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ koreni enote.

Euler je poskušal dokazati osnovni izrek algebre, in je celo verjel, da mu je uspelo. Vendar pa je bil njegov dokaz, kot bomo videli, (tako kot dokazi nekaterih drugih matematikov) pomanjkljiv, na kar je opozoril Gauss, ki je v svojem življenju podal kar štiri dokaze tega izreka.

Danes vemo, da je multiplikativna struktura oziroma faktorizacija polinomov močno odvisna od kolobarja (ali obsega), iz katerega so koeficienti polinoma. Ni npr. vseeno, ali je kolobar *cel* (t.j. brez deliteljev niča) ali ne.

5.5.1 Iskanje formul za reševanje polinomskih enačb

Formule za kvadratno enačbo so bile znane že v antiki. Formule za reducirano kubično enačbo, objavljene v Cardanovi knjigi *Ars Magna* iz leta 1545, je našel Scipione del Ferro leta 1515, ponovno pa odkril Tartaglia v noči med 12. in 13. februarjem 1535. Pomemben cilj algebraikov v 16. stoletju v Italiji, pa tudi še v Eulerjevem času, je bil rešiti naslednji problem:

Problem 3 *Po zgledu formul za kvadratno enačbo in Cardanovih formul za enačbe 3. stopnje, najti podobne formule za rešitve enačbe 4. 5. in višjih stopenj, v katerih bi poleg osnovnih štirih aritmetičnih operacij uporabljali še operacije korenjenja $a \longrightarrow \sqrt[m]{a}$.*

Ferrariju je (nekje okrog leta 1540) uspela redukcija enačbe 4. stopnje na enačbo 3. stopnje, katere rešitve se je dalo torej prav tako izraziti s pomočjo kvadratnih in kubičnih korenov.

Euler je našel novo metodo za reševanje enačb 4. stopnje, ni pa mu uspelo najti splošnih formul za rešitve enačb višjih stopenj od četrte.

Kasnejši razvoj algebre je pokazal, da ta cilj za enačbe pete stopnje in vseh nadaljnjih v splošnem ni uresničljiv (iz razlogov, ki sodijo v teorijo grup in obsegov, in sta jih neodvisno drug od drugega našla Abel in Galois).

5.5.2 Ferrarijeva metoda reševanja enačb 4. stopnje

Omenili smo že, da je enačbe 4. stopnje reduciral na enačbe 3. stopnje Lodovico Ferrari. Ta je leta 1536, ko je bil star 14 let, prišel h Cardanu kot služabnik. Naučil se je matematiko in se razvil v izvrstnega matematika, Cardanovega prijatelja in tajnika.

Ferrarijeva metoda je bila predstavljena v 39. poglavju Cardanove knjige *Ars Magna* (1545), in Cardano je pošteno navedel Ferrarija kot njenega izumitelja. Predstavljena je bila povsem v verbalni obliki; to je bil pri tako zapletenem postopku precej zahteven podvig. Matematiki naslednjega, 17. stoletja (npr. Descartes in Newton), so že imeli prednost algebraičnega simbolizma pri reševanju enačb 4. stopnje. Tudi mi si oglejmo Cardanovo razlago Ferrarijeve metode z uporabo modernega algebraičnega simbolizma, ki precej pomaga pri razumevanju.[8]

Ferrari je, s pomočjo geometrijskega sklepanja ob skici kvadrata, razdeljenega na manjše kvadrate in pravokotnike, najprej izpeljal identiteto, ki bi jo danes zapisali kot

$$(s + a + b)^2 = (s + a)^2 + 2sb + 2ab + b^2.$$

Pri uporabi te identitete za rešitev bikvadratne enačbe je predpostavil, da je $s = x^2$, torej kvadrat neznanke x. Tako je dobil enačbo

$$(x^2 + a + b)^2 = (x^2 + a)^2 + 2x^2 b + 2ab + b^2. \tag{1}$$

V bikvadratni enačbi se lahko vselej znebimo kubičnega člena, tako da ostanejo le členi z x^4, x^2, x in svobodni člen.

[8]Podroben opis Cardanove razlage Ferrarijeve metode je v knjigi Waerden, *A History of Algebra*, str. 57–59.

Kot primer Cardano obravnava enačbo

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Da bi levo stran enačbe dopolnil do popolnega kvadrata $(x+a)^2$, Cardano na obeh straneh prišteje $6x^2$:

$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x. \tag{2}$$

Nato pravi: "*Če bi izraz $6x^2 + 60x$ imel kvadratni koren, bi imeli rešitev. Vendar ga nima. Torej moramo dodati na obeh straneh dovolj kvadratov in število, tako da bo na eni strani trinom s korenom in na drugi strani prav tako.*" To pomeni: Ker $6x^2+60x$ ni popolni kvadrat, moramo na obeh straneh dodati $2bx^2$ in konstanto, da dobimo na obeh straneh popolna kvadrata.

Cardano vstavi $a = 6$ v enačbo (1) in dobi identiteto

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (x^2 + a)^2 + 2bx^2 + 2ab + b^2.$$

Če torej na obeh straneh enačbe (2) dodamo $2bx^2 + 12b + b^2$, dobimo

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (6x^2 + 60x) + (2bx^2 + 12b + b^2) \tag{3}$$
$$= (2b + 6)x^2 + 60x + (b^2 + 12b) \tag{4}$$
$$= (px + b)^2 = p^2x^2 + 2pqx + q^2. \tag{5}$$

Zdaj b izberemo tako, da bo desna stran (4) popoln kvadrat binoma $px + q$. Pogoj za to je:

$$(2b + 6)(b^2 + 12b) = 30^2$$

oziroma

$$2b^2 + 30b^2 + 72b = 900$$

oziroma

$$b^3 + 15b^2 + 36b = 450.$$

To je kubična enačba za b, ki jo je mogoče rešiti po metodi, razloženi v nekem prejšnjem poglavju Cardanove knjige. Tako dobi rezultat

$$b = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}} - 5$$

Zdaj je desna stran enačbe (4) popoln kvadrat, in lahko na obeh straneh uporabimo kvadratni koren ter tako dobimo kvadratno enačbo za x (ki jo znamo rešiti).[9]

5.5.3 Eulerjeva metoda reševanja enačb 4. stopnje

Ko je na sceno prišel Euler, so bila Ferrarijeva odkritja že 200 let stara. Toda, kot je to pokazal večkrat med svojo dolgo kariero, je vselej mogoče iskati nove poti do znanih ciljev. V svoji knjigi *Elementi algebre* je opisal metodo za reševanje enačb 4. stopnje, "*povsem drugačno*" od tega, kar so poznali prej. Recimo, pravi, da želimo rešiti splošno enačbo četrte stopnje

$$Ay^4 + By^3 + Cy^y + Dy + E = 0.$$

"*Začeti moramo*", pravi Euler, "*s tem, da uničimo drugi člen.*" To pomeni, da se moramo znebiti kubičnega člena. To storimo tako, da delimo z A, vpeljemo substitucijo $y = x - B/4$, uredimo in poenostavimo. Dobimo "*reducirano kubično enačbo*":

$$x^4 - ax^2 - bx - c = 0.$$

Euler zdaj predpostavi, da je rešitev te reducirane kubične enačbe oblike

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

kjer je neznanke p, q, r treba izraziti z a, b, c. S kvadriranjem te enačbe dobi

$$x^2 - (p + q + r) = 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}).$$

S ponovnim kvadriranjem dobi

$$\begin{aligned} x^4 - 2(p + q + r)x^2 + (p + q + r)^2 \\ = 4(pq + pr + qr) + 8(\sqrt{p^2qr} + \sqrt{pq^2r} + \sqrt{pqr^2} \\ = 4(pq + pr + qr) + 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ = 4(pq + pr + qr) + 8\sqrt{pqr}x. \end{aligned}$$

Zdaj Euler vpelje pomožne spremenljivke:

[9]Vidav v *Algebri* (str. 191) pove, da splošno enačbo 4. stopnje $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$ po Ferrarijevi metodi rešujemo tako, da poskušamo razstaviti levo stran v produkt dveh kvadratnih faktorjev. V rešitvah ustreznih kvadratnih enačb za x nastopa y, ki ga dobimo iz enačbe 3. stopnje (t.i. *kubične resolvente enačbe*).

$$f = p + q + r, \quad g = pq + pr + qr, \quad \text{in} \quad h = pqr.$$

V teh spremenljivkah prejšnjo enačbo prepiše takole:

$$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h}x - (4g - f^2) = 0.$$

Če to primerjamo z reducirano kubično enačbo

$$x^4 - ax^2 - bx - c = 0,$$

vidimo, da je: $2f = a$, torej je $f = a/2$ in $8\sqrt{h} = b$, torej je $h = b^2/64$ in $4g - f^2 = c$ in $g = (4c + a^2)/16$.

Zdaj pa je hotel Euler izraziti f, g, h s pomočjo p, q, r. Ključ do tega je bil v enačbah

$$f = p + q + r,$$

$$g = pq + pr + qr,$$

$$h = pqr.$$

Euler je opazil, da so p, q, r rešitve enačbe: $0 = (z - p)(z - q)(z - r) = z^3 - (p + q + r)z^2 + (pq + pr + qr)z - pqr = z^3 - fz^2 + gz - h$.

In tu je končno ključ do uganke. Iz znanih vrednosti a, b, c dobimo f, g, h. Iz teh konstruiramo $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, rešitve katere so, dobljene po Cardanovih formulah, $z = p, z = q$ in $z = r$. Končno dobimo rešitev reducirane kvadratne enačbe $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, in rešitev prvotne kvadratne enačbe dobimo z $y = x - b/4A$.

Euler za ilustracijo svoje metode reši enačbo

$$y^4 - 8y^3 + 14y^2 + 4y - 8 = 0.$$

S substitucijo $y = x - B/4A = x - \frac{-8}{4} = x + 2$ dobi:

$$x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0.$$

Zdaj izračuna $f = a/2 = 10/2 = 5, g = \frac{4c+a^2}{16} = \frac{4(-8)+100}{16} = \frac{17}{4}, h = \frac{b^2}{64} = \frac{4^2}{16} = \frac{1}{4}$. Števila p, q, r so rešitve pomožne kubične enačbe

$$z^3 - 5z^2 + \frac{17}{4} - \frac{1}{4}.$$

Euler vpelje $z = u/2$:

$$u^3 - 10u^2 + 17u - 2 = 0.$$

To bi lahko rešil s Cardanovimi formulami. A Euler opazi, da je ena rešitev $u = 2$. Dobi razcep: $0 = u^3 - 10u^2 + 17u - 2 = (u-2)(u^2 - 8u + 1.)$ Dobi rešitve $u = 2, u = \frac{4+\sqrt{15}}{2}, u = \frac{4-\sqrt{15}}{2}$. Ker je $z = u/2$, dobi: $p = \pm 1, q = \pm\frac{1}{8}\sqrt{8+2\sqrt{15}}, r = \pm\frac{1}{8}\sqrt{8-2\sqrt{15}}$. To poenostavi v: $p = \pm 1, q = \pm\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}, r = \pm\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$. Upošteva: $b/8 = \sqrt{pqr} = \sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r}$. Ker je $b = 4 > 0$, mora biti produkt korenov pozitiven. Tako dobi rešitve:

$$x_1 = +\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = +\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \sqrt{5}$$
$$x_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \sqrt{3}$$
$$x_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \sqrt{3}$$

Reševanje enačbe 4. stopnje je bilo torej mogoče prevesti na reševanje enačbe 3. stopnje, tako kot je bilo reševanje enačbe 3. stopnje mogoče prevesti na rešitev kvadratne enačbe.

Tako se je zdelo verjetno, da bi bilo mogoče podoben postopek uporabiti tudi za splošno enačbo 5. stopnje: najprej bi se znebili bikvadratnega člena in vpeljali pomožno spremenljivko, ki bi ustrezala neki enačbi 4. stopnje, rešili to enačbo po že znanih metodah, nato pa njene rešitve prevedli v rešitve enačbe 5. stopnje.

Euler pa je svojo obravnavo enačbe 4. stopnje zaključil z naslednjimi besedami: “*To je največ, do koder smo prišli v reševanju algebraičnih enačb. Vsi napori, da bi rešili enačbe 5. stopnje, in tistih višjih stopenj, na isti način, ali vsaj, da bi jih prevedli na manjše stopnje, so bili neuspešni; tako da ne moremo dati nobenih splošnih pravil za najdenje korenov enačb, višjih od 4. stopnje.*”

5.5.4 Faktorizacija polinomov in osnovni izrek algebre

V 18. stoletju so, kot smo že omenili, osnovni izrek algebre izražali (oziroma poskušali dokazati) v obliki, da se da vsak polinom z realnimi koeficienti razstaviti na same linearne in kvadratne faktorje z realnimi koeficienti. Leta 1746 je Jean d'Alembert, ki je entuziastično zagovarjal domnevo, da osnovni izrek algebre velja, predložil dokaz (ki pa ni bil pravilen). Za D'Alemberta je bil izrek pomemben tudi zato, ker bi iz njega sledilo, da obstaja nedoločeni integral vsake racionalne funkcije (delimo polinom v števcu s polinomom v imenovalcu, da dobimo v števcu polinom nižje stopnje, nato imenovalec razcepimo na linearne in kvadratne faktorje, naposled pa racionalno funkcijo razcepimo na parcialne ulomke, katerih nedoločeni integrali se dajo zlahka izračunati). Dokaza osnovnega izreka algebre (O.I.A.) se je lotil tudi Euler. Čeprav mu ni uspelo, je naredil pomembne korake v tej smeri.

Obstajali so tudi skeptiki, npr. Leibniz, ki niso verjeli, da je to vedno mogoče storiti. Nicolaus Bernoulli (1687–1759) je celo trdil, da je našel protiprimer – polinom $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$, ki ga ni mogoče tako razstaviti. Euler pa je pokazal, da se Bernoulli moti. Leta 1742 je v pismu Christianu Goldbachu (v katerem je sredi stavkov menjaval latinščino in nemščino) razstavil gornji polinom v produkt dveh kvadratnih členov

$$x^2 - (2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}})x + (1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7}$$

in

$$x^2 - (2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}})x + (1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7}$$

Da se preveriti, da je imel Euler prav. A kako je prišel do tega razcepa? Ne z ugibanjem. Polinome 4. stopnje je znal razstaviti čisto splošno.

5.5.5 Eulerjeva razcepitev realnih polinomov 4. stopnje

Euler je verjel v domnevo, da je O.I.A. resničen. Leta 1742 je pisal Goldbachu: *"Vsi algebraični izrazi $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4$ se dajo razrešiti bodisi v enostavne realne faktorje $px + q$ ali v realne kvadratne faktorje $p + qx + rx^2$."* Kasneje je v svoji knjigi "*Introductio in analysin infinitorum*" zapisal: *"Če je še kakšen dvom, da se da vsak polinom razstaviti kot produkt realnih linearnih* *in realnih kvadratnih faktorjev, potem bi se moral ta dvom do sedaj že skoraj povsem razbliniti."*

Vendar to verjeti ni isto kot dokazati! In tako je Euler 1749 predstavil svoj dokaz. To je bil del njegovega članka "*Recherches sur les racines imaginaires des équations.*" Čeprav je imelo to delo logične pomanjkljivosti, v njem vendarle lahko prepoznamo njegovo mojstrstvo.

Namesto da bi se takoj lotil polinoma splošne, n-te stopnje, je Euler začel z enostavnimi primeri in se postopoma pomikal proti zapletenejšim. Najprej se je lotil polinoma 4. stopnje.

Izrek 12 *Vsak polinom 4. stopnje $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$, kjer so A, B, C, D realni, se da razstaviti na dva realna faktorja druge stopnje.*

Dokaz. Euler se je, kot običajno, najprej znebil kubičnega člena, s substitucijo $x = y - A/4$. Tako reduciano enačbo je lažje razstaviti, iz te razcepitve pa dobimo razcepitev prvotnega polinoma s pomočjo inverzne substitucije $y = x+A/4$. Torej je bilo dovolj, če je obravnaval polinom x^4+Bx^2+Cx+D, kjer so bili koeficienti B, C, D realni. Zdaj je obravnaval dva primera: $C = 0$ (lažji) in $C \neq 0$ (težji).

V primeru $C = 0$ je dobil polinom 4. stopnje x^4+Bx^2+D, ki je kvadraten v x^2. Obravnaval je dva podprimera:

a) če $B^2 - 4D \geq 0$, je s formulo za rešitev kvadratne enačbe dobil razcep v dva kvadratna faktorja z realnimi koeficienti:

$$x^4 + Bx^2 + D = (x^2 + \frac{B + \sqrt{B^2 - 4D}}{2})(x^2 + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4D}}{2})$$

b) če $B^2 - 4D < 0$, pa tak razcep ni uporaben, ker $\sqrt{B^2 - 4D}$ ni realno število. Lahko pa polinom zapišemo kot razliko dveh kvadratov in razstavimo takole:

$$x^4 + Bx^2 + D = (x^2\sqrt{D})^2 - (x\sqrt{2\sqrt{D} - B})^2 =$$

$$(x^2\sqrt{D} - x\sqrt{2\sqrt{D} - B})(x^2\sqrt{D} + x\sqrt{2\sqrt{D} - B}).$$

Ta izraz je realen. Zaradi $B^2 - 4D < 0$ je namreč $4D > B^2 \geq 0$, torej je $\sqrt{D}$ realen. Podobno iz $4D > B^2$ sledi $2\sqrt{D} > |B| \geq B$, torej je tudi $\sqrt{2\sqrt{D} - B}$ realno število.

Primer $C \neq 0$ je težji. Tu je Euler opazil, da mora imeti vsaka faktorizacija reduciranega polinoma 4. stopnje obliko

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta) \tag{6}$$

kjer je treba še določiti realna števila u, α, β. Razstavil je desno stran enačbe

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = x^4 + (\alpha + \beta - u^2)x^2 + (\beta u - \alpha u)x + \alpha\beta$$

in s primerjavo koeficientov ob enakih potencah dobil tri enačbe:

$$B = \alpha + \beta - u^2, \quad C = (\beta - \alpha)u, \quad D = \alpha\beta.$$

Koeficienti B, C, D so znani, medtem ko so u, α, β neznanke, katerih *eksistenco* je Euler želel dokazati. Iz prvih dveh enačb je dobil:

$$\alpha + \beta = B + u^2, \quad \beta - \alpha = \frac{C}{u}.$$

Ker $0 \neq C = (\beta - \alpha)u$, je tudi u neničeln (torej $\frac{C}{u}$ obstaja). Ti dve enačbi je seštel in odštel, in tako dobil β in α izražena kot funkciji u:

$$2\beta = B + u^2 + \frac{C}{u}, \quad 2\alpha = B + u^2 - \frac{C}{u}. \tag{7}$$

Iz enačbe $D = \alpha\beta$ pa je dobil

$$4D = 4\alpha\beta = (2\alpha)(2\beta) = (B + u^2 + \frac{C}{u})(B + u^2 - \frac{C}{u}) = u^4 + 2Bu^2 + B^2 - \frac{C^2}{u^2}.$$

Po množenju z u^2 in ureditvi je dobil enačbo 6. stopnje za u:[10]

$$u^6 + 2Bu^4 + (B^2 - 4D)u^2 - C^2 = 0. \tag{8}$$

Euler je opazil naslednja dejstva pri gornji enačbi:

(a) B, C in D so dana realna števila, in tako je neznanka samo u

(b) polinom je sode stopnje, torej je njegov graf simetričen glede na y os

(c) konstantni člen tega polinoma šeste stopnje je $-C^2 < 0$.

[10]Ta enačba je kubična v u^2, in ta ima vsaj en realen koren, vendar to ne garantira, da ima (8) kakšne realne korene (če je namreč u^2 negativno število, je u imaginarno število).

Ker ima graf negativno absciso presečišča z ordinatno osjo in ker graf raste v ∞, ko $x \to \pm\infty$, zaradi zveznosti polinoma in izreka o vmesnih vrednostih (ki ju je Euler imel za intuitivno jasna), je bila tako zagotovljena eksistenca realnih števil $u_0 > 0$ in $-u_0 < 0$, ki sta korena našega polinoma 6. stopnje. S pomočjo pozitivne rešitve u_0 je Euler izrazil β in α iz (7) in dobil

$$\beta_0 = \tfrac{1}{2}(B + u_0^2 + \tfrac{C}{u_0}) \qquad \text{in} \qquad \alpha_0 = \tfrac{1}{2}(B + u_0^2 - \tfrac{C}{u_0}),$$

in, ker je $u_0 > 0$, ulomka $\frac{C}{u}$ obstajata.

Če povzamemo, v primeru, ko je $C \neq 0$, je Euler pokazal, da obstajajo realna števila u_0, α_0, β_0, tako da je

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + u_0x + \alpha_0)(x^2 - u_0x + \beta_0).$$

S tem je dokazal, da se da vsaka reducirana enačba 4. stopnje z realnimi koeficienti – in s tem vsaka enačba 4. stopnje – faktorizirati v dva realna kvadratna faktorja, pa če je $C = 0$ ali ne.

Na tem mestu je Euler omenil: *"Očitno je tudi, da je vsaka enačba 5. stopnje razstavljiva v tri realne faktorje, od katerih je eden linearen in dva kvadratna."* Namesto, da bi se zdaj lotil po vrsti polinomov 6. in 7. stopnje, mu je prišlo na misel, da je dovolj, če dokaže izrek za polinome 8., 16., 32., in v splošnem 2^n-te stopnje. Vsak drug polinom bi namreč le pomnožil s primerno potenco x^k tako da bi dobil nek polinom stopnje 2^n. Tega bi lahko razstavil, in ta razcepitev bi dala razcepitev prvotnega polinoma.

Tako je bil zdaj naslednji Eulerjev cilj dokazati: *"Vsak polinom osme stopnje se da vedno razstaviti na dva realna faktorja četrte stopnje."*

Če se najprej znebimo člena x^7, nam to da pogoj

$$x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H =$$

$$(x^4 + ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)(x^4 - ux^3 + \delta x^2 + \epsilon x + \phi).$$

Pomnožil je polinoma na desni, izenačil ustrezne koeficiente z znanimi količinami $B, C, D, \ldots$ in dobil sedem enačb s sedmimi neznankami; zdaj bi moral pokazati, da obstajajo realne vrednosti $u, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ki temu sistemu zadoščajo. Vendar mu to ni uspelo. Priznal je, da ne zna rešiti tega sistema tako, da bi iz njega dobil enačbo za u, potem pa vse druge neznanke $\alpha, \beta, \ldots$ izrazil z u.

Poskušal pa je še drugače, in ob predpostavki, da se da reducirani polinom 4. stopnje razstaviti na linearne faktorje (to metodo je potem posplošil na polinome 8, 16, itd. stopnje,), mislil, da je dokazal O.I.A. Vendar je Gauss opozoril na temeljno napako tega dokaza že na samem začetku, ko je Euler predpostavil, da obstaja razcepitev na linearne faktorje. Gauss je tudi umestno pripomnil, da ni jasno, kakšna naj bi bila narava teh števil. Ne moremo vnaprej vedeti, da so ta števila realna ali kompleksna (lahko bi bila še kakšna druga, neznana števila).

Dokaz O.I.A. je moral počakati še pol stoletja, ko se ga je lotil Gauss. Ta je podal kar 4. dokaze (prvi je bil sicer nepopoln, vendar je Ostrowski leta 1920 pokazal, da so bile predpostavke tega Gaussovega dokaza, ki jih je Gauss pustil nedokazane, vendarle pravilne). Danes O.I.A. dokazujejo v okviru kompleksne analize, prek Liouvilleovega izreka. Obstajajo pa še drugi dokazi, ki jih najdemo v različnih učbenikih algebre.

5.5.6 Gaussov prvi dokaz osnovnega izreka algebre

Osnovni izrek algebre pravi, da se da vsak polinom z realnimi ali kompleksnimi koeficienti faktorizirati v linearne faktorje v obsegu kompleksnih števil. V svojem prvem dokazu Gauss ne uporablja kompleksnih števil. Osnovni izrek dokaže v naslednji obliki:

Izrek 13 *Vsak polinom z realnimi koeficienti je mogoče faktorizirati v linearne in kvadratne faktorje.*

Načela, na katerih je osnovan, je našel oktobra 1797. Objavil ga je v svoji disertaciji 1799. Drugi in tretji dokaz je objavil 1816, četrtega (osnovanega na istih načelih kot prvi) pa 1849. Preden je podal svoj dokaz, je Gauss kritiziral prejšnje dokaze d'Alemberta, Eulerja, Fontenexa in Lagrangea. Njegov glavni ugovor je bil, da je v vseh teh dokazih predpostavljena eksistenca korenov. Ti dokazi vsi po vrsti pokažejo, da lahko korene dobimo kot kompleksna števila, ob začetni predpostavki, da takšni ali drugačni koreni sploh obstajajo. Očitna je logična vrzel v skupni shemi sklepanja vseh teh dokazov: "*Če obstajajo takšni ali drugačni koreni polinomske enačbe* $p(z) = 0$*, potem so ti koreni kompleksna števila. Torej obstajajo koreni polinomske enačbe* $p(z) = 0$*, ki so kompleksna števila.*" Posledica preprosto ne sledi iz premis.

Posameznim dokazom O.I.A. je Gauss očital še druge pomanjkljivosti. Eulerjeve dokaze je označil kot nejasne.

Gauss svoj prvi dokaz O.I.A. začne z realnim polinomom

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Lx + M = 0.$$

Želi dokazati, da obstaja linearen ali kvadraten faktor polinoma X.

Ireducibilni kvadratni faktor implicira eksistenco dveh kompleksnih korenov

$$r(\cos\phi \pm i \sin\phi), \tag{9}$$

torej lahko kvadratne faktorje pišemo kot

$$x^2 - 2xr\cos\phi + r^2 \quad (r > 0) \tag{10}$$

Ko vstavimo enega od korenov (10) v enačbo $X = 0$ in ločimo realni in imaginarni del, dobimo dve enačbi za r in ϕ:

$$r^m \cos m\phi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\phi + \ldots + Lr\cos\phi + M = 0 \tag{11}$$

$$r^m \sin m\phi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\phi + \ldots + Lr\sin\phi = 0. \tag{12}$$

Gauss omeni, da je Euler dobil ti dve enačbi s pomočjo kompleksnih števil. Gauss pa ju je dobil direktno iz predpostavk, da ima polinom X linearen faktor $x \pm r$ ali kvadratni faktor (9). Gauss interpretira (11) in (12) kot enačbi algebraičnih krivulj v polarnih koordinatah, in nadaljuje s tem, da pokaže, da se ti dve krivulji sekata vsaj v eni točki. Ko je enkrat to dokazano, od tod sledi, da ima X linearen ali kvadraten faktor, in z nadaljevanjem tega procesa dobi faktorizacijo X v linearne in kvadratne faktorje.

Gaussov prvi dokaz je osnovan na predpostavkah glede vej algebraičnih krivulj, ki se sicer zdijo verjetne naši geometrijski intuiciji, vendar pa jih Gauss ni strogo dokazal.

Alexander Ostrowski je pokazal v svojem članku "Über den ersten und vierten Gauss'chen Beweis der Fundamentalsatzes der Algebra", da se dajo vse Gaussove predpostavke dokazati z dokazi, ki ne dopuščajo dvoma. Članek Ostrowskega je bil najprej objavljen v Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen 1920, ponovno pa je bil tiskan v Gaussovih Delih X,2. (vir: B. L. van der Waerden, *A History of Algebra*, 94–97).

5.5.7 Analiza zanimivih podrobnosti

Na podlagi vsega doslej povedanega smo si ustvarili neko grobo, pregledno sliko o Eulerjevem delu vsaj na nekaterih matematičnih področjih. Toda ta slika je le prvi približek, ne pa vsa resnica.

Globlje razumevanje (tako Eulerjevega dela kot tudi matematike in njene zgodovine nasploh) lahko dosežemo le tako, da se ne zadovoljimo le s površnim, preglednim, konceptualnim znanjem, dobljenim s prebiranjem literature in zapisovanjem, urejanjem in pomnjenjem podatkov, definicij in izrekov, ampak da to teoretično znanje dopolnimo tudi s praktičnim delom, npr. z lastnim zastavljanjem vprašanj in reševanjem nalog, ko skušamo slediti potem računanja in dokazovanja, ki jih je ubral nek matematiki (in alternativnim, strožjim ali krajšim računom in dokazom drugih matematikov).

Nekaj od teh podrobnosti bomo, za vzorec, predstavili v tem razdelku. Tu je zbranih nekaj vprašanj, nalog, primerov, zgledov, analiz in komentarjev dokazov, itd., ki se nanašajo na Eulerjevo delo v teoriji števil. Vse to je namenjeno temu, da bi študenti (in drugi bralci tega gradiva) lahko:

a) razvili radovednost in željo, da bi bolje razumeli, kako je Euler razmišljal, računal in dokazoval,

b) te njegove tehnike in metode metode matematičnega razmišljanja identificirali, jih osvojili in znali uporabiti pri svojem lastnem raziskovalnem delu,

c) da bi se naučili zastavljati lastna, izvirna vprašanja ob študiranju Eulerja (in drugih matematikov).

Ta preskok od objektivno preverljivih podatkov iz virov k rekonstrukciji procesa matematikovega mišljenja je, tudi če ni povsem zanesljiv, lahko izjemno koristen za razvoj naših lastnih matematičnih sposobnosti oziroma za razvoj istih sposobnostih pri naših učencih oziroma poslušalcih ali bralcih.

[1] *Kako je Euler ovrgel Fermatovo hipotezo, da je $F_n = 2^{2^n} + 1$ praštevilo za vsak n, na katero ga je (v pismu 1. decembra 1729) opozoril Goldbach?*

Vemo, da je Euler (1732, v svojem prvem članku o teoriji števil) odkril, da je $2^{2^5} + 1 = 4,294,967,297$ deljivo s praštevilom 641. To se da seveda preveriti, toda vprašanje je, kako je našel to število? Da je F_6 deljivo z 274177, je pokazal Landry (leta 1880).

[2] *Kako je Eulerju uspelo dokazati, kot je trdil v pismu Danielu Bernoulliju iz leta 1772, da je $2^{31} - 1$ praštevilo?*

To, osmo po vrsti Mersennovo praštevilo, kot pove Evklidov izrek, generira popolno število $2^{30}(2^{31}-1)$, in še v začetku 19. stoletja so menili, da nihče ne bo odkril večjega popolnega števila.

Kako odgovoriti na takšna in podobna vprašanja? Lahko skušamo:

a) najti odgovor v prebiranju dodatne literature o Eulerju,

b) lahko se vprašamo (ali skušamo ugotoviti iz prebiranja dodatne literature), katera orodja, ki bi mu lahko pri tem pomagala, je imel na voljo (oziroma jih je sam razvil),

c) lahko pa se tudi vprašamo, kako bi mi dokazali iste trditve.

Vemo, da je Euler na podlagi Fermatovega odkritja (dokaza ni podal ali pa ga Euler ni poznal), da je vsako praštevilo oblike $4n+1$ mogoče zapisati kot vsoto dveh kvadratov, dokazal še več, in sicer, da ima vsako praštevilo oblike $4n+1$ enolično reprezentacijo v obliki vsote dveh kvadratov naravnih števil. Ugotovil je, da ima sestavljeno število, kadar ima tako reprezentacijo, vsaj še eno drugo tako reprezentacijo, in da praštevila oblike $4n-1$ nimajo take reprezentacije. Na podlagi tega je razvil kriterij (zadostni pogoj) za ugotavljanje praštevilskosti: če ugotovimo, da ima neko število oblike $4n+1$ eno samo reprezentacijo v obliki vsote dveh kvadratov naravnih števil, in je ta reprezentacija prava, potem je to praštevilo. Ta kriterij je enostavnejši kot preverjanje, ali je število deljivo s katerim od števil do njegovega kvadratnega korena. Tako si je Euler dejansko pomagal s tabelami kvadratov, da je dokazal, da so določena števila praštevila. Vemo, da je naredil celo tabelo razcepov vseh števil do milijon na potence praštevil.

Dejansko pa je odgovor na vprašanje [1] takle: uporabil je *mali Fermatov izrek*! Res, če je p liho praštevilo, ki deli $2^{32}+1$, potem je $2^{32} \equiv -1 (mod\, p)$, torej je $2^{64} \equiv 1 (mod\, p)$. Če je x red 2 po modulu p, potem mora x deliti 64, vendar x ne more deliti 32, torej je $x = 64$. Tedaj pa je, po posledici malega Fermatovega izreka, $p-1$ deljivo s 64. Torej je $p = 64k+1$, in praštevila te oblike so 193, 257, 577, 641,... Tako je Euler našel kandidate za delitelje F_5, ki jih je potlej samo po vrsti preverjal.

Pri iskanju praštevilskih deliteljev števil $a^n \pm b^n$ pa si je prav tako pomagal z malim Fermatovim izrekom (in tako precej omejil število možnih praštevilskih deliteljev, ki jih je moral preveriti). Če namreč praštevilo p deli 2^n-1, potem zaradi $2^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$ število $p-1$ deli n. Tako je (v primeru $n = 32$)

odkril, da je $2^{32} - 1$ praštevilo. Delitelji 32 so namreč 32,16,8,4,2,1, torej so kandidati za $p - 1$ le praštevila iz nabora števil 33,17,9,5,3,2. Dejansko je moral preveriti le, da $2^{32} - 1$ ni deljivo z nobenim od praštevil 3,5,17!

[3] *Kako je Eulerju prišlo na misel, vpeljati analitične tehnike (neskončne vrste, rodovne funkcije) v teorijo števil?*

Euler se je ukvarjal s problemom reprezentacije naravnih števil kot vsote štirih kvadratov. V pismu Goldbachu je zapisal, da bi bil najbolj naraven način, da se dokaže ta izrek ta, da se pokaže, da so vsi koeficienti vrste

$$(1 + x + x^4 + x^9 + \ldots)^4 = \Sigma k_n x^n$$

pozitivni. Koeficient k_n pri potenci x^n namreč pove, na koliko načinov se da zapisati n kot vsota štirih kvadratov. Ta Eulerjeva opomba je začetek uporabe analitičnih metod pri problemu predstavljanja števil kot vsot kvadratov in dejansko v teoriji števil kot celoti.

To Eulerjevo idejo je realiziral Jacobi, ki pa je za izhodišče svojega dokaza izreka, da je vsako naravno število vsota štirih kvadratov, vzel funkcijo

$$\vartheta(x) = 1 + 2x^4 + 2x^9 + ...$$

[4] *Kako je Eulerju prišlo na misel vpeljati neskončne produkte in jih uporabiti v teoriji števil?*

Berlinski matematik Philip Naude je Eulerju zastavil naslednje vprašanje: "*Na koliko načinov lahko celo število N zapišemo kot vsoto m naravnih števil ali m različnih naravnih števil?*"

To vprašanje je spodbudilo nekaj čudovitih Eulerjevih člankov. Euler je vpeljal *formalne neskončne produkte*, ki so predstavljali *rodovne funkcije* različnih *particijskih funkcij*.

Naj bo $p(n)$ število particij n, $q(n)$ število particij na različne sumande, in $r(n)$ število particij na lihe sumande. Potem so ustrezne rodovne funkcije:

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...} = P(x),$$

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} q(n)x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)..., = Q(x)$$

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} r(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)....} = R(x)$$

Euler je pokazal enakost rodovnih funkcij $Q(x) = R(x)$ za particije na različne in lihe sumande, iz katere potem avtomatično sledi enakost ustreznega števila samih particij $q(n) = r(n)$:

$$Q(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)... = \frac{(1-x^2(1-x^4(1-x^6)...}{(1-x)(1-x^3(1-x^5)}$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)....} = R(x)$$

[5] *Kaj o formalnih potenčnih vrstah in rodovnih funkcijah pove današnja teorija?*

Metoda rodovnih funkcij izvira od L. Eulerja, J. Stirlinga in De Moivréja iz 18. stoletja.

Vsakemu zaporedju realnih ali kompleksnih števil $a_0, a_1, a_2, ...a_n, ...$ lahko priredimo *formalno potenčno vrsto* oziroma *rodovno funkcijo*

$$a(t) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Dve taki vrsti sta enaki natanko tedaj, če imate vse koeficiente enake.

Takšne formalne vrste lahko formalno seštevamo, odštevamo, množimo ter členoma odvajamo in integriramo. Rodovna funkcija kot en sam objekt nadomešča celo neskončno zaporedje števil, in lažje je manipulirati z enim samim objektom (še posebej v rekurzivnih relacijah). Tudi sisteme rekurzivnih enačb lahko rešujemo z rodovnimi funkcijami.

[6] *O čem govori Eulerjev pentagonalni izrek, v okviru kakšnih raziskav ga je odkril?*

Formalno je to naslednja identiteta, ki jo je dokazal Euler:

$$\Pi_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \Sigma_1^{\infty}(-1)^n(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}}) = 1 + \Sigma_{-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}}.$$

V njej nastopajo *petkotniška števila* $\frac{n(3n-1)}{2}$. Leva stran identitete predstavlja rodovno funkcijo za število particij n na sodo število različnih delov minus število particij n na liho število različnih delov.

Odkril jo je, ko je razvil splošno metodo, ki se uporablja pri preštevanju različnih načinov, na katere se da izraziti naravna števila kot vsote naravnih števil. Rodovne funkcije izrazimo najprej v obliki neskončnih produktov, nato pa jih zapišemo v obliki vrste, katere koeficienti “štejejo” število ustreznih particij.

[6] *Kako je Euler izrazil zeta funkcijo z neskončnim produktom in kako je to identiteto uporabil za dokaz, da obstaja neskončno mnogo praštevil?*

Euler je dokazal identiteto:

$$\zeta(s) = \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \Pi_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

V Eulerjevi notaciji je identiteta za zeta funkcijo izgledala takole:

$$\zeta(s) = \frac{2^s 3^3 5^s ... p^s ...}{(2^s-1)(3^3-1)(5^s-1)...(p^s-1)...}.$$

Na desni je produkt po vseh praštevilih p. To enakost je preveril za vse $s > 1$, potem pa, ko jo je gledal za vrednosti dovolj blizu 1, od tod dokazal, da mora biti praštevil neskonšno mnogo (saj leva stran raste v neskončnost, torej mora tudi desna).

[7] *Na katerih področjih teorije števil je torej Euler pustil svoj pečat?*

Fermatova praštevila, mali Fermatov izrek, vsota dveh kvadratov, predstavitev praštevil z binarnimi kvadratnimi formami, vsote štirih kvadratov, Diofantske enačbe, veliki Fermatov izrek, kvadratni reciprocitettni zakon, zeta funkcija, Eulerjevi produkti, distribucija praštevil, velika praštevila in testiranje praštevilskosti, particije naravnih števil, verižni ulomki, algebraična in transcendentna števila, itd..

[8] *Kako bi – z vpeljavo primernih simbolov – pregledno predstavili bistvo Eulerjeve metode za reševanje enačb 4. stopnje?*

Če analiziramo (in sintetiziramo) rešitev, ter za polinomsko enačbo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

vpeljemo naslednjo okrajšavo:

$$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 | y] = 0$$

vidimo da je Eulerjev algoritem za reševanje enačbe četrte stopnje takle:

Prvotna enačba 4. stopnje:

$$[A, B, C, D, E|y] = 0.$$

Substitucija:

$$y = x - \frac{B}{4A}$$

Reducirana enačba 4. stopnje brez kubičnega člena:

$$[1, 0, -a, -b, -c|x] = 0.$$

Iz nje preberemo $\{a, b, c\}$. Iščemo rešitev v obliki:

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}.$$

Z dvakratnim kvadriranjem te enačbe dobimo:

$$\Big[1, 0, -2(p+q+r), -8\sqrt{pqr}, -(4(pq+pr+qr) - (p+q+r)^2|x\Big] = 0.$$

Vpeljemo $f = p+q+r$, $g = pq+pr+qr$, $h = pqr$. Prejšnjo enačbo prepišemo v obliko:

$$\Big[1, 0, -2f, -8\sqrt{h}, -(4g) - f^2|x\Big] = 0.$$

Iz te enačbe in reducirane enačbe $[1, 0, -a, -b, -c|x] = 0$ dobimo

$$f = a/2, h = \frac{b^2}{64}, g = \frac{4c + a^2}{16}.$$

Enačbo 3. stopnje $(z-p)(z-q)(z-r) = 0$ s koreni p, q, r prepišemo v obliko:

$$[1, -(p+q+r), (pq+pr+qr), -pqr|z] = 0.$$

To enačbo prepišemo v obliko, kjer nastopajo f, g, h, namesto p, q, r:

$$[1, -f, g, -h|z] = 0.$$

Iz te enačbe 3. stopnje nam Cardanove formule dajo $\{p, q, r\}$. Zdaj je $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ in dobimo rešitev prvotne enačbe 4. stopnje $y = x - \frac{B}{4A}$.

To pomeni, da rešujemo enačbo takole:

Iz koeficientov a, b, c reducirane enačbe 4. stopnje

$$[1, 0, -a, -b, -c|x] = 0$$

dobimo

$$f = a/2, \quad h = \frac{b^2}{64}, \quad g = \frac{4c + a^2}{16}$$

in iz enačbe 3.stopnje

$$[1, -f, g, -h|z] = 0$$

po Cardanovih formulah dobimo

$$p, q, r,$$

od tod pa

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

in

$$y = x - \frac{B}{4A}$$

.

Tako vidimo, kako uvedba primernega simbolizma olajša razumevanje samega postopka, saj ga naredi veliko preglednejšega.

5.5.8 Nekaj nalog in vprašanj za utrjevanje naučenega

1. Poizkusite razumljivo in natančno opisati postopek za rešitev kvadratne enačbe (formulo $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) z besedami, v slogu "retorične algebre" italijanskih mojstrov pred Vietom. Ker nimate na voljo simbolov a, b, c, lahko ta "recept" opišete aritmetično, na konkretnem številskem primeru, kot je npr. $5x^2 - 3x + 1 = 0$.

2. Poizkusite reducirati splošno kubično enačbo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ z vpeljavo nove spremenljivke $x' = x \pm \frac{1}{3}a$ v obliko $x^3 + px + q$.

3. Cardanove formule za enačbo $x^3 = 15x + 4$ dajo $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Poizkusite priti do rešitve $x = 4$ tako, da najprej izračunate tretji koren iz kompleksnega števila s pomočjo parametrov p in q (kot je to znal že Bombelli!) v obliki: $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}$.

4. Ponovite tretji Eulerjev dokaz identitete

$$e^x = \cos x + i \sin x,$$

tako da v vrsti za e^x vstavite ix namesto x, ločite realni in imaginarni del, ter upoštevate znani vrsti za $\sin x$ in $\cos x$. Ta dokaz je sam odkril tudi Richard Feynman (1918–1988) leta 1933 tik pred svojim petnajstim letom.

5. Pokažite, kako iz Eulerjeve identitete $e^x = \cos x + i \sin x$ takoj sledi "najlepša matematična formula vseh časov"

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

v kateri nastopajo najpomembnejše konstante v matematiki $e, \pi, i, 1$ in 0.

Gornje naloge lahko služijo kot lepa ilustracija trditve, da je bila matematika tudi v preteklosti zahtevna, in da bi bile nekatere naloge iz Eulerjevega časa razmeroma težke tudi danes.

Po zgledu gornjih nalog in vprašanj lahko študenti (in drugi zainteresirani bralci) poizkušajo sami oblikovati podobne naloge in vprašanja v zvezi z Eulerjevim delom (ali delom drugih matematikov).

Celotno to učno gradivo je lahko učiteljem matematike in ljubiteljem zgodovine matematike v pomoč oziroma zgled pri oblikovanju podobnih gradiv o drugih velikih matematikih. Prav tako je mišljeno kot motivacija raziskovalcem, ki odkrivajo in ustvarjajo na različnih področjih matematike, da iščejo sinteze med različnimi področji matematike. Prav to je bil namreč v zgodovini matematike eden najplodnejših pristopov k odkrivanju novih trditev, pojmov in celih področij, in Euler nam je takorekoč idealen zgled za to, kako zelo koristen in uspešen je lahko tak način razmišljanja in dela.

6 Zaključek: Euler – učitelj in zgled vsem matematikom

6.1 Zakaj je bil Euler tako uspešen v matematiki?

Noben matematik nikoli ni dosegel takšnega položaja nespornega vodstva v vseh vejah matematike, čiste in uporabne, kot Euler v pretežnem delu osemnajstega stoletja.

André Weil (1906-1998)

Razloge za Eulerjeve uspehe v matematiki gre iskati v srečni kombinaciji talenta in osebnostnih lastnosti, izobrazbe in samih okoliščin življenja. Nekatere osebnostne lastnosti in zunanje okoliščine, ki so bile morda odločilne za njegov (zgodnji in dolgoletni) matematični uspeh in vpliv, so:

(1) izjemen talent, računske moči, moč prepoznavanja vzorcev, sposobnost formuliranja hipotez (ki so se dostikrat pokazale za resnične) in definiranja novih pomembnih matematičnih pojmov že na podlagi peščice primerov

(2) pogovori z Jakobom Bernoullijem že v mladosti, dobra izobrazba

(3) vključenost v delo berlinske in st. peterburške univerze

(4) optimistični, radostni, pogumni in neuklonljivi značaj

(5) predanost matematiki, neizčrpna energija, delo, vztrajnost, prepričanost, da bo rešil problem

(6) intuicija, domišljija, domiselnost, drznost za skok v neznano

(7) ustvarjalnost, prodornost, univerzalnost, plodovitost, veselje do raziskovanja in pisanja matematičnih (in drugih) del

(8) pionirski duh, sposobnost povezovanja (problemov, metod, teorij) različnih področij

(9) hitro odzivanje in odgovarjanje na vprašanja drugih matematikov

(10) raziskovanje tudi tistih področij, ki so bila sodobnikom nezanimiva (npr. teorije števil).

Omeniti velja še nekaj Eulerjevih dobrih matematičnih navad:

(11) Stvarem je hotel priti do dna. Dobre ideje, s katerimi je že prišel do rezultatov, je izkoristil do maksimuma (podobno je G. Polya opozarjal, da se je treba vselej ozreti okrog problema za sorodnimi problemi).

(12) Tudi kadar neke hipoteze ni znal strogo dokazati, je priskrbel veliko primerov in računov, s katerimi je podkrepil svoje domneve.

(13) Marsikatere tiste svoje dokaze, s katerimi ni bil povsem zadovoljen (glede strogosti), je kasneje dopolnil z novimi, morda povsem drugačnimi (podobno kakor šahovski velemojstri, ki iščejo najlepšo kombinacijo oziroma pot do zmage). Ob tem se lahko spomnimo tudi Arhimeda, ki je do nekaterih svojih geometrijskih odkritij prišel s pomočjo načel mehanike, preden jih je dokazal na strogo geometrijski način.

(14) Bil je eden redkih matematikov 18. stoletja, ki se je zavedal, da je treba določene pojme (npr. kakšno število prirediti divergentnim vrstam kot njihovo "vsoto") definirati, da so torej odvisni od dogovora in da niso "očitni".

(15) Korektno in zelo velikodušno je priznaval dosežke drugih, ki jih je sam razvijal dalje, in bil hvaležen zanje.

6.2 Kaj se danes lahko naučimo od Eulerja?

Noben študent literature ne bi bil zadovoljen le s sinopsisom Hamleta. Podobno, noben matematik ne bi smel iti skozi svojo kariero brez soočenja z Eulerjem iz oči v oči.

William Dunham, Euler, The Master of Us All

Tudi današnji matematik se lahko veliko nauči od Eulerja, iz naslednjih (in še kakšnih drugih) razlogov:

(1) Eden od razlogov je ta, da smo danes veliko bolj specializirani, in tako vsak matematik pozna le majhen del matematike, medtem ko je Euler poznal vso matematiko svojega časa.

(2) Veliko se lahko od njega naučimo tudi v mislu jasne razlage in predstavitve snovi. Prav tako nam je lahko zgled tudi po domiselnosti, vztrajnosti in optimizmu, s katerimi se je loteval reševanja problemov.

(3) Zgled nam je lahko tudi po svojem sodelovanju in dopisovanju z drugimi matematiki.

(4) Seveda pa lahko vsak matematik v ogromni Eulerjevi matematični zapuščini najde področja in probleme, ki so mu še posebej zanimiva.

6.3 Kaj vemo v matematiki danes, česar on ni vedel?

Za konec tega kratkega pregleda Eulerjevega matematičnega dela, ki je poudarjalo predvsem njegove dosežke, odlike in uspehe, omenimo še nekaj stvari v matematiki, ki jih, kot otrok svojega časa, ni vedel in seveda tudi ni mogel vedeti, danes pa jih, po zaslugi prispevkov drugih matematičnih velikanov, Eulerjevih naslednikov, pozna vsak študent matematike. Tako npr. Euler

(1) ni vedel, da se za splošne polinomske enačbe pete stopnje ne da dobiti podobnih formul kot za enačbe nižjih stopenj, to sta dokazala neodvisno drug od drugega šele Abel in Galois;

(2) ni znal dokazati osnovnega izreka algebre (da ima vsaka polinomska enačba s koeficienti v obsegu realnih števil vsaj eno ničlo v obsegu kompleksnih števil); to je uspel dokazati šele Gauss, danes pa to dokažemo npr. v okviru kompleksne analize prek Liouvilleovega izreka;

(3) ni poznal kriterijev za konvergenco neskončnih vrst (in neskončnih produktov); vrzeli v njegovih dokazih in manipulacijah z divergentnimi vrstami so spodbudili njegove naslednike, da so šele iznašli natančnejši jezik oziroma pojme v matematični analizi, s katerimi je bilo npr. mogoče preveriti, katere trditve o vrstah držijo, katere pa ne; tako je npr. šele Weierstrass podal danes vsakemu študentu matematike dobro znano "epsilon–delta" definicijo limite (in zveznosti), prav na pojmu limite pa so danes utemeljeni pojmi, kot je konvergenca zaporedij in vrst, odvod in določeni integral;

(4) čeprav je bil tudi računsko izjemno spreten in močan, pri svojih raziskavah npr. iz teorije števil, v katerih je pogosto neko trditev postavil šele na podlagi (nepopolnega) induktivnega sklepanja, torej na podlagi velikega števila primerov, v katerih se je izkazala za resnično, ni imel na razpolago modernih zmogljivih računalnikov, s katerimi lahko danes testiramo različne hipoteze na veliko večjem številu primerov, kot je to lahko počel Euler; kljub temu pa se določene hipoteze, npr. Goldbachova domneva ali Riemannova hipoteza, upirajo še tako veliki računski moči najzmogljivejših računalnikov.

Seveda bi lahko našli še veliko drugih primerov, kako je moderna matematika od Eulerjevih časov napredovala, čeprav v svojih osnovnih metodah in idejah v marsičem temelji prav na Eulerjevih prispevkih. Ker smo matematiki danes veliko bolj specializirani, on pa je bil univerzalen, nam študij njegovih del lahko vsekakor močno razširi naše matematično obzorje.

7 Literatura

[1] William Dunham, *Euler, The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions No.22, 1999.

[2] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.

[3] Paul J. Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula cures many mathematical ills*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006.

[4] Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 1998.

[5] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS, 2006.

[6] Darko Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[7] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.