Uporabna matematika za naravoslovce

Zapiski predavanj

Študijski programi: Aplikativna kineziologija, Biodiverziteta

Študijsko leto 2013/14

doc.dr. Barbara Boldin

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije
Univerza na Primorskem

Kazalo

Del I

Linearna algebra

Poglavje 1

Matrike

V tem poglavju bomo spoznali pojem matrike, se naučili z matrikami računati ter si ogledali nekaj primerov uporabe matrik v biologiji.

1.1 Uvod

Definicija. **Matrika** *reda (oziroma velikosti)* $m \times n$ *z realnimi koeficienti je pravokotna shema realnih števil, ki so razporejena v* m *vrstic in* n *stolpcev:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pišemo tudi $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

Števila, ki sestavljajo dano matriko imenujemo *elementi* ali *koeficienti* matrike. Matrike bomo označevali z velikimi črkami (denimo A, B, X), njihove elemente pa običajno z malimi črkami (denimo a_{12}, b_{21}, x_{ij}). Indeksa elementa a_{ij} povesta položaj elementa v matriki: element a_{ij} se nahaja v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike A. Matriko poznamo, če poznamo elemente matrike in njihov položaj v matriki. Matriki A in B sta *enaki* kadar imata isti red in enake istoležne elemente.

Primer. Matrika

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ima red 2×3, njeni elementi pa so $a_{11} = 5, a_{12} = 2, a_{13} = -1, a_{21} = 7, a_{22} = -3$ in $a_{23} = 0$.

Primer. Matrika z elementi $b_{11} = 0, b_{12} = 3, b_{21} = 7, b_{22} = -3, b_{31} = 0$ in $b_{32} = 5$ je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Red matrike B je 3×2.

Opomba. Matriko lahko zapišemo tudi z oglatimi oklepaji, denimo

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

1.2 Osnovne računske operacije

V množico matrik najprej vpeljimo dve operaciji, seštevanje in množenje.

Matriki lahko seštejemo le če imata enak red, vsota pa je definirana takole:

Definicija. ***Vsota*** *matrik* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ *in* $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ *je matrika* $C = A + B$*, ki ima za elemente vsoto istoležnih elementov matrik* A *in* B*, t.j.*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

za $i = 1, ..., m$ *in* $j = 1, ..., n$.

Seštevanje matrik je asociativno in komutativno, saj obe lastnosti veljata za seštevanje v množici realnih števil. Nevtralni element za seštevanje je matrika samih ničel (ničelna matrika), nasprotni element matrike A pa je matrika -A z nasprotno predznačenimi elementi, $-A = (-a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

Primer. Za

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

je

$$A + B = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \\ 13 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Primer. Vsota matrik

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ne obstaja, saj sta matriki različnih velikosti.

Produkt matrik A in B, AB, je definiran le v primeru, ko je število stolpcev prve (leve) matrike enak številu vrstic druge (desne) matrike. Če je $m \times n$ red matrike A in $p \times q$ red matrike B, produkt AB torej obstaja le kadar je $n = p$. Definicija produkta pa je naslednja:

Definicija. *Naj bo $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ in $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,q}$.* ***Produkt*** *matrik A in B je matrika $C = AB$ reda $m \times q$, katere elementi so*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \text{za } i = 1, 2, ..., m \text{ in } j = 1, 2, ..., q.$$

Rečemo, da je c_{ij} "produkt" i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B.

Primer. Za

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

je

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & -3 \\ 25 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad BA = \begin{pmatrix} 20 & 8 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 22 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Primer. Za

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

je

$$CA = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -4 \\ 47 & -16 & -1 \end{pmatrix},$$

produkt AC pa ni definiran.

Osredotočimo se sedaj le na kvadratne matrike, t.j. matrike reda $n \times n$. Na kratko rečemo, da je red kvadratne matrike enak n. V množici kvadratnih matrik sta vsota in produkt matrik vedno definirana. Poleg komutativnosti in asociativnosti seštevanja veljajo še naslednje lastnosti:

1. ASOCIATIVNOST MNOŽENJA. Za poljubne matrike A, B in C reda n velja

$$(AB)C = A(BC).$$

Dokaz. Na levi strani imamo

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj},$$

medtem ko je ij-ti element na desni strani enak

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} (BC)_{lj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} (\sum_{k=1}^{n} b_{lk} c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj}.$$

Ker enakost velja za poljuben par (i, j), je matrično množenje asociativno.

2. (NE)KOMUTATIVNOST MNOŽENJA. Matrično množenje v splošnem ni komutativno. To pomeni, da obstajata matriki A in B za kateri velja $AB \neq BA$.

Dokaz. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedaj velja

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = AB \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. DISTRIBUTIVNOST PRODUKTA GLEDE NA VSOTO. Za poljubne matrike A, B in C reda n velja

$$(A + B)C = AC + BC$$
$$A(B + C) = AB + AC.$$

Dokaz. Dokažimo le prvo od obeh trditev (drugo enakost preverimo na enak način). Imamo

$$\begin{aligned}
[(A+B)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} \\
&= [AC]_{ij} + [BC]_{ij}.
\end{aligned}$$

Ker to velja za poljuben par elementov (i,j) velja $(A+B)C = AC+BC$.

4. Enota (oz. nevtralni element) za množenje. Nevtralni element za množenje je t.i. *identična matrika* ali *identiteta* I,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Za vsako matriko A velja $AI = IA$.

Pri množenju matrik opazimo lastnosti, ki v množici realnih števil ne veljajo. Denimo:

(i) $A^2 = 0$, čeprav $A \neq 0$. To velja denimo za matriko $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $AB = 0$, čeprav $A \neq 0$ in $B \neq 0$. To velja denimo za matriki

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ in } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definicija. ***Skalarna matrika*** *je matrika oblike*

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

za nek $\lambda \in \mathbb{R}$.

Z uvedbo skalarnih matrik lahko v množico matrik vpeljemo še eno operacijo: *množenje matrike s skalarjem* z definicijo $\lambda A = (\lambda I)A$. Veljajo naslednje lastnosti:

1. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ter
4. $1 \cdot A = A$.

Definicija. ***Diagonalna matrika*** *reda m je matrika oblike*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

za $\lambda_1, ...\lambda_m \in \mathbb{R}$.

Če je A matrika reda $m \times n$ in D diagonalna matrika reda m, potem lahko izračunamo produkt DA in sicer tako, da prvo vrstico matrike A pomnožimo z λ_1, drugo z λ_2 itd. Produkt AD obstaja kadar je matrika A reda $n \times m$. Produkt AD dobimo tako, da prvi stolpec matrike A pomnožimo z λ_1, drugega z λ_2 itd.

Primer. Za

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je

$$AD = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad DA = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Definicija. *Če v matriki A zamenjamo vrstice in stolpce dobimo* **transponirano matriko** *matrike A. Transponirano matriko označimo z A^T, njeni elementi pa so*

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Primer. Za $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ je $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pri transponiranju veljajo naslednje lastnosti:

1. $(A^T)^T = A$,

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$,

3. $(AB)^T = B^T A^T$.

Definicija. *Kvadratna matrika A reda n je* ***obrnljiva*** *(oz.* ***nesingularna*****,** ***regularna****), če obstaja matrika B da velja $AB = BA = I$. Če taka matrika B obstaja je enolično določena. Rečemo ji* ***inverz*** *matrike A in jo označimo z A^{-1}, Torej $B = A^{-1}$.*

Inverz matrike ne obstaja vedno.

Primer. Matrika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ni obrnljiva. Če bi obstajala matrika B, za katero velja $AB = I$, potem bi veljalo tudi $A^2 B = A$. Ker pa je $A^2 = 0$ sledi $A = 0$, kar pa je protislovje.

Primer. Matrika

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

je obrnljiva. Res, za matriko

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

zlahka preverimo da velja $AB = BA = I$, torej $B = A^{-1}$.

Veljajo naslednje lastnosti:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Če sta matriki A in B obrnljivi, potem je obrnljiv tudi produkt AB (če ta obstaja) in velja
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

   Dokaz. Velja $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Prav tako je $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

3. Če je matrika A obrnljiva, potem je obrnljiva tudi matrika A^T in velja
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

   Dokaz. Transponirajmo enakost $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Po pravilih za transponiranje sledi $(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I^T = I$, torej $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

1.3 Determinanta kvadratne matrike

Naj bo A kvadratna matrika reda $n > 1$. Z $A(i|j)$ označimo podmatriko matrike A, ki jo dobimo tako, da v matriki A prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec.

Primer. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 7 \\ 9 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Potem je $A(1|2) = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ in $A(3|3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Definicija. Determinanta *matrike A, $\det A$, je definirana induktivno:*

1. *Za $n = 1$ je $\det A = a_{11}$.*

2. *Za $n > 1$ je $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$,*

   kjer so A_{1j} **kofaktorji** *k elementom prve vrstice. Za vsak par (i, j) je*

   $$A_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A(i|j)).$$

   Ker je $A(i|j)$ matrika reda $n - 1$, znamo $\det A(i|j)$ izračunati.

Opomba. Kadar determinanto matrike izračunamo po definiciji rečemo, da smo jo izračunali z *razvojem po prvi vrstici*.

Opomba. Kadar imamo matriko podano z elementi, lahko determinanto označimo tudi z navpičnima črtama, kot je prikazano v naslednjih primerih.

Primer. Determinanto matrike reda 2 dobimo z navzkrižnim množenjem elementov matrike,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Primer. Za matriko reda 3 imamo

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Opomba. Pri računanju determinante matrike reda 3 opazimo, da enak rezultat dobimo, če matriki na desni pripišemo prva dva stolpca matrike, zmnožimo elemente po treh diagonalah in te produkte seštejemo, nato pa od te vsote odštejemo vsoto produktov po treh vzporednih kodiagonalah. To je t.i. **Sarrusovo pravilo**, ki ga ponazorimo z naslednjim diagramom:

$$
\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

Primer. Izračunajmo determinanto matrike

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}
$$

na dva načina.

(i) Po definiciji determinante je

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1((-1)\cdot(-1)-3\cdot 1)-2(0\cdot(-1)-1\cdot 1)+1(0\cdot 3-1\cdot(-1)) = 1.
$$

(ii) Po Sarrusu je

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} &= 1(-1)(-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3 \\
&- 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 = 1.
\end{aligned}
$$

Primer. Determinanta identične matrike I je enaka 1.

Naslednje lastnosti determinante so v pomoč pri izračunu determinant (predvsem večjih) matrik:

1. Determinanto lahko izračunamo tudi z razvojem po kakšni drugi vrstici. Razvoj po i-ti vrstici je

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Dokaz. Izpustimo.

2. Če je v matriki A katera od vrstic enaka 0, je $\det A = 0$.

Dokaz. Uporabimo točko 1 in determinanto razvijemo po ničelni vrstici.

3. Če iz matrike A dobimo matriko B tako, da v matriki A eno od vrstic pomnožimo z realnim številom k, je

$$\det B = k \cdot \det A.$$

Dokaz. Recimo, da i-to vrstico matrike A pomnožimo s k (ostale elemente pa ohranimo). Tako dobljeno matriko B sedaj razvijemo po i-ti vrstici. Dobimo

$$\begin{aligned}\det B &= b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \ldots + b_{in}B_{in} \\ &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \ldots + ka_{in}A_{in} \\ &= k \det A.\end{aligned}$$

4. Če v matriki zamenjamo dve vrstici, se predznak determinante spremeni.

Dokaz. Z zamenjavo i-te in $(i+1)$-ve vrstice dobimo iz matrike A matriko B, kjer je $b_{ik} = a_{(i+1),k}$ in $b_{i+1,k} = a_{ik}$ za vsak k. Ostali elementi so nespremenjeni. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}\det B &= b_{i+1,1}B_{i+1,1} + b_{i+1,2}B_{i+1,2} + \ldots + b_{i+1,n}B_{i+1,n} \\ &= (-1)^{(i+1)+1}b_{i+1,1}\det B_{i+1|1} + \ldots + (-1)^{(i+1)+n}b_{i+1,n}\det B_{i+1|n} \\ &= (-1)^{(i+1)+1}a_{i,1}\det A_{i|1} + \ldots + (-1)^{(i+1)+n}a_{i,n}\det A_{i|n} \\ &= -(a_{i,1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}) \\ &= -\det A.\end{aligned}$$

Če zamenjamo i-to in j-to vrstico, pri tem vedno naredimo liho število menjav dveh sosednjih vrstic, zato se tudi v tem primeru predznak spremeni.

5. Če sta v matriki A dve vrstici enaki, je $\det A = 0$.

   Dokaz. Enaki vrstici med seboj zamenjamo. Po eni strani se determinanta ne spremeni, saj dobimo enako matriko. Po drugi strani pa po točki 4 determinanta spremeni predznak. To pa je možno le, če je $\det A = 0$.

6. Izraz $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$ je enak nič za $i \neq j$.

   Dokaz. Ta izraz je enak determinanti matrike, v kateri sta i-ta in j-ta vrstica enaki. Iz točke 5 sledi, da je izraz enak nič.

7. Če iz matrike A dobimo matriko B tako, da v matriki A j-to vrstico pomnožimo s številom k in to prištejemo i-ti vrstici, je $\det B = \det A$.

   Dokaz. Velja

$$
\begin{aligned}
\det B &= b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \ldots + b_{in}B_{in} \\
&= (-1)^{i+1}(a_{i1} + ka_{j1}) \det A(i|1) + \ldots + (-1)^{i+n}(a_{in} + ka_{jn}) \det A(i|n) \\
&= (a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}) + k(a_{j1}A_{i1} + \ldots + a_{jn}A_{in}) \\
&= \det A + k(a_{j1}A_{i1} + \ldots + a_{jn}A_{in}) \\
&= \det A.
\end{aligned}
$$

   Opomba. Lastnost 7 uporabimo zato, da v matriki z zaporednimi transformacijami pridelamo čim več ničel. Izračun determinante se s tem poenostavi.

8. Determinanta matrike se ne spremeni če matriko transponiramo, torej $\det A^T = \det A$.

   Dokaz. Trditev preverimo le za matrike velikosti 2:

$$
\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A^T.
$$

   Opomba. Zaradi lastnosti 8 je vseeno, ali determinanto matrike računamo z razvojem po stolpcu ali z razvojem po vrstici.

9. Če je matrika zgornje- ali spodnjetrikotna, je njena determinanta enaka produktu njenih diagonalnih elementov:

$$
\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}.
$$

Dokaz. Trditev dokažimo le za zgornjetrikotne matrike (za spodnjetrikotne matrike tedaj trditev sledi z upoštevanjem lastnosti 8). Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Z razvojem po prvem stolpcu dobimo

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \ldots \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

10. Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik,
$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Dokaz. Veljavnost trditve preverimo le za matrike reda 2. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Tedaj je
$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(AB) &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\ &\quad - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det B &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

Primer. Izračunajmo determinanto matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

na več načinov.

(i) Po Sarrusu dobimo:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ &- (-2) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 0 \cdot (-2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

(ii) Z razvojem po drugi vrstici dobimo:

$$\det A = -0(6-1) - 1(-3+2) - 1(1-4) = 4.$$

(iii) Uporabimo lastnost 7 in v matriki A pridelajmo čim več ničel. Če v prvem koraku tretji vrstici matrike A prištejemo dvakratnik prve vrstice, nato pa v drugem koraku tretji vrstici prištejemo drugo vrstico pomnoženo z -3, dobimo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 4.$$

Na zadnjem koraku smo upoštevali lastnost 9.

1.4 Adjungiranka kvadratne matrike

Spoznali bomo še eno matriko, ki jo lahko priredimo dani matriki in nam pod določenimi pogoji omogoča izračun inverza dane matrike. Rečemo ji *adjungiranka.*

Definicija. Adjungiranka matrike *A je matrika, ki ima na (i,j)-tem mestu element*

$$A_{ji} = (-1)^{i+j} \det A(j|i).$$

Označimo jo z adj$A$*. Torej,*

$$\mathrm{adj}A = ((A_{ij})_{i,j=1}^{n})^{T}.$$

Adjungiranko dane matrike torej dobimo tako, da k vsakemu elementu matrike A najprej poiščemo pripadajoči kofaktor in nato matriko kofaktorjev transponiramo.

Primer. Za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

je

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

torej je

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -7 & -7 & -7 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ -1 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Trditev. *Za poljubno matriko A velja*

$$A \cdot (\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A) \cdot A = (\det A) \cdot I.$$

Dokaz. Označimo $B = \mathrm{adj}A$ in $C = AB$. Za vsak i velja:

$$\begin{aligned} c_{ii} &= a_{i1} \cdot b_{1i} + \ldots + a_{in} \cdot b_{ni} \\ &= a_{i1} \cdot A_{i1} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} \\ &= \det A, \end{aligned}$$

saj je $B = \mathrm{adj}A$.

Za $i \neq j$ po točki 6 velja

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} \\ &= a_{i1} \cdot A_{j1} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Torej je $C = AB = (\det A) \cdot I$.

Pokažimo še drugo enakost $(\text{adj}A) \cdot A = (\det A) \cdot I)$. S transponiranjem enakosti $AB = (\det A) \cdot I$ dobimo $B^T A^T = (\det A) \cdot I$. Iz definicije sledi tudi $(\text{adj}A)^T = \text{adj}(A^T)$. Velja torej $(\text{adj}A^T)A^T = (\text{adj}A)^T A^T = (\det A) \cdot I$ za vsak A, torej tudi za A^T. Sledi $(\text{adj}A)A = (\det A) \cdot I$. $\square$

Trditev. *Kvadratna matrika A je obrnljiva (oz. nesingularna) natanko tedaj, ko je* $\det A \neq 0$. *Tedaj velja*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A.$$

Dokaz. Če je matrika A obrnljiva obstaja matrika B, da velja $AB = BA = I$. Iz lastnosti 10 sledi $(\det A)(\det B) = \det(AB) = \det I = 1$, torej $\det A \neq 0$. Po drugi strani pa velja: če je $\det A \neq 0$, potem je po prejšnji trditvi $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A$. $\square$

Primer. Za $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ je $\text{adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ker je $\det A = 1$ sledi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bolj splošno: za obrnljive matrike reda 2 velja

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Primer. Izračunajmo inverz matrike

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Imamo

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

torej

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ker je

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-5) - 1 \cdot (-1) = -9 \end{aligned}$$

sledi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{adj}A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Poglavje 2

Sistemi linearnih enačb

2.1 Splošni sistem linearnih enačb

Splošni sistem m linearnih enačb z n neznankami $x_1, \ldots, x_n$ ima obliko

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Sistem lahko zapišemo v matrični obliki kot $Ax = b$, kjer je $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ dana **matrika sistema**, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ je **vektor neznank**, vektor $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ pa dana **desna stran** sistema:

$$m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}}^{n}\right. \left.\begin{bmatrix} \\ x \\ \\ \end{bmatrix}\right\} n \;=\; \left.\begin{bmatrix} \\ b \\ \\ \end{bmatrix}\right\} m$$

Če je $b = 0$, pravimo da je sistem **homogen**, sicer je sistem **nehomogen**. Homogen sistem ima vedno vsaj eno rešitev, t.j. $x = 0$.

Včasih bomo matriko sistema skupaj z desno stranjo sistema zapisali v eni sami matriki kot

$$\tilde{A} = [A; b] .$$

Matriko $\tilde{A}$ imenujemo **razširjena matrika sistema**.

Zelo pomemben pojem pri reševanju sistemov linearnih enačb je pojem *ranga* matrike.

Definicija. **Rang** *matrike A je red največje kvadratne podmatrike A, ki ima determinanto različno od 0. Rang matrike A označimo z $r(A)$.*

Opombe.

(i) *Podmatrika* dane matrike A je poljubna matrika, ki jo iz A dobimo z izbrisom poljubnega števila vrstic in stolpcev.

(ii) Rang matrike je enak maksimalnemu številu linearno neodvisnih stolpcev (ali vrstic) matrike.

Nekaj zgledov in lastnosti ranga:

1. Rang identične matrike I reda n je enak n.

2. Rang ničelne matrike je enak nič.

3. Za poljubno matriko A reda $m \times n$ je $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

4. Če ima matrika A vsaj en element od nič različen je $r(A) \geq 1$.

5. Če matriki dodamo stolpec ali vrstico se rang matrike kvečjemu poveča.

Primer. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrika A ima red 3 torej je $r(A) \leq 3$. Ker je $\det(A) = 0$ je $r(A) \leq 2$. Ker pa je determinanta podmatrike

$$A(3|3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

različna od 0 je $r(A) = 2$.

O obstoju in številu rešitev splošnega linearnega sistema enačb govori naslednja trditev.

Trditev. *Splošni sistem m linearnih enačb z n neznankami je rešljiv natanko tedaj, ko je rang matrike sistema A enak rangu razširjene matrike $\tilde{A}$, t.j. kadar je $r(A) = r(\tilde{A})$. Če je skupni rang r enak n, ima sistem eno samo rešitev. Če pa je $r < n$, obstaja $n - r$ neznank, katerih vrednosti si lahko poljubno izberemo (oziroma jih pustimo kot parametre), druge neznanke pa se z njimi linearno izražajo in so tako natanko določene.*

Dokaz. Izpustimo. □

Primer. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -2x + y - z &= 1 \\ -x + 2y + 3z &= -1. \end{aligned}$$

Tedaj je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 2 & 3 & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Velja $r(A) \leq 3$ in $r(\tilde{A}) \leq 3$. Ker je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

je $r(A) = 3$. Tedaj je tudi $r(\tilde{A}) = 3$, saj je $3 = r(A) \leq r(\tilde{A}) \leq 3$. To pa pomeni, da je zgornji sistem enačb enolično rešljiv.

Primer. Imamo sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - z &= 2 \\ -x + z &= a, \end{aligned}$$

z $a \in \mathbb{R}$. Za katere vrednosti parametra a je sistem (enolično) rešljiv?

Trditev pove, da je sistem rešljiv natanko tedaj, ko je rang matrike sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

enak rangu razširjene matrike

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ -1 & 0 & 1 & | & a \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

in je determinanta vsaj ene podmatrike reda 2 od nič različna (denimo $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 \neq 0$), je $r(A) = 2$.

Vemo, da je $2 \leq r(\tilde{A}) \leq 3$. Kdaj je rang $\tilde{A} = 3$? To velja v primeru, ko ima vsaj ena od podmatrik reda 3 razširjene matrike neničelno determinanto. Izračunajmo determinante 3×3 podmatrik matrike $\tilde{A}$, ki vsebujejo 4. stolpec (vemo, da je $\det A = 0$). Dobimo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = -(a+2),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = -2(a+2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = -(a+2).$$

Torej:

(i) Če je $a = -2$, imajo vse 3×3 podmatrike matrike $\tilde{A}$ determinanto 0. Sledi $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3$ kar pomeni, da je sistem rešljiv, vendar rešitev ni enolična. Eno neznanko si poljubno izberemo (ali pustimo kot parameter), ostali dve sta tedaj natančno določeni. Če denimo izberemo z kot parameter je

$$\begin{aligned} x &= 2 + z \\ y &= 1 - x - z = -2z - 1. \end{aligned}$$

Dobimo torej enoparametrično družino rešitev. Za poljubno izbrano vrednost z sta tudi vrednosti x in y natančno določeni: za $z = 1$ denimo dobimo $x = 3$ in $y = -3$.

(ii) Če je $a \neq -2$, je $r(A) < r(\tilde{A})$. Trditev pove, da v tem primeru sistem ni rešljiv.

Spoznali smo, kdaj ima dan sistem linearnih enačb rešitev. Kako pa sisteme rešujemo? V določenih primerih lahko uporabimo Cramerjevo pravilo.

2.2 Cramerjevo pravilo

Cramerjevo pravilo je uporabno pri reševanju sistemov n linearnih enačb z n neznankami in sicer le v primeru ko ima sistem natanko eno rešitev. Pravilo se imenuje po švicarskem matematiku Gabrielu Cramerju (1704-1752).

Naj bo torej A kvadratna matrika reda n in naj bo $\det A \neq 0$. Vemo, da ima tedaj sistem enolično rešitev, saj je $r(A) = r(\tilde{A})$.

Rešujemo sistem enačb

$$Ax = b.$$

Ker je $\det A \neq 0$ obstaja inverz A^{-1}. Tedaj lahko obe strani enačbe pomnožimo z A^{-1} in dobimo

$$x = A^{-1}b$$

oziroma

$$x = \frac{1}{\det A}\,(\mathrm{adj}A)\,b = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} b,$$

če upoštevamo formulo za izračun inverza matrike s pomočjo adjungirane matrike. Imamo torej

$$x_j = \frac{1}{\det A}\left(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ldots + A_{nj}b_j\right).$$

Izkaže se, da j-to komponento rešitve sistema lahko izrazimo še nekoliko drugače. Označimo z A_j matriko, ki jo dobimo tako, da v matriki A j-ti stolpec zamenjamo z vektorjem b,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Izračunajmo $\det A_j$ z razvojem po j-tem stolpcu. Dobimo

$$\det A_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj},$$

torej je

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

Primer. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Imamo torej

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\det A = 3 \neq 0$, lahko uporabimo Cramerjevo pravilo. V ta namen izračunamo še

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 6 \\ \det A_2 &= \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{6}{3} = 2 \\ y &= \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Primer. Za sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 12 \end{aligned}$$

je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ in $\det A = 0$. Cramerjevega pravila ne moremo uporabiti. Zlahka preverimo, da sistem rešitve nima, saj je $r(A) = 1$ in $r(\tilde{A}) = 2$.

Primer. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Imamo torej

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -11 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -11 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2/7 \end{vmatrix} \\
&= -2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det A_1 &= \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -5 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.
\end{aligned}
$$

Podobno izračunamo še

$$\det A_2 = -2, \quad \det A_3 = -6, \quad \det A_4 = -4.$$

Rešitev sistema je torej

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2.$$

2.3 Gaussov postopek

Gaussov postopek nam omogoča hitrejše reševanje sistemov linearnih enačb, uporabljamo pa ga lahko tudi za računanje ranga in inverza dane matrike (če slednji obstaja).

Na razširjeni matriki lahko opravljamo naslednje transformacije

1. zamenjamo dve vrstici med seboj (t.j., zamenjamo vrstni red enačb),
2. zamenjamo dva stolpca (razen zadnjega (b)) med seboj (tu si moramo zapomniti, da smo s tem zamenjali spremenljivki!),
3. pomnožimo eno vrstico s poljubnim neničelnim številom (t.j., pomnožimo enačbo z neničelnim številom),
4. eno vrstico prištejemo drugi.

Vse te transformacije ohranjajo rang in prevedejo začetni sistem enačb v ekvivalenten sistem, ki ima iste rešitve kot prvotni, je pa praviloma lažje rešljiv. Cilj je prevesti matriko $\tilde{A}$ na zgornjetrikotno matriko. Iz te oblike lahko namreč na enostaven način rekurzivno (od zadaj naprej) izračunamo vse neznanke (seveda le kadar je sistem rešljiv).

Primer. Oglejmo si sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -6. \end{aligned}$$

Tedaj je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & -2 & | & 3 \\ -1 & 4 & -6 & | & -6 \end{bmatrix}.$$

Sedaj na razširjeni matriki izvajamo dovoljene transformacije (z znakom $\sim$ pa povemo, da smo sistem enačb prevedli na ekvivalenten sistem)

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & -2 & | & 3 \\ -1 & 4 & -6 & | & -6 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & -4 & | & -3 \\ 0 & 3 & -5 & | & -3 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & -4 & | & -3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ker je $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$ je sistem enolično rešljiv. Iz nove razširjene matrike razberemo $-x_3 = 0$, oziroma $x_3 = 0$. Iz druge vrstice dobimo

$$3x_2 - 4x_3 = -3$$

torej $x_2 = -1$ (saj je $x_3 = 0$). Iz prve vrstice razberemo

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

kar z upoštevanjem $x_2 = -1$ in $x_3 = 0$ pomeni $x_1 = 2$.

Primer. Za sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_3 &= -5 \end{aligned}$$

imamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Na razširjeni matriki izvedemo nekaj dovoljenih transformacij

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 5 \\ -1 & 0 & 1 & | & -5 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & -4 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sledi $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$. Eno od spremenljivk, denimo x_3, si lahko poljubno izberemo, ostali dve pa izrazimo z x_3: če je $x_3 = t$ iz druge enačbe dobimo $x_2 = -2t - 4$, iz prve pa $x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - (-2t - 4) - t = t + 5$.

Primer. Poiščimo vse rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + z &= -2 \\ 5x + 3y - 5z &= 6. \end{aligned}$$

Računamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 3 & -1 & 1 & | & -2 \\ 5 & 3 & -5 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & -7 & 10 & | & 1 \\ 0 & -7 & 10 & | & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & -7 & 10 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 10 \end{bmatrix}.$$

Iz zadnje vrstice sledi $0x + 0y + 0z = 10$, kar pomeni, da sistem nima nobene rešitve.

2.3.1 Računanje inverza s pomočjo Gaussovega postopka

Inverz dane matrike lahko izračunamo s pomočjo Gaussovega postopka na naslednji način: dani matriki A na desni strani pripišemo identično matriko primernega reda, $[A; I]$. Na tako razširjeni matriki izvedemo vrstične transformacije s ciljem, da prvotno matriko pretvorimo v identično matriko. Kar dobimo na desni strani je inverz matrike A, A^{-1}.

Primer. Poiščimo inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po prej opisanem postopku dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{6} & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{-6}{6} & \frac{15}{6} & \frac{3}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{6} & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{6} & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]$$

Torej

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 4 & -11 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Primer. Na dva načina poiščimo inverz matrike (če ta obstaja)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Izračun s pomočjo adjungirane matrike:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

torej

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Z Gaussovim postopkom dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -5 & | & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1/5 & 2/5 \\ 0 & -5 & | & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & | & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

torej

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poglavje 3

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik

V tem poglavju se bomo ukvarjali le s kvadratnimi matrikami. V množico kvadratnih matrik najprej vpeljemo relacijo *podobnosti*.

Definicija. *Matrika A je* **podobna** *matriki B, če obstaja obrnljiva matrika S, da velja $A = SBS^{-1}$.*

Podobnost je ekvivalentna relacija. Res: (i) vsaka matrika je podobna sama sebi ($S = I$), (ii) če je matrika A podobna matriki B, potem je tudi B podobna A (zamenjamo S z S^{-1}) ter (iii) če je A podobna B in B podobna C, potem je tudi A podobna C (če $A = SBS^{-1}$ in $B = TCT^{-1}$, potem je $A = (ST)C(ST)^{-1}$).

Poseben pomen imajo tiste matrike, ki so podobne diagonalni matriki.

Definicija. *Matrika A* **se da diagonalizirati**, *če je podobna neki diagonalni matriki.*

Primer. Ker je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

je matrika A podobna diagonalni matriki $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Matrika A se torej da diagonalizirati.

Kako lahko ugotovimo ali se dana matrika da diagonalizirati? Pokažimo najprej naslednjo

Trditev. *Stolpci obrnljive matrike so linearno neodvisni vektorji.*

Dokaz. Naj bo A obrnljiva matrika. Če stolpci matrike A, označimo jih z $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, niso linearno neodvisni, obstajajo taki skalarji $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (ne vsi enaki nič), da je $\lambda_1 \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$. Sledi

$$A\vec{\lambda} = \vec{0},$$

kjer je $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]^T$ in je $\vec{0}$ vektor samih ničel. Pomnožimo enakost z inverzno matriko A^{-1} in dobimo

$$(A^{-1}A)\vec{\lambda} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0},$$

oziroma

$$(I)\vec{\lambda} = \vec{\lambda} = \vec{0},$$

kar pa je v nasprotju s predpostavko, da niso vsi λ_i enaki nič. □

Denimo, da se matrika A da diagonalizirati. Potem obstaja obrnljiva matrika S da velja $A = SDS^{-1}$, kjer je

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

za neka realna števila $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Tedaj velja $AS = SD$.

Označimo z $\vec{e}_k$ vektor dimenzije n, ki ima na k-tem mestu vrednost 1 in 0 na vseh ostalih mestih. Z $\vec{s}_k$ označimo k-ti stolpec matrike S. Tedaj velja

$$AS\vec{e}_k = SD\vec{e}_k = S(\lambda_k \vec{e}_k) = \lambda_k (S\vec{e}_k),$$

torej

$$A\vec{s}_k = \lambda_k \vec{s}_k.$$

Ker je matrika S obrnljiva, so $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n$ linearno neodvisni vektorji.

Definicija. *Naj bo A kvadratna matrika reda n in $\lambda \in \mathbb{R}$. Neničelni vektor x, ki zadošča enačbi*

$$Ax = \lambda x$$

imenujemo **lastni vektor** *matrike A, število λ pa je* **lastna vrednost** *matrike A. Rečemo, da lastni vektor x pripada lastni vrednosti λ.*

Opazimo sledeče:

(i) Recimo, da lastni vektor x pripada lastni vrednosti λ. Potem je tudi vsaj večkratnik kx (za $k \neq 0$) lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ. Res,
$$A(kx) = k(Ax) = k(\lambda x) = \lambda(kx).$$

(ii) Lastni vektorji so netrivialne rešitve enačbe
$$(A - \lambda I)x = 0.$$
Če je $\det(A - \lambda I) \neq 0$, je rešitev ena sama, in sicer $x = 0$ (po Cramerjevem pravilu). Ker zahtevamo da $x \neq 0$, mora torej veljati
$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Definicija. *Matrika*
$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$
se imenuje **karakteristična matrika***, njena determinanta* $\det(A - \lambda I)$ *pa* **karakteristični polinom** *matrike A. Če je red matrike A enak n, potem je karakteristični polinom polinom stopnje n v spremenljivki λ.*

Opomba. Lastne vrednosti dane matrike A so torej ničle karakterističnega polinoma $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Ker je stopnja polinoma n, imamo vedno n lastnih vrednosti. Te niso nujno vse različne, niso pa tudi nujno vse realne.

Primer. Izračunajmo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
Karakteristični polinom matrike A je
$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 3 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4).$$
Imamo torej dve različni lastni vrednosti: $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 4$. Izračunajmo še pripadajoča lastna vektorja.

(i) Za $\lambda_1 = -1$ iščemo rešitev sistema $(A - \lambda_1 I)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x = 0.$$

Ena rešitev tega sistema (torej en lastni vektor) je

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vemo, da so rešitve tudi vsi večkratniki tega vektorja.

(ii) Za $\lambda_2 = 4$ rešujemo $(A - \lambda_2 I)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} x = 0$$

od koder dobimo

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(ter vsi večkratniki).

Trditev. *Matrika A se da diagonalizirati natanko tedaj, ko ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.*

Dokaz. Trditev ($\Rightarrow$) smo že pokazali. Dokažimo še ($\Leftarrow$): denimo da imamo n linearno neodvisnih vektorjev $s_1, \ldots, s_n$. Iz njih sestavimo obrnljivo matriko S. Pri tem velja $AS = SD$, kjer je D diagonalna matrika pripadajočih lastnih vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sledi $A = SDS^{-1}$, torej A je podobna diagonalni matriki D. $\square$

Primer. Izračunajmo lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -3 & -1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((-1-\lambda)(4-\lambda) - 6) + (-3(4-\lambda) - 6) \\ &- 2(-9 - 3(-1-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda - 16 \\ &= -(-4+\lambda)(2+\lambda)(-2+\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Lastne vrednosti matrike A so torej: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ in $\lambda_3 = 2$. Izračunajmo pripadajoče vektorje. Dobimo

(i) Za λ_1 je lastni vektor $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(ii) Za λ_2 je lastni vektor $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(iii) Lastni vektor, ki pripada λ_3 je $x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Matrika A se torej da diagonalizirati: za

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

velja $A = SDS^{-1}$.

Primer. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - 2(-1-\lambda) - 2(-1-\lambda) \\ &= (\lambda+1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 3) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-3) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3). \end{aligned}$$

Lastne vrednosti matrike A so torej $\lambda_1 = 3$ in $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Pripadajoči lastni vektorji so:

(i) $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ za λ_1,

(ii) $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ za λ_2.

Tretjega linearno neodvisnega lastnega vektorja ni, zato se A ne da diagonalizirati.

Primer. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

ima karakteristični polinom

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = ... = (\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0$$

torej so lastne vrednosti naslednje: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$. Lastni vektorji:

(i) Za $\lambda_{1,2} = -2$ dobimo

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Vse tri enačbe so ekvivalentne enačbi $x - y + z = 0$. Rešitev je torej dvoparametrična družina: če izberemo x in y kot parametra je z določen kot $z = -x + y$. To pa pomeni, da lahko dobimo dva linearno neodvisna lastna vektorja, denimo $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(ii) Za $\lambda_3 = 4$ dobimo lastni vektor $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

V tem primeru se torej matriko da diagonalizirati, čeprav ima matrika večkratno lastno vrednost. Dobimo

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Opomba. Iz teh primerov smo se naučili:

- če ima matrika same različne lastne vrednosti, se da vedno diagonalizirati (to trditev se da formalno dokazati, vendar dokaz izpustimo).
- če je katera od lastnih vrednosti večkratna, se matrika včasih da diagonalizirati, včasih pa ne.

Poglavje 4

Zgledi uporabe matrik v naravoslovju

4.1 Dinamika starostno strukturirane populacije

Kot prvi primer uporabe matrik v biologiji si poglejmo enostaven populacijski model, ki je zgrajen na naslednjih predpostavkah. Populacijo, ki je razdeljena na mladiče in odrasle opazujemo enkrat letno (v času reprodukcije, ki se zgodi ob istem času vsako leto). V populaciji veljajo naslednje zakonitosti:

(i) Vsak odrasel posameznik ima v času reprodukcije ob koncu leta b mladičev.

(ii) Mladiči se ne razmnožujejo. Prvo leto preživijo z verjetnostjo p, naslednje leto postanejo odrasli.

(iii) Odrasli preživijo leto z verjetnostjo q.

Označimo z A_n število odraslih, z J_n pa število mladičev v letu n. Iz zgornjih predpostavk torej sledi

$$
\begin{aligned}
J_{n+1} &= bA_n \\
A_{n+1} &= pJ_n + qA_n.
\end{aligned}
$$

Spreminjanje velikosti obeh skupin iz leta v leto tedaj lahko opišemo v matrični obliki kot

$$
\begin{bmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} J_n \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_n \\ A_n \end{bmatrix}.
$$

Zanima nas, kakšna je dinamika populacije ko $n \to \infty$. Da bi odgovorili na to vprašanje, si poglejmo nekaj posebnih primerov.

1. Denimo, da je $b = 6, p = 0.25, q = 0.5$. Vsak odrasel posameznik ima torej vsako sezono šest mladičev, mladič sezono preživi z verjetnostjo 0.25, odrasel pa ima verjetnost preživetja na sezono 0.5. Tedaj je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Velikost obeh skupin (mladičev in odraslih) v letu n določimo z upoštevanjem

$$\begin{bmatrix} J_n \\ A_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} J_{n-1} \\ A_{n-1} \end{bmatrix} = M^2 \begin{bmatrix} J_{n-2} \\ A_{n-2} \end{bmatrix} = ... = M^n \begin{bmatrix} J_0 \\ A_0 \end{bmatrix},$$

kjer J_0 in A_0 označujeta začetni števili mladičev in odraslih v populaciji.

Časovno dinamiko obeh skupin bomo lažje razumeli, če matriko M diagonaliziramo. Karakteristična enačba matrike M je

$$\det(M - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2} = (\lambda - \frac{3}{2})(\lambda + 1) = 0,$$

torej imamo lastni vrednosti $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ in $\lambda_2 = -1$. Zlahka preverimo, da je $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_1, medtem ko je $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_2. Tedaj je $M = SDS^{-1}$ za

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sledi $M^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1}$ kjer je

$$D^n = \begin{bmatrix} (\frac{3}{2})^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še S^{-1}. Po pravilu za izračun inverza matrike velikosti 2 dobimo

$$S^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$M^n = \underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1}) \cdots (SDS^{-1})}_{n} = SD^nS^{-1}$$
$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{3}{2})^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Torej

$$\begin{bmatrix} J_n \\ A_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} J_0 \\ A_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{3}{2})^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ A_0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} (4(\frac{3}{2})^n + 6(-1)^n)J_0 + (24(\frac{3}{2})^n - 24(-1)^n)A_0 \\ ((\frac{3}{2})^n - (-1)^n)J_0 + (6(\frac{3}{2})^n + 4(-1)^n)A_0 \end{bmatrix}.$$

Če je na začetku J_0 mladičev in A_0 odraslih, je število odraslih v n-tem letu enako

$$A_n = 0.1\Big((\frac{3}{2})^n - (-1)^n\Big)J_0 + 0.1\Big(6(\frac{3}{2})^n + 4(-1)^n\Big)A_0.$$

V sodih letih $n = 2k$ je

$$A_{2k} = 0.1\Big((\frac{3}{2})^{2k} - 1\Big)J_0 + 0.1\Big(6(\frac{3}{2})^{2k} + 4\Big)A_0,$$

medtem ko v lihih letih velja

$$A_{2k+1} = 0.1\Big((\frac{3}{2})^{2k+1} + 1\Big)J_0 + 0.1\Big(6(\frac{3}{2})^{2k+1} - 4\Big)A_0.$$

Preverimo lahko, da velja

(i) $A_{2k} \geq 0$ in $A_{2k+1} \geq 0$ za poljuben $k \in \mathbb{N}$ kadar $J_0 \geq 0$ ter $A_0 \geq 0$. Nenegativnost rešitve je pomembna, saj so le nenegativne vrednosti velikosti populacij biološko smiselne. Poleg tega velja

(ii) $\lim_{k\to\infty} A_{2k} = \infty$ in $\lim_{k\to\infty} A_{2k+1} = \infty$. Z besedami, populacija odraslih raste preko vseh meja.

Zlahka se prepričamo, da enako velja tudi za populacijo mladičev. V tem primeru populacija torej na dolgi rok preživi. Še več, ta enostavni model predvidi neomejeno rast populacije.

2. Izračune ponovite še za naslednje vrednosti parametrov: $b = 1, p = \frac{3}{16}, q = \frac{1}{2}$. Kakšni so vaši zaključki v tem primeru? Ali populacija lahko preživi?

Vprašanje. Od katerega parametra (oziroma kombinacije parametrov) je odvisno preživetje populacije?

Namig. Izačunajte vrednosti izraza $\mathcal{R}_0 = \frac{bp}{q}$ za oba primera. Kaj opazite? Kakšna je interpretacija tega parametra?

4.2 Dinamika genotipov in barv rastlin skozi generacije

Kot drugi primer si poglejmo primer uporabe matrik v genetiki.

Denimo, da je barva neke vrste rastlin določena z dvema genoma: genotip AA pomeni rdečo barvo, genotip Aa roza barvo, genotip aa pa belo barvo. Benjamin prideluje rastline vseh treh barv. Vsako rastlino oplodi z rastlino genotipa AA in jo zamenja z enim od potomcev. Ta postopek ponavlja. Benjanima zanima pričakovana porazdelitev barv rastlin skozi generacije.

Da bi odgovorili na Benjaminovo vprašanje predpostavimo, da vsak potomec naključno podeduje po en gen od vsakega od staršev.

Vpeljimo naslednje oznake. Naj bo

$$\begin{aligned} a_n &= \text{delež rastlin genotipa AA v n-ti generaciji,} \\ b_n &= \text{delež rastlin genotipa Aa v n-ti generaciji,} \\ c_n &= \text{delež rastlin genotipa aa v n-ti generaciji.} \end{aligned}$$

Vrednosti a_0, b_0, c_0 določajo začetno porazdelitev genotipov (in tako barv) v populaciji. Za vse n velja $a_n + b_n + c_n = 1$.

Ker vsak potomec naključno podeduje po en gen od vsakega od staršev lahko izpeljemo naslednje zveze za $n = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}, \\ b_n &= \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1}, \\ c_n &= 0. \end{aligned}$$

Te izraze lahko prevedemo v matrično obliko

$$x_n = M x_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

kjer je

$$x_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \ x_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sledi:

$$x_n = M x_{n-1} = M^2 x_{n-2} = \ldots = M^n x_0.$$

Časovno dinamiko genotipov (in s tem barv) v populaciji je lažje določiti, če matriko M diagonaliziramo. Lastne vrednosti matrike M dobimo kot ničle karakterističnega polinoma:

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)(-\lambda) = 0$$

za $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 0$. Pripadajoči lastni vektorji so:

(i) Za $\lambda_1 = 1$ dobimo $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(ii) Za $\lambda_2 = 1/2$ dobimo $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(iii) Za $\lambda_3 = 0$ dobimo $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Velja torej

$$M = PDP^{-1},$$

kjer je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sledi $M^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{n} = PD^nP^{-1}$ kjer je

$$D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še inverz matrike P:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Imamo torej $P^{-1} = P$ in

$$
\begin{aligned}
x_n &= M^n x_0 = P D^n P^{-1} x_0 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

oziroma

$$
\begin{aligned}
x_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n & 1-(\frac{1}{2})^{n-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - b_0/2^n - c_0/2^{n-1} \\ b_0/2^n + c_0/2^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ker velja $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, dobimo eksplicitne formule za porazdelitev genotipov (in s tem barv) skozi generacije. Za $n = 1, 2, \ldots$ velja

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 - b_0/2^n - c_0/2^{n-1} \\
b_n &= b_0/2^n + c_0/2^{n-1} \\
c_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Ker velja

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0
$$

ter $c_n = 0$ za vse $n \geq 1$, bodo torej v limiti (t.j. po vse večjem številu generacij) vse rastline genotipa AA. Z drugimi besedami, v limiti bodo vse rastline rdeče barve.

Del II

Funkcije ene ali več spremenljivk

Poglavje 1

Funkcije ene spremenljivke (ponovitev)

Za začetek ponovimo nekaj osnovnih pojmov ter glavnih izrekov o funkcijah ene spremenljivke (za bolj podrobno analizo si poglejte zapiske predavanj pri predmetu Matematika 1).

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ (kjer je $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$) je predpis, ki vsakemu elementu $x \in \mathcal{D}_f$ priredi natanko eno realno število $y \in \mathbb{R}$. To zapišemo kot $y = f(x)$. Število x je *neodvisna spremenljivka*, y pa *odvisna spremenljivka*. Množici $\mathcal{D}_f$ rečemo *definicijsko območje* funkcije f, množico vseh slik $\{f(x); x \in \mathcal{D}_f\} =: \mathcal{Z}_f$ pa imenujemo *zaloga vrednosti* funkcije f.

Definicija. *Število $L \in \mathbb{R}$ je* **limita** *funkcije f v točki a, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $0 < |x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - L| < \epsilon$. Pišemo*

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Včasih nas zanimata leva in desna limita: $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ in $\lim_{x \downarrow a} f(x)$. Ti dve limiti sta lahko različni (lahko se tudi zgodi da katera od limit ne obstaja). Če pa obe limiti obstajata in sta enaki, potem sta enaki $\lim_{x \to a} f(x)$.

Primer. (i) Naj bo $f(x) = |x|$. Tedaj je

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} |x| = \lim_{x \downarrow 0} x = 0,$$
$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} |x| = \lim_{x \uparrow 0} (-x) = 0.$$

Ker sta leva in desna limita v točki 0 enaki je $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

(ii) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Velja

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = -1.$$

Limita $\lim_{x \to 0} f(x)$ torej ne obstaja.

Naslednje lastnosti so v pomoč pri izračunu limit bolj zapletenih funkcij:

1. Velja

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

če obe limiti na desni obstajata.

2. Velja

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x)) \cdot (\lim_{x \to a} g(x)),$$

če obe limiti na desni obstajata.

3. Velja

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)},$$

če obe limiti na desni obstajata in je $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Definicija. *Funkcija f je* **zvezna v točki** $a \in \mathcal{D}_f$ *, če velja* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$*. Funkcija je* ***zvezna na intervalu*** I*, če je zvezna v vsaki točki* $a \in I$*.*

Naštejmo nekaj lastnosti zveznih funkcij:

(i) Vsota, razlika, produkt in kvocient (kjer je definiran) zveznih funkcij so zvezne funkcije.

(ii) Inverzna funkcija zvezne funkcije je zvezna funkcija.

(iii) Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.

Trditev. *Zvezna funkcija je na zaprtem intervalu $[a, b]$ omejena in zavzame tako največjo (M) kot tudi najmanjšo (m) vrednost. Funkcija zavzame tudi vsako vrednost med m in M.*

Zelo pomemben je pojem odvedljivosti funkcije.

Definicija. *Realna funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* **odvedljiva v točki** x, *če obstaja limita diferenčnega kvocienta*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

To limito imenujemo **odvod** *funkcije* f *v točki* x.

Opomba. Geometrijsko pomeni odvod $f'(x)$ tangens naklonskega kota tangente na krivuljo $y = f(x)$ v točki $(x, f(x))$.

Definicija. *Funkcija je* ***odvedljiva na intervalu*** I, *če je odvedljiva v vsaki točki* $x \in I$.

Velja naslednja

Trditev. *Če je funkcija* f *v točki* x *odvedljiva, je v tej točki tudi zvezna. Obratno ne velja: zvezna funkcija ni nujno odvedljiva.*

Primer. Funkcija $f(x) = |x|$ v točki 0 ni odvedljiva. Ker je

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h \geq 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases},$$

sledi

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{|h|}{h} = -1, \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1.$$

To pa pomeni da $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ ne obstaja.

Pri odvajanju veljajo naslednja pravila:

1. Za vsako konstanto C je $C' = 0$,
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
3. $(fg)' = f'g + fg'$. V posebnem primeru za vsako konstanto C velja $(Cf)' = Cf'$,
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,
5. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Primer. (i) Za $f(x) = (2x^2 + x^3)^5$ je $f' = 5(2x^2 + x^3)^4(4x + 3x^2)$.

(ii) Za $y = f(g(x))$ z $f(x) = 2x^2 + x$ in $g(x) = x^3$ je $y' = 3(4x^3 + 1)x^2$.

Odvodi elementarnih funkcij:

(i) $(x^n)' = nx^{n-1}$,

(ii) $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$,

(iii) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ (saj je $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$),

(iv) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ ter $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$,

(v) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ter $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Uporaba odvodov. Odvod lahko uporabljamo za iskanje ekstremov dane funkcije, kot tudi ugotavljanja padanja oz. naraščanja dane funkcije.

Definicija. *(i) Funkcija f je v točki x_0* **strogo naraščajoča**, *če za vse dovolj majhne $h > 0$ velja $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$.*

(ii) Funkcija f je v točki x_0 **naraščajoča**, *če za vse dovolj majhne $h > 0$ velja $f(x_0 - h) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + h)$.*

(iii) Funkcija f je v točki x_0 **strogo padajoča**, *če za vse dovolj majhne $h > 0$ velja: $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.*

(iv) Funkcija f je v točki x_0 **padajoča**, *če za vse dovolj majhne $h > 0$ velja: $f(x_0 - h) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + h)$.*

(v) Funkcija f je ***(strogo) naraščajoča na intervalu*** *I, če je (strogo) naraščajoča v vsaki točki $x_0 \in I$.*

(vi) Funkcija f je ***(strogo) padajoča na intervalu*** *I če je (strogo) padajoča v vsaki točki $x_0 \in I$.*

Padanje oz. naraščanje funkcije v dani točki lahko razberemo s pomočjo odvoda funkcije v tej točki.

Trditev. *(i) Če v točki x_0 velja $f'(x_0) > 0$, potem je f v točki x_0 strogo naraščajoča.*

(ii) Če v točki x_0 velja $f'(x_0) < 0$, potem je f v točki x_0 strogo padajoča.

Definicija. *(i) Funkcija f ima v točki x_0* **lokalni maksimum**, *če za vsak dovolj majhen $h > 0$ velja $f(x_0) \geq f(x_0 \pm h)$.*

(ii) *Funkcija f ima v točki x_0* **lokalni minimum***, če za vsak dovolj majhen $h > 0$ velja $f(x_0) \leq f(x_0 \pm h)$.*

Trditev. *Če je funkcija f odvedljiva v točki x_0 in ima v x_0 lokalni ekstrem (minimum ali maksimum), velja $f'(x_0) = 0$.*

Točkam, kjer velja $f'(x_0) = 0$, pravimo **stacionarne točke**. Vsak lokalni ekstrem je stacionarna točka. Obratno ni nujno res: funkcija $y(x) = x^3$ ima v točki $x = 0$ stacionarno točko, ekstrema pa v tej točki ni.

Kako vemo, ali je v neki stacionarni točki lokalni ekstrem ali ne? Velja

Trditev. *Naj bo f zvezna in odvedljiva na I, točka $x_0 \in I$ pa naj bo stacionarna točka funkcije f. Če v majhni okolici x_0 velja*

(i) $f'(x) < 0$ *za* $x < x_0$ *in* $f'(x) > 0$ *za* $x > x_0$ *sledi da je* x_0 *je lokalni minimum,*

(ii) $f'(x) > 0$ *za* $x < x_0$ *in* $f'(x) < 0$ *za* $x > x_0$ *sledi da je* x_0 *je lokalni maksimum,*

(iii) $f'(x) > 0$ *za* $x < x_0$ *in* $f'(x) > 0$ *za* $x > x_0$ *to pomeni da v* x_0 *ni ekstrema, funkcija f je v x_0 strogo naraščajoča,*

(iv) $f'(x) < 0$ *za* $x < x_0$ *in* $f'(x) < 0$ *za* $x > x_0$ *to pomeni da v* x_0 *ni ekstrema, funkcija f je v x_0 strogo padajoča.*

Če je funkcija dvakrat odvedljiva lahko s pomočjo drugega odvoda ugotovimo ali je v neki stacionarni točki lokalni ekstrem ali ne.

Trditev. *Če je f na intervalu I dvakrat zvezno odvedljiva in je $x_0 \in I$ stacionarna točka (t.j. $f'(x_0) = 0$), velja:*

(i) *če je* $f''(x_0) < 0$ *je v* x_0 *je lokalni maksimum,*

(ii) *če je* $f''(x_0) > 0$ *je v* x_0 *je lokalni minimum,*

(iii) *če je* $f''(x_0) = 0$*, potem na podlagi drugega odvoda ne moremo odločiti ali je v x_0 ekstrem ali ne.*

Poglavje 2

Funkcije več spremenljivk

2.1 Osnovni pojmi

Pri praktičnih problemih pogosto naletimo na funkcije, oziroma količine, ki so odvisne od več kot ene spremenljivke. Navedimo le nekaj primerov:

(i) Ploščina pravokotnika je odvisna od dveh spremenljivk, t.j., od dolžine obeh stranic.

(ii) Prostornina kvadra je odvisna od treh spremenljivk.

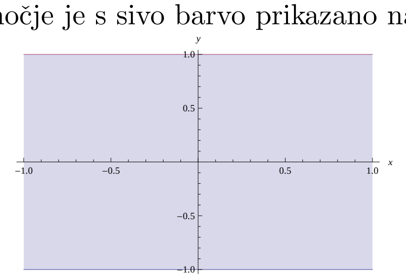
Tako kot pri funkcijah ene spremenljivke je tudi tu funkcija f predpis, ki vsakemu elementu definicijskega območja $\mathcal{D}_f$ (za funkcijo n spremenljivk je to podmnožica v $\mathbb{R}^n$) priredi natanko en element v $\mathbb{R}$, torej

$$f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ je podmnožica v $\mathbb{R}$.

Primer. Določimo definicijsko območje ter zalogo vrednosti za naslednje funkcije.

(i) Naj bo $f(x, y) = x + y$ pri čemer $-1 \leq x \leq 1$ in -1 $\leq y \leq 1$. Tedaj je $\mathcal{D}_f = [-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{Z}_f = [-2, 2]$.
Definicijsko območje je s sivo barvo prikazano na naslednji sliki:



(ii) Naj bo $f(x,y) = \ln\left(y - 4x^2 + 1\right)$. Definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ je največja množica, na kateri ima izraz $f(x,y)$ smisel, torej

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y - 4x^2 + 1 > 0\}.$$

Zaloga vrednosti je $\mathcal{Z}_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

(iii) Za $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ je

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

in $\mathcal{Z}_f = [0,1]$.

(iv) Za $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$.

Funkcijo dveh spremenljivk $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lahko geometrijsko predstavimo z njenim **grafom**

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y))\ ;\ (x,y) \in \mathcal{D}_f\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3\,.$$

Graf običajno lahko predstavimo kot ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$. Pravokotna projekcija te ploskve na ravnino $z = 0$ je definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ funkcije f, medtem ko je pravokotna projekcija na os z njena zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$.

Primer. (i) Za $f(x,y) = 1 - x - y$ je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$. Graf funkcije f je množica točk, ki ustreza enačbi $x + y + z = 1$, torej ravnina z normalo $\vec{n} = (1,1,1)$.

(ii) Za $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ je $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 9\}$ in $\mathcal{Z}_f = [0,3]$. Graf funkcije f je zgornja polovica sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Funkcijo dveh spremenljivk lahko grafično ponazorimo tudi s pomočjo *nivojnic*.

Definicija. *Naj bo $a \in \mathcal{Z}_f$ število iz zaloge vrednosti funkcije $f(x,y)$. Definirajmo*

$$N_a = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f\,;\, f(x,y) = a\}.$$

Tej množici pravimo **nivojnica** *funkcije f pri vrednosti a.*

Nivojnica torej povezuje točke na isti višini. Vsaka točka $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ leži na natanko eni nivojnici, družina vseh nivojnic pa zapolni celotno množico $\mathcal{D}_f$, ko a preteče vse vrednosti v $\mathcal{Z}_f$.

Primer. Vrnimo se k funkciji $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Za vsak $a \in \mathcal{Z}_f = [0,3]$ imamo nivojnico

$$N_a = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f\,;\, x^2+y^2 = 9-a^2\}.$$

Nivojnice so v tem primeru torej krožnice.

Graf funkcije treh spremenljivk $\Gamma_f = \{(x,y,z,f(x,y,z));\, (x,y,z) \in \mathcal{D}_f\}$ je podmnožica v $\mathbb{R}^4$. Tega seveda ne moremo narisati, lahko pa ga geometrijsko predstavimo s pomočjo nivojnic

$$N_a = \{(x,y,z) \in \mathcal{D}_f\,;\, f(x,y,z) = a\}.$$

Nivojnice so v tem primeru podmnožice $\mathbb{R}^3$.

2.2 Limita in zveznost funkcij več spremenljivk

Da bi lahko govorili o zveznosti funkcij več spremenljivk najprej potrebujemo pojem *razdalje*.

Definicija. Razdalja *med točkama* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ *in* $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ *je preslikava* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definirana z*

$$d((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)) := \sqrt{(a_1-b_1)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}.$$

Primer. (i) Za $n=1$ je $d(a,b) = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$.

(ii) Za $n=2$ je $d((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$.

Osredotočimo se najprej na funkcije dveh spremenljivk.

Definicija. *Število* L *je* **limita** *funkcije* $f(x,y)$ *v točki* (x_0,y_0)*, če za vsak* $\epsilon > 0$ *obstaja tak* $\delta > 0$*, da iz* $d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta$ *sledi* $|f(x,y)-L| < \epsilon$. *Pišemo*

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Posplošitev za funkcije n spremenljivk se glasi: L je limita funkcije $f(x_1,\ldots,x_n)$ v točki $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz dejstva

$$d((x_1,\ldots,x_n),(a_1,\ldots,a_n)) < \delta$$

sledi

$$|f(x_1,\ldots,x_n) - L| < \epsilon.$$

Pišemo $L = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ kjer je $\vec{x} := (x_1,\ldots,x_n)$.

Primer. Naj bo
$$f(x,y) = \frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Po definiciji preverimo, da je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Eden izmed načinov, ki pogosto deluje pri izračunu limite funkcije dveh spremenljivk, je uvedba polarnih koordinat. Pišemo
$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$
Tedaj je
$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^4\cos\varphi\sin^3\varphi}{r\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}} = r^3\cos\varphi\sin^3\varphi.$$
Pokazati želimo, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da iz dejstva $d((x,y),(0,0)) < \delta$ sledi $|f(x,y) - 0| < \epsilon$. Imamo
$$d((x,y),(0,0)) = \sqrt{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = r.$$
Če sedaj izberemo $\delta := \sqrt[3]{\epsilon}$, potem res velja, da je
$$|f(x,y) - 0| = |r^3\cos\varphi\sin^3\varphi| \le r^3 < \delta^3 = (\sqrt[3]{\epsilon})^3 = \epsilon.$$

Limito lahko izračunamo tudi na bolj direkten način: ker je namreč $(x,y)\to(0,0)$ ekvivalentno $r\to 0$ takoj sledi
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^3\cos\varphi\sin^3\varphi = 0.$$

Limiti $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ rečemo tudi **dvojna limita**. Obstaja pa tudi pojem **dvakratne limite**. Imamo dve dvakratni limiti:
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad \text{ter} \\ &\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y). \end{aligned}$$
Velja naslednje:

(i) Če obstaja dvojna limita, obstajata tudi dvakratni limiti in so vse tri limite med seboj enake.

(ii) Iz obstoja in enakosti dvakratnih limit ne moremo sklepati, da obstaja dvojna limita. Zagotovo pa dvojna limita ne obstaja kadar sta dvakratni limiti različni (ali kadar katera izmed dvakratnih limit ne obstaja).

Primer. Za naslednje funkcije izračunajmo

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y),$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

in

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

če le te obstajajo.

(i) Za $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0} 1=1,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=\lim_{y\to 0} -1=-1.$$

Ker sta dvakratni limiti različni $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne obstaja.

(ii) Za $f(x,y)=\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ je

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=0$$

(pri tem smo štirikrat uporabili L'Hospitalovo pravilo za računanje limit). Z L'Hospitalovim pravilom dobimo še

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^4}=0.$$

V tem primeru dvakratni limiti obstajata in sta enaki. To je potreben pogoj za obstoj dvojne limite, vendar še ne zagotavlja da dvojna limita obstaja.

Poglejmo, ali v tem primeru dvojna limita obstaja. Z uporabo polarnih koordinat $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dobimo

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^4} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{r} \\ &= \begin{cases} \infty, & \varphi \neq \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{N}) \\ 0, & \varphi = \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{N}) \end{cases}\end{aligned}$$

(enakost $\lim_{r\to 0} \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{r} = 0$, če je $\varphi = k\frac{\pi}{2}$, spet dobimo z L'Hospitalovim pravilom). Dvojna limita torej ne obstaja.

(iii) Za $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ je

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

in

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

(tu smo spet uporabili L'Hospitalovo pravilo).

Velja tudi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^2\varphi\sin^3\varphi}{r^4} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\varphi\sin^3\varphi = 0.$$

V tem primeru torej dvojna limita obstaja in je enaka obema dvakratnima limitama.

Pri funkcijah ene spremenljivke smo spoznali, da sta pojma limite funkcije in zveznosti funkcije v neki točki tesno povezana. Podobno velja tudi za funkcije več spremenljivk.

Definicija. *Funkcija n spremenljivk* $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *je* **zvezna** *v točki* $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, *če za vsak* $\epsilon > 0$ *obstaja tak* $\delta > 0$, *da za vsak* $(x_1, \ldots, x_n)$, *za katerega velja*

$$d((x_1, \ldots, x_n), (a_1, \ldots, a_n)) < \delta$$

sledi

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)| < \epsilon.$$

Velja naslednja

Trditev. *Funkcija* $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *je v točki* $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *zvezna natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Primer. (i) Dana je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ali je funkcija f zvezna v točki $(0,0)$?

Uporabimo polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Za $(x,y) \neq (0,0)$ je

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^2} \\ &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Sledi

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |\cos 2\varphi - 0| = |\cos 2\varphi|.$$

Za $(x,y) \to (0,0)$ (kar je ekvivalentno $r \to 0$) bi moralo veljati $|\cos 2\varphi| \to 0$. To pa ni nujno res. Izraz $|\cos 2\varphi|$ namreč lahko zavzame poljubno vrednost med 0 in 1. Funkcija f torej ni zvezna v točki $(0,0)$.

(ii) Pokažimo, da je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

zvezna v točki $(0,0)$.

Zopet uporabimo polarne koordinate in zapišemo

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2} = r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Velja $|f(x,y) - f(0,0)| = |r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi| \leq r^2$. Če gre $(x,y) \to (0,0)$ (kar je ekvivalentno $r \to 0$), velja tudi $|f(x,y) - f(0,0)| \leq r^2 \to 0$. Funkcija je torej zvezna v točki $(0,0)$.

(iii) Ali je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x+y)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

zvezna v točki $(0,0)$?

Izračunajmo limito $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Z uporabo polarnih koordinat ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$) dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi(r\cos\varphi + r\sin\varphi)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} 2r\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ &= 0 = f(0,0). \end{aligned}$$

Funkcija f je torej zvezna v točki $(0,0)$.

2.3 Parcialni odvodi

Pojem parcialnih odvodov najprej spoznajmo za funkcije dveh spremenljivk.

Definicija. *Za funkcijo dveh spremenljivk* $f(x,y)$ *je* **parcialni odvod po spremenljivki x** *definiran kot*

$$f_x(x,y) := \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Parcialni odvod funkcije po spremenljivki y *je definiran kot*

$$f_y(x,y) := \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} := \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}.$$

Velja torej:

(i) Pri računanju parcialnega odvoda na x obravnavamo y kot konstanto.

(ii) Pri računanju parcialnega odvoda na y obravnavamo x kot konstanto.

Primer. Izračunajmo oba parcialna odvoda za funkcijo

$$f(x,y) = x^3 + 7x^2y + 3e^x - 12y.$$

Dobimo $f_x(x,y) = 3x^2 + 14xy + 3e^x$ in $f_y(x,y) = 7x^2 - 12$.

Primer. Dana je funkcija $f(x,y) = 2\sin y - \sin x$. Pokažimo, da f zadošča enačbi

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cos x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos y = \cos x \cos y.$$

Velja

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2\cos y\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= -\cos x\end{aligned}$$

Sledi

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cos x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos y = 2\cos y\cos x - \cos x\cos y = \cos x\cos y.$$

Definicija. *Funkcija f je* **parcialno odvedljiva** *na množici $D \subseteq \mathbb{R}^2$, če je parcialno odvedljiva (po obeh spremenljivkah) v vsaki točki iz D.*

Podobno definiramo parcialne odvode za funkcije n spremenljivk.

Definicija. Parcialni odvod funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ po spremenljivki $\mathbf{x_i}$ *je definiran kot*

$$\begin{aligned}f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n) &:= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)\\ &:= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)}{h}.\end{aligned}$$

Za vsako od n spremenljivk x_i tedaj velja, da pri izračunu parcialnega odvoda funkcije na x_i vse ostale spremenljivke obravnavamo kot konstante.

Primer. Za $f(x,y,z) = zx^3\ln y$ imamo tri parcialne odvode

$$\begin{aligned}f_x(x,y,z) &= 3x^2z\ln y\\ f_y(x,y,z) &= \frac{zx^3}{y}\\ f_z(x,y,z) &= x^3\ln y.\end{aligned}$$

Definicija. *Vektor vseh parcialnih odvodov funkcije f imenujemo* **gradient** *funkcije f:*

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Včasih uporabimo za $\mathrm{grad} f$ *tudi oznako ∇f.*

Primer. (i) $\mathrm{grad}(x + 2y + 3z) = (1, 2, 3)$

(ii) $\mathrm{grad}(zx^3 \ln y) = \Big(3x^2 z \ln y, \frac{zx^3}{y}, x^3 \ln y\Big)$.

Opomba. Gradient v izbrani točki je vektor, ki kaže v smeri največjega naraščanja funkcije v tej točki.

Odvod funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ po spremenljivki x_i je v resnici odvod v smeri vektorja $\vec{e_i} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (t.j., vektorja, ki ima 1 na i-tem mestu in ničle na vseh ostalih mestih). Funkcijo lahko parcialno odvajamo tudi v drugih smereh.

Definicija. *Naj bo f funkcija n spremenljivk, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ in $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$* enotski *vektor (t.j., vektor dolžine 1).* **Odvod funkcije f v smeri vektorja** $\vec{v}$ *je definiran kot*

$$f'_{\vec{v}}(\vec{x}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + h \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{h}.$$

Odvod v smeri vektorja $\vec{v}$ pove, kako hitro se funkcija f spreminja v smeri $\vec{v}$. Velja naslednja

Trditev. *Za vsak enotski vektor $\vec{v}$ velja*

$$f'_{\vec{v}}(\vec{x}) = (\mathrm{grad} f(\vec{x})) \cdot \vec{v}.$$

Opomba. Desna stran $(\mathrm{grad} f(\vec{x})) \cdot \vec{v}$ označuje *skalarni produkt* vektorjev $\mathrm{grad} f(\vec{x})$ in $\vec{v}$. Spomnimo se: za $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ in $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ je skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

Primer. Izračunajmo odvod funkcije $f(x, y) = x^2 + xy$ v točki $(1, 1)$ v smeri vektorja $\vec{v} = (2, 1)$.

Imamo $\mathrm{grad} f(x, y) = (2x + y, y)$. Vektor $\vec{v}$ je potrebno normirati: ker je $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ uporabimo enotski vektor

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Sledi

$$f'_{(2,1)}(1, 1) = (2 \cdot 1 + 1, 1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (3, 1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Primer. Izračunajmo odvod funkcije $f(x,y) = \sin x \sin y$ v točki $(1,1)$ v smeri $(0,1)$ in v točki $(0,0)$ v smeri $(3,4)$.

Imamo $\mathrm{grad} f(x,y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y)$. Sledi

$$f'_{(0,1)}(1,1) = \mathrm{grad} f(1,1) \cdot (0,1) = (\cos 1 \sin 1, \sin 1 \cos 1) \cdot (0,1) = \sin 1 \cos 1$$

in

$$\begin{aligned} f'_{(3,4)}(0,0) &= \mathrm{grad} f(0,0) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}, \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} \right) \\ &= (\cos 0 \sin 0, \sin 0 \cos 0) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Primer. Naj bo dana funkcija $f(x,y) = \sqrt{x+y-xy}$. Izračunajmo odvod funkcije f v točki $T(1,0)$ v poljubni smeri. V kateri smeri je ta odvod največji?

Za dano funkcijo je

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \left(\frac{1}{2} \frac{1-y}{\sqrt{x+y-xy}}, \frac{1}{2} \frac{1-x}{\sqrt{x+y-xy}} \right),$$

torej

$$\mathrm{grad} f(1,0) = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{2} \frac{0}{\sqrt{1}} \right) = (\frac{1}{2}, 0).$$

Izračunajmo odvod v smeri poljubnega enotskega vektorja (a,b). Dobimo

$$f'_{(a,b)}(1,0) = \mathrm{grad} f(1,0) \cdot (a,b) = (\frac{1}{2}, 0) \cdot (a,b) = \frac{1}{2} a.$$

Ta odvod bo največji za $(a,b) = (1,0)$. Odvod je torej največji v smeri vektorja $(1,0)$ (t.j. v smeri gradienta).

2.4 Višji parcialni odvodi

Začnimo spet s funkcijami dveh spremenljivk. Parcialna odvoda funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ sta spet funkciji dveh spremenljivk $f_x(x,y)$ in $f_y(x,y)$. Če sta tudi ti dve funkciji parcialno odvedljivi, imenujemo njune parcialne odvode **parcialni odvodi drugega reda**. Parcialni odvodi drugega reda so štirje:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\
f_{xy}(x,y) &= (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\\
f_{yx}(x,y) &= (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\\
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}
$$

Splošno. Funkcija n spremenljivk $f(x_1,\ldots,x_n)$ ima n^2 parcialnih odvodov drugega reda:

$$
f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad , \quad 1 \le i,j \le n.
$$

Primer. Izračunajmo parcialne odvode drugega reda funkcije $f(x,y) = x^3 + 7x^2y + 3x - 2y$. Dobimo

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 3x^2 + 14xy + 3,\\
f_y(x,y) &= 7x^2 - 2,\\
f_{xx}(x,y) &= 6x + 14y,\\
f_{xy}(x,y) &= 14x,\\
f_{yx}(x,y) &= 14x,\\
f_{yy}(x,y) &= 0.
\end{aligned}
$$

Primer. Izračunajmo vseh devet parcialnih odvodov drugega reda funkcije $f(x,y,z) = zx^3 \ln y$. Dobimo

$$
\begin{array}{lll}
f_x = 3x^2 z \ln y, & f_y = \dfrac{zx^3}{y}, & f_z = x^3 \ln y,\\[2ex]
f_{xx} = 6xz \ln y, & f_{xy} = \dfrac{3x^2 z}{y}, & f_{xz} = 3x^2 \ln y,\\[2ex]
f_{yx} = \dfrac{3x^2 z}{y}, & f_{yy} = -\dfrac{zx^3}{y^2}, & f_{yz} = \dfrac{x^3}{y},\\[2ex]
f_{zx} = 3x^2 \ln y, & f_{zy} = \dfrac{x^3}{y}, & f_{zz} = 0.
\end{array}
$$

V obeh primerih opazimo, da so mešani parcialni odvodi enaki, denimo: $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$. To v splošnem ne velja. Velja pa naslednja

Trditev. *Če druga parcialna odvoda $f_{xy}(x,y)$ in $f_{yx}(x,y)$ funkcije $f(x,y)$ obstajata in sta zvezni funkciji, potem sta enaka.*

Če druge parcialne odvode odvajamo še naprej, dobimo parcialne odvode tretjega reda in parcialne odvode **višjih redov**. Denimo,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} \quad \text{oziroma} \quad f_{zxy}.$$

Tudi mešani odvodi višjega reda so neodvisni od vrstnega reda odvajanja, če so zvezni.

Primer. Pokažimo, da funkcija $U(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ ustreza t.i. Laplaceovi enačbi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} 2x = -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2},\\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} 2y = -y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2},\\
\frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} 2z = -z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}
\end{aligned}$$

Drugi parcialni odvodi so:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right)\\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + (-x)\cdot(-\frac{3}{2})\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}\cdot 2x\\
&= \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}.
\end{aligned}$$

Zaradi simetrije velja še:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \frac{2x^2-y^2-z^2+2y^2-x^2-z^2+2z^2-x^2-y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.5 Diferenciabilne funkcije in totalni diferencial

Definicija. *Funkcija dveh spremenljivk $f(x, y)$ je v točki (a, b)* **diferenciabilna***, če obstajata konstanti A in B, da je*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) = 0.$$

Izraz $df := Ah + Bk$ imenujemo **totalni diferencial***.*

Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke: $dx = h$, $dy = k$. Totalni diferencial torej lahko zapišemo tudi kot $df = Adx + Bdy$.

Trditev. *Naj bo $f(x, y)$ diferenciabilna v točki (a, b). Potem je $f(x, y)$ v točki (a, b) zvezna.*

Trditev. *Naj bo $f(x, y)$ diferenciabilna v točki (a, b) s totalnim diferencialom $df = Ah + Bk$. Potem obstajata oba parcialna odvoda in velja*

$$f_x(a, b) = A \quad \textit{in} \quad f_y(a, b) = B.$$

Primer. (i) Totalni diferencial funkcije $f(x, y) = x^2 + xy^3 + \cos(xy)$ je

$$df = (2x + y^3 - \sin(xy)y)dx + (3xy^2 - \sin(xy)x)dy.$$

(ii) Totalni diferencial funkcije $f(u, v) = e^{u+5v} + \ln(uv^2)$ je

$$df = (e^{u+5v} + \frac{1}{uv^2} \cdot v^2)du + (5e^{u+5v} + \frac{1}{uv^2} \cdot 2uv)dv.$$

Predpostavimo sedaj, da je funkcija $f(x, y)$ diferenciabilna v točki (a, b). Potem je

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = (Ah + Bk) + \alpha\sqrt{h^2 + k^2},$$

kjer gre $\alpha \to 0$, ko gre $(h, k) \to (0, 0)$. Spremembo funkcijske vrednosti

$$f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

lahko torej dobro aproksimiramo s totalnim diferencialom $Ah + Bk$. Vrednost $f(a + h, b + k)$ ocenimo z linearnim izrazom:

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k = f(a, b) + df.$$

Zvezo

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + df$$

imenujemo tudi **izrek o diferencialu**.

Primer. Izračunajmo približno vrednost $\sqrt{5.98^2 + 8.01^2}$.

Naj bo $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Potem je

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_x(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} f(5.98, 8.01) &= f(6-0.02, 8+0.01) \\ &\approx f(6,8) + f_x(6,8)\cdot(-0.02) + f_y(6,8)\cdot 0.01 \\ &= 10 + \frac{6\cdot(-0.02)}{10} + \frac{8\cdot 0.01}{10} \\ &= 10 - \frac{0.04}{10} \\ &= 9.996. \end{aligned}$$

Točen rezultat na pet decimalnih mest je 9.99602.

Če na izraz $f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k$ gledamo kot na funkcijo spremenljivk h in k, dobimo enačbo *tangentne ravnine*

$$z(a+h, b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k = C + Ah + Bk.$$

Naj bo $x = a+h$ in $y = b+k$. Tedaj dobimo

$$z(x,y) = C + A(x-a) + B(y-b) = C + Ax - Aa + By - Bb.$$

Enačba tangentne ravnine funkcije f v točki $(a, b, f(a,b))$ je torej

$$z(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y,$$

kjer je

$$\begin{aligned} &\alpha = f(a,b) - f_x(a,b)a - f_y(a,b)b, \\ &\beta = f_x(a,b), \\ &\gamma = f_y(a,b). \end{aligned}$$

Primer. Zapišimo enačbo tangentne ravnine na graf funkcije $f(x,y) = 10x^2y - 7y^2$ v točki $(4,-5)$. Imamo

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 20xy, & f_x(4,-5) &= -400 \\ f_y(x,y) &= 10x^2 - 14y, & f_y(4,-5) &= 230 \\ f(4,-5) &= -975 \end{aligned}$$

Sledi
$$\alpha = f(4,-5) - f_x(4,-5)\cdot 4 - f_y(4,-5)\cdot(-5) = 1775.$$
Enačba tangetne ravnine je torej $z(x,y) = 1775 - 400x + 230y$ oziroma $400x - 230y + z - 1775 = 0$.

Če parcialna odvoda neke funkcije dveh spremenljivk v dani točki obstajata še ne pomeni, da je funkcija v tej točki tudi diferenciabilna. Velja pa naslednja

Trditev. *Zvezna funkcija $f(x,y)$ je diferenciabilna, če sta parcialna odvoda $f_x(x,y)$ in $f_y(x,y)$ zvezna.*

2.6 Ekstremi funkcij več spremenljivk

Lokalne ekstreme funkcij dveh spremenljivk definiramo podobno kot lokalne ekstreme funkcij ene spremenljivke:

(i) Funkcija dveh spremenljivk $f(x,y)$ ima v točki (a,b) **lokalni maksimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(a+h,b+k) \leq f(a,b)$ za vsak par (h,k), ki zadošča pogoju $h^2+k^2 < \delta^2$.

(ii) Funkcija $f(x,y)$ ima v točki (a,b) **lokalni minimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(a+h,b+k) \geq f(a,b)$ za vsak par (h,k), ki zadošča pogoju $h^2+k^2 < \delta^2$.

Bolj splošno, za funkcije več spremenljivk, lahko zapišemo:

(i) Funkcija $f(x_1,\ldots,x_n)$ ima v točki $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ **lokalni maksimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) = f(a_1+h_1, a_2+h_2,\ldots,a_n+h_n) - f(a_1,\ldots,a_n) \leq 0$ za vsak $\vec{h} = (h_1,\ldots,h_n)$, ki zadošča pogoju $h_1^2+\ldots+h_n^2 < \delta^2$.

(ii) Če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) \geq 0$ za vsak $\vec{h}$, ki zadošča pogoju $h_1^2+\ldots+h_n^2 < \delta^2$, potem rečemo, da ima funkcija $f(\vec{x})$ v točki $\vec{a}$ **lokalni minimum**.

Primer. (i) Funkcija $f(x,y) = |x|+|y|$ ima lokalni in globalni minimum v točki $(0,0)$, saj je povsod drugje pozitivna.

(ii) Funkcija $f(x,y) = x^3y^3$ v točki $(0,0)$ nima lokalnega ekstrema, ker so poljubno blizu točke $(0,0)$ tako točke, v katerih je f pozitivna, kot tudi točke, v katerih je f negativna.

Definicija. *Naj bo f funkcija dveh spremenljivk. Točko (a,b), ki zadošča pogojema*

$$f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$$

imenujemo **stacionarna** *(oz.* kritična*) točka funkcije $f(x,y)$.*

Stacionarne točke diferenciabilne funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ so torej rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0 \\ f_y(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Velja:

(i) Če ima diferenciabilna funkcija $f(x,y)$ v točki (a,b) lokalni ekstrem (minimum ali maksimum), potem je (a,b) stacionarna točka funkcije f.

(ii) Stacionarna točka funkcije f ni nujno lokalni ekstremi funkcije f (npr.: točka $(0,0)$ je stacionarna točka funkcije $f(x,y) = x^3y^3$, ni pa lokalni ekstrem).

Bolj splošno za funkcije n spremenljivk definiramo: točka $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ je *stacionarna točka* funkcije n spremenljivk $f(x_1,\ldots,x_n)$, če so vsi parcialni odvodi v tej točki enaki nič, t.j.,

$$f_{x_1}(\vec{a}) = f_{x_2}(\vec{a}) = \ldots f_{x_n}(\vec{a}) = 0.$$

Vrnimo se k funkcijam dveh spremenljivk. Kadar je funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva, lahko s pomočjo drugih parcialnih odvodov povemo, ali v stacionarni točki nastopi ekstrem (kot tudi ali gre za minimum ali maksimum). Velja

Trditev. *Naj bo (a,b) stacionarna točka dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f(x,y)$ in naj bo*

$$A = f_{xx}(a,b), \quad B = f_{xy}(a,b), \quad C = f_{yy}(a,b).$$

Potem velja:

1. Če je $\Delta := AC - B^2 > 0$, je v točki (a,b) lokalni ekstrem in velja

(i) če je $A < 0$, potem je v (a,b) lokalni maksimum,

(ii) če je $A > 0$, potem je v (a,b) lokalni minimum.

2. Če je $\Delta = AC - B^2 < 0$, potem v točki (a,b) funkcija nima lokalnega ekstrema.

3. Če je $\Delta = AC - B^2 = 0$, potem na podlagi drugih parcialnih odvodov ne moremo sklepati ali je v točki (a,b) lokalni ekstrem.

Opomba. Matriko drugih parcialnih odvodov

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

imenujemo **Hessejeva matrika**. Velja $\Delta = \det H$.

Primer. Določimo lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$.

Izračunajmo najprej stacionarne točke. Imamo

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y - \frac{4}{x^2} \\ f_y(x,y) &= x - \frac{2}{y^2}. \end{aligned}$$

Sistem $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ se glasi

$$y = \frac{4}{x^2}, \quad x = \frac{2}{y^2}.$$

Edina neničelna rešitev sistema (oziroma stacionarna točka) je točka $(2,1)$.

Izračunajmo sedaj parcialne odvode drugega reda:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{8}{x^3}, & A &= f_{xx}(2,1) = 1 \\ f_{xy}(x,y) &= 1, & B &= f_{xy}(2,1) = 1 \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{4}{y^3}, & C &= f_{yy}(2,1) = 4. \end{aligned}$$

Hessejeva matrika v stacionarni točki je torej

$$H(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Sledi $\Delta = \det H(2,1) = AC - B^2 = 3 > 0$. V točki $(2,1)$ je lokalni ekstrem funkcije f. Ker je $A > 0$, je v tej točki lokalni minimum.

Primer. Naj bo $f(x,y) = xy$. Tedaj je $f_x(x,y) = y$ in $f_y(x,y) = x$.

Edina rešitev sistema $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ (in torej edina stacionarna točka) je točka $(0,0)$.

Izračunajmo druge parcialne odvode v točki $(0,0)$. Dobimo

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 0, \quad A = f_{xx}(0,0) = 0 \\ f_{xy}(x,y) &= 1, \quad B = f_{xy}(0,0) = 1 \\ f_{yy}(x,y) &= 0, \quad C = f_{yy}(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Velja $AC - B^2 = -1 < 0$, zato točka $(0,0)$ ni lokalni ekstrem funkcije $f(x,y) = xy$.

Primer. Naj bo $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2xe^{-(x^2+y^2)}, \\ f_y(x,y) &= -2ye^{-(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Edina rešitev sistema $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ je točka $(0,0)$ (tu smo upoštevali, da je $e^{-(x^2+y^2)} > 0$). Izračunajmo druge parcialne odvode v točki $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (4x^2-2)e^{-(x^2+y^2)}, && A = f_{xx}(0,0) = -2, \\ f_{xy}(x,y) &= 4xye^{-(x^2+y^2)}, && B = f_{xy}(0,0) = 0, \\ f_{yy}(x,y) &= (4y^2-2)e^{-(x^2+y^2)}, && C = f_{yy}(0,0) = -2. \end{aligned}$$

Ker je $AC - B^2 = 4 > 0$, je v točki $(0,0)$ lokalni ekstrem funkcije f. Ker je $A < 0$, je v tej točki lokalni maksimum.

Primer. Naj bo $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Poiščimo najprej stacionarne točke. Imamo $f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$ in $f_y(x,y) = 3y^2 - 3x$.

Sistem $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ je ekvivalenten sistemu $y = x^2$, $x = y^2$, ki ima dve rešitvi: točko $T_1(0,0)$ in točko $T_2(1,1)$.

Izračunajmo še druge parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{xy}(x,y) &= -3 \\ f_{yy}(x,y) &= 6y \end{aligned}$$

Sledi $\Delta(x,y) = \det H(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 36xy - 9$. Ker je $\Delta(0,0) = -9 < 0$, v stacionarni točki $T_1(0,0)$ ni lokalnega ekstrema. Ker je $\Delta(1,1) = 27 > 0$ ima v stacionarni toki $T_2(1,1)$ funkcija f lokalni ekstrem. Ker je $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, ima funkcija f v točki $T_2(1,1)$ lokalni minimum.

Primer. Naj bo $f(x,y) = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right) e^{-x^2-y^2}$. Imamo

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xe^{-x^2-y^2} + \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)(-2x)e^{-x^2-y^2} \\ &= 2\left(x - x^3 - \frac{3}{4}x\right) e^{-x^2-y^2} \\ &= 2\left(\frac{x}{4} - x^3\right) e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

in

$$f_y(x,y) = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)(-2y)e^{-x^2-y^2}.$$

Sistem $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ lahko z upoštevanjem dejstva $e^{-x^2-y^2} > 0$ poenostavimo v sistem $\frac{x}{4} - x^3 = 0$, $y = 0$, oziroma $x\left(\frac{1}{4} - x^2\right) = 0$, $y = 0$, oziroma $x\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) = 0$, $y = 0$.

Dobimo torej tri stacionarne toke: $T_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right), T_2(0,0), T_3\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Izrčunajmo še druge parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2\left(\frac{x}{4} - x^3\right) e^{-x^2-y^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{4} - 3x^2\right) e^{-x^2-y^2} + 2\left(\frac{x}{4} - x^3\right)(-2x)e^{-x^2-y^2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - 7x^2 + 4x^4\right) e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2\left(\frac{x}{4} - x^3\right) e^{-x^2-y^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{x}{4} - x^3\right)(-2y)e^{-x^2-y^2} \\ &= -4xy\left(\frac{1}{4} - x^2\right) e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)(-2y)e^{-x^2-y^2}\right) \\ &= \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(-2e^{-x^2-y^2} + (-2y)(-2y)e^{-x^2-y^2}\right) \\ &= \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(4y^2 - 2\right) e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Izračunajmo predznak $\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ v vseh treh stacionarnih točkah. Za točko $(-\frac{1}{2}, 0)$

$$\Delta\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = f_{xx}\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cdot f_{yy}\left(-\frac{1}{2}, 0\right) - f_{xy}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)^2 = 2e^{-1/2} > 0.$$

Ker je tudi $f_{xx}\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -e^{-1/4} < 0$, ima v točki $T_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ funkcija lokalni maksimum. Za točko $(0,0)$ dobimo

$$\Delta(0,0) = -\frac{1}{4} < 0$$

v točki $T_2(0,0)$ funkcija nima lokalnega ekstrema.

$$\Delta\left(\frac{1}{2}, 0\right) = f_{xx}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \cdot f_{yy}\left(\frac{1}{2}, 0\right) - f_{xy}\left(\frac{1}{2}, 0\right)^2 = 2e^{-1/2} > 0.$$

Ker je $f_{xx}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -e^{-1/4} < 0$, ima v točki $T_3\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ funkcija lokalni maksimum.

Primer. Tri števila, x, y in z imajo dano vsoto V. Pri katerih vrednostih x, y in z je produkt $P = xyz$ maksimalen?

Ker je $x + y + z = V$ lahko produkt izrazimo kot funkcijo dveh spremenljivk $p(x, y) = xy(V - x - y)$. Iščemo torej maksimum funkcije p.

Stacionarne točke so rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} p_x(x, y) &= y(V - x - y) - xy = y(V - 2x - y) = 0 \\ p_y(x, y) &= x(V - x - y) - xy = x(V - x - 2y) = 0. \end{aligned}$$

Trivialna rešitev sistema $(0,0)$ očitno ne da maksimuma funkciji p (produkt je tedaj enak nič). To velja tudi za rešitvi $(V, 0)$ in $(0, V)$. Netrivialna stacionarna točka je rešitev sistema $V - 2x - y = 0, V - x - 2y = 0$. Dobimo točko $S = (\frac{V}{3}, \frac{V}{3})$.

Preverimo, da ta točka res da maksimum funkciji p. Imamo $f_{xx} = -2y$, $f_{xy} = V - 2x - 2y$ ter $f_{yy} = -2x$, torej $f_{xx}(S) = \frac{-2V}{3}, f_{xy}(S) = \frac{-V}{3}$ in $f_{yy}(S) = \frac{-2V}{3}$. Sledi $\Delta = \frac{V^2}{3} > 0$. Ker je $f_{xx}(S) = \frac{-2V}{3} < 0$, je v točki S res maksimum funkcije p. Tedaj je $z = \frac{V}{3}$ in maksimalen produkt P je enak enak $\frac{V^3}{27}$.

2.7 Odvod sestavljene funkcije

Trditev. *Naj bo funkcija $z = f(x, y)$ diferenciabilna in naj bosta $x = x(t)$, $y = y(t)$ odvedljivi funkciji parametra t. Potem je z sestavljena funkcija parametra t, njen odvod pa je*

$$\frac{dz}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+x)) - f(x, y)}{h} = f_x(x, y)\dot{x}(t) + f_y(x, y)\dot{y}(t),$$

kjer je

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x'(t), \\ \dot{y}(t) &= y'(t). \end{aligned}$$

Primer. (i) Izračunajmo odvod funkcije $z = (t+1)^{t^2}$.

Naj bo $x(t) = t + 1$ in $y(t) = t^2$. Tedaj je $z(t) = f(x, y) = x^y$.

Velja $\dot{x}(t) = 1$ in $\dot{y}(t) = 2t$ torej

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\left(x^y\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \\ &= yx^{y-1} \cdot 1 + x^y \ln x \cdot 2t \\ &= t^2(t+1)^{t^2-1} + 2t(t+1)^{t^2}\ln(t+1). \end{aligned}$$

(ii) Izračunajmo še odvod funkcije $z = t^t$.

Naj bo $x(t) = t, y(t) = t$. Tedaj je $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 1$ in $z = x^y$. Sledi

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\left(x^y\right) \\ &= f_x\dot{x}(t) + f_y\dot{y}(t) \\ &= yx^{y-1} + x^y \ln x \\ &= t \cdot t^{t-1} + t^t \ln t \\ &= t^t\left(1 + \ln t\right). \end{aligned}$$

(iii) Naj bo $f(x, y) = x^2 + 2\sin y$ za $x(t) = 1 + t$, $y(t) = t^2$. Izračunajmo $\frac{d}{dt}f$.

Dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\left(x^2 + 2\sin y\right) \\
&= f_x\dot{x}(t) + f_y\dot{y}(t) = \\
&= 2x\cdot 1 + 2\cos y \cdot 2t \\
&= 2(1+t) + 4t\cos(t^2).
\end{aligned}$$

Rezultat preverimo še z neposrednim odvajanjem. Imamo $f(t) = (1+t)^2 + 2\sin(t^2)$ torej $\frac{dz}{dt} = 2(1+t) + 4t\cos(t^2)$.

Naj bo sedaj funkcija $f(x,y)$ diferenciabilna, spremenljivki x in y pa naj bosta diferenciabilni funkciji novih spremenljivk u in v: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Sedaj je torej funkcija f posredno odvisna od spremenljivk u in v in velja **verižno pravilo**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Bolj splošno velja: če je $z = f(x_1,\ldots,x_n)$ z $x_i = x_i(t_1,\ldots,t_m)$ za vsak $i = 1,\ldots,n$ potem je

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}.$$

Primer. Dana je funkcija

$$z = e^{u^2+v^2}\cos v + \left(\cos^2 v\right)^{u^2+v^2}.$$

Izračunajmo $\frac{\partial z}{\partial u}$ in $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Z $x(u,v) = u^2+v^2$ in $y(u,v) = \cos v$ je $z(u,v) = f(x,y) = e^x y + \left(y^2\right)^x$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= \left(e^x y + y^{2x}\ln(y^2)\right)2u + \left(e^x + 2xy^{2x-1}\right)\cdot 0 \\
&= \left(e^{u^2+v^2}\cos v + (\cos v)^{2(u^2+v^2)}\ln(\cos^2 v)\right)2u.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= \left(e^x y + y^{2x}\ln(y^2)\right) 2v + \left(e^x + 2xy^{2x-1}\right)\cdot(-\sin v) \\
&= \left(e^{u^2+v^2}\cos v + (\cos v)^{2(u^2+v^2)}\ln(\cos^2 v)\right) 2v \\
&- \left(e^{u^2+v^2} + 2(u^2+v^2)(\cos v)^{2(u^2+v^2)-1}\right)\sin v
\end{aligned}
$$

Primer. Pokažimo, da za poljubno diferenciabilno funkcijo $V(x,y)$ velja

$$
\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2,
$$

kjer sta (x,y) kartezični, (r,φ) pa polarni koordinati.

Uvedemo polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ter zapišemo $V(x,y) = V(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$. Po verižnem pravilu je

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial V}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

ter

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial x} r\sin\varphi + + \frac{\partial V}{\partial y} r\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\varphi\right)^2 + \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\cos^2\varphi + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\sin^2\varphi + 2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi\sin\varphi \\
&+ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\sin^2\varphi + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\cos^2\varphi - 2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi\sin\varphi \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Poglavje 3

Integriranje funkcij

Poleg odvajanja je v uporabni matematiki pomembno tudi integriranje funkcij. Za začetek si oglejmo t.i. *nedoločeni integral*.

3.1 Nedoločeni integral

Iskanje nedoločenega integrala neke funkcije je obraten problem kot iskanje odvoda dane funkcije: za dano (zvezno) funkcijo $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iščemo funkcijo F, za katero velja

$$F'(x) = f(x).$$

Nedoločeni integral dane funkcije f ni enolično določen: če je F nedoločeni integral funkcije f, potem je za vsako konstanto C tudi funkcija $F + C$ nedoločeni integral funkcije f. Res, $(F+C)' = F'+C' = F' = f$. Poljubna dva nedoločena integrala dane funkcije se razlikujeta le za aditivno konstanto. Res, če je $F' = f$ in $G' = f$, je $0 = F' - G' = (F - G)'$, torej je $F - G = C$ za neko konstanto C.

Nedoločeni integral zapišemo z integralskim znakom:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Ta zapis izhaja iz diferencialnega zapisa odvoda $f' = \frac{df}{dx}$. Funkcijo, ki jo integriramo imenujemo *integrand*.

Primer. (i) $\int 2xdx = x^2 + C$

(ii) $\int \cos xdx = \sin x + C$.

Nedoločeni integrali elementarnih funkcij so:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, kjer $n \neq -1$,
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$,
3. $\int e^x dx = e^x + C$,
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$,
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$,
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$,
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C$.

Opomba. Opazimo, da v tabeli ni nedoločenega integrala logaritma. Tega bomo izpeljali kasneje.

Za računanje integralov bolj zapletenih funkcij poznamo nekaj metod. Oglejmo si jih.

3.2 Metode integriranja

3.2.1 Metoda dekompozicije

Integrand preoblikujemo in upoštevamo naslednji lastnosti integrala:

(i) Za poljubni zvezni funkciji f in g velja

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

(ii) Za vsako zvezno funkcijo f in konstanto C velja

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

Primer. (i)

$$\begin{aligned}\int ((2x-1)^2+3x^2)dx &= \int ((7x^2-4x+1)dx \\ &= 7\int x^2dx - 4\int xdx + \int 1dx \\ &= \frac{7x^3}{3} - 2x^2 + x + C.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+5}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1+4}{x^2+1}dx \\ &= \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx + \int \frac{4}{x^2+1}dx \\ &= x + 4\arctan x + C.\end{aligned}$$

3.2.2 Metoda substitucije

Uvedemo novo integracijsko spremenljivko, denimo t, in pišemo $x = x(t)$. S tem se spremeni tudi diferencial in sicer $dx = x'(t)dt$. Dobimo

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt.$$

Če substitucijo pametno izberemo, je novi integral preprostejši in ga znamo izračunati.

Primer. (i) Izračunajmo

$$\int \frac{dx}{2x-1}.$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = 2x - 1$. Tedaj je $dt = 2dx$ in

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C.$$

(ii) Izračunajmo

$$\int \tan x dx.$$

Z upoštevanjem $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in uvedbo nove spremenljivke $u = \cos x$ (tedaj je $du = -\sin x dx$) dobimo

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + C = -\ln(\tan x) + C.$$

(iii) Izračunajmo

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx.$$

Uvedemo $t = x^3 + 1$. Tedaj je $dt = 3x^2dx$. Sledi

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^3+1} + C.$$

3.2.3 Metoda integracije po delih (*per partes*)

Formula za integracijo po delih je

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Izpeljemo jo iz dejstva da je $uv = \int d(uv) = \int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu$. Integriranje po delih uporabljamo v primeru ko je integrand produkt dveh raznorodnih funkcij (npr. polinoma in eksponentne funkcije, eksponentne in kotne funkcije itd.)

Primer. (i) Izračunajmo

$$\int \ln x dx.$$

Uvedemo $u = \ln x$ in $dv = dx$. Tedaj je $du = \frac{dx}{x}$ in $v = x$. Sledi

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

(ii) Izračunajmo

$$\int x \ln x dx.$$

Uvedemo $u = \ln x$ in $dv = xdx$. Tedaj je $du = \frac{dx}{x}$ in $v = \frac{x^2}{2}$. Sledi

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(iii) Izračunajmo

$$\int x^2 e^x dx.$$

Vpeljemo $u = x^2$ in $dv = e^x dx$. Tedaj je $du = 2xdx$ in $v = e^x$. Sledi

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx = ...$$

Še enkrat naredimo integracijo po delih z $u = x$ in $dv = e^x dx$ in nadaljujemo

$$\begin{aligned} ... &= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx =\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C. \end{aligned}$$

3.2.4 Metoda dekompozicije (II)

Pri integraciji racionalnih funkcij včasih pride prav naslednji trik.

Primer. Izračunajmo

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx.$$

Izraz $\frac{1}{x^2-1}$ lahko zapišemo kot

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Res, če pišemo

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)},$$

potem iščemo A in B, ki zadoščata enačbam

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - B &= 1. \end{aligned}$$

Ti enačbi res rešita $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$.

Sledi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C. \end{aligned}$$

3.3 Določeni integral

Izberimo poljubno delitev intervala $[a, b]$ na n intervalov z $n-1$ vmesnimi točkami:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dolžina k-tega podintervala je $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Na vsakem od teh podintervalov izberemo točko ξ_k, torej $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ in sestavimo *integralsko vsoto*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Definicija. *Število I imenujemo* **določeni integral** *realne funkcije f na intervalu $[a,b]$, če velja*

$$I = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Ta limita ne obstaja vedno, da pa se pokazati, da obstaja za vsako zvezno funkcijo na intervalu $[a,b]$ (dokaz izpustimo). Kadar limita obstaja rečemo da je funkcija f **integrabilna** na intervalu $[a,b]$. Določeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$, I, označimo z

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Primer. Po definiciji izračunajmo integral $\int_a^b x dx$, tako da za posebno točko izberemo sredino vsakega podintervala

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k-1}^2) \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2).\end{aligned}$$

Izračun določenega integrala po definiciji je bil v zgornjem primeru enostaven, saj je bil integrand zelo preprosta funkcija. Pri bolj zapletenih funkcijah izračun po definiciji ni praktičen. Zato si sedaj oglejmo nekaj lastnosti določenega integrala, ki so v pomoč pri računanju.

3.3.1 Lastnosti določenega integrala

1. Ime integracijske spremenljivke ni pomembno:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du.$$

2. Linearnost integrala:
$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

3. Za poljuben $c \in [a, b]$ velja
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Velja
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$
Posledica: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

5. Monotonost: če na intervalu $[a, b]$ velja $f(x) \leq g(x)$, velja tudi
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

6. Velja
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

7. Če na intervalu $[a, b]$ velja $m \leq f(x) \leq M$ sledi
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$
Izraz
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
imenujemo **povprečna vrednost** funkcije f na intervalu $[a, b]$. Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ torej leži med minimumom in maksimumom funkcije na tem intervalu.

Lastnosti 6 in 7 sledita iz točke 5.

3.4 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Računanje določenega integrala po definiciji je v večini primerov zapleteno, zato je dobro poznati druge načine.

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Za $x \in [a, b]$ definirajmo

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Velja:

(i) G je zvezna funkcija zgornje meje.

Dokaz. Velja $G(x + h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(\xi) \to 0$ ko $h \to 0$ (tu smo upoštevali lastnost 3.)

(ii) G je odvedljiva funkcija spremenljivke x.

Dokaz. Velja

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi) = f(x).$$

Tedaj je $G'(x) = f(x)$ za vsak x in G je nedoločeni integral funkcije f. Če je F poljuben nedoločeni integral je

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

za neko konstanto C. Toda ker je $F(a) = C$ je $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$. Če vstavimo $x = b$, dobimo **osnovno formulo integralskega računa**

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Z metodami za integriranje, ki smo jih spoznali v prejšnjem razdelku sedaj izračunajmo naslednje integrale:

Primer. (i) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$

(ii) $\int_{-1}^1 (x^2 - 7x + 3)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 3x)\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 3 - (-\frac{1}{3} - \frac{7}{2} - 3) = \frac{20}{3}.$

(iii) Integral $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$ rešimo s substitucijo $t = x+1$ (s tem se spremenijo tudi meje integracije). Tedaj je $dt = dx$ in

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \int_1^2 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$$

(iv) Integral $\int_0^\pi x \sin x dx$ izračunamo z metodo *per partes*: $u = x, dv = \sin x dx$. Sledi $du = dx, v = -\cos x$ ter

$$\int_0^\pi x \sin x dx = -x \cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

3.5 Posplošeni integral

Pod pojmom posplošeni integral razumemo bodisi

(i) integral zvezne funkcije na neomejenem intervalu, bodisi

(ii) integral funkcije, ki ni definirana v neki izolirani točki integracijskega intervala.

Najprej si poglejmo, kako integriramo funkcijo na neomejenem intervalu.

3.5.1 Neomejen integracijski interval

Definiramo

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)dx &:= \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx, \\
\int_{-\infty}^b f(x)dx &:= \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx, \\
\int_{-\infty}^\infty f(x)dx &:= \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Oglejmo si nekaj primerov.

Primer. (i)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b}+1) = 1.
\end{aligned}$$

(ii) Izračunajmo $\int_0^\infty \frac{6x}{x^2+1}dx$. Imamo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{6x}{x^2+1}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{6x}{x^2+1}dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b^2+1}\frac{3dt}{t}dt = \lim_{b\to\infty} 3\ln t\Big|_1^{b^2+1} \\ &= \lim_{b\to\infty} 3(\ln(b^2+1)-\ln 1) = \infty.\end{aligned}$$

Pri tem smo si pomagali s substitucijo $t = x^2+1$ $(dt = 2xdx)$.

3.5.2 Integracija neomejene funkcije

Denimo, da ima funkcija f izolirano singularno točko v desnem krajišču integracijskega območja $[a,b]$ (torej v točki b). Potem definiramo

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Primer. (i)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{1-x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(-\ln(1-x)\Big|_0^{1-\varepsilon}\Big) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\ln\varepsilon) = \infty\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2.\end{aligned}$$

Če ima funkcija f izolirano singularno točko v levem krajišču integracijskega območja $[a,b]$ (torej v točki a), potem definiramo

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Primer. (i)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(-x + x\ln x\Big)\Big|_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon - \varepsilon\ln\varepsilon - 1) = -1\end{aligned}$$

saj z uporabo L'Hospitalovega pravila lahko preverimo, da je

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0.$$

Če ima funkcija f izolirano singularno točko c v notranjosti integracijskega intervala, $c \in (a, b)$, potem upoštevamo da velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

in za integrala na desni uporabimo prejšnji definiciji.

3.6 Uporaba določenega integrala

Določeni integral lahko uporabljamo za računanje ploščin likov, prostornin in površin rotacijskih teles ter ločnih dolžin.

3.6.1 Računanje ploščin likov

Če je $f(x) \geq 0$ nenegativna funkcija na intervalu $[a, b]$ je **ploščina** lika, ki ga na intervalu $[a, b]$ oklepajo krivulja $y = f(x)$, abscisna os in obe ordinati v krajiščih (t.j., premici $x = a$ in $x = b$) enaka

$$p = \int_a^b f(x)dx.$$

Bolj splošno: če je $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $[a, b]$, je ploščina med krivuljama $y = f(x)$ in $y = g(x)$ na $[a, b]$ enaka

$$p = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Primer. (i) Ploščina med $y = x^2$ in absciso je intervalu $[0, 3]$ enaka

$$p = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9.$$

(ii) Izračunajmo ploščino med $y = \sin x$ in $y = \cos x$ na intervalu $[0, 2\pi]$. Najprej izračunajmo meje integracijskega območja, torej presečišča obeh funkcij. Krivulji $y = \sin x$ in $y = \cos x$ se sekata v točkah $a = \frac{\pi}{4}$ ter $b = \frac{5\pi}{4}$. Sledi

$$p = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}.$$

(iii) Ploščina kroga s polmerom a je

$$p = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Za izračun integrala uvedemo substitucijo $x = a\sin t$. Imamo torej $dx = a\cos t dt$ in

$$p = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = 2a^2(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2.$$

Pri tem smo upoštevali enakost $\cos^2 t = 1 + \cos 2t$.

(iv) Ploščina pod krivuljo $y = \frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $(-\infty, \infty)$ je

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan a) = \pi.\end{aligned}$$

3.6.2 Računanje ločnih dolžin

Za krivuljo v obliki $y = f(x)$ je **dolžina** krivulje na intervalu $[a, b]$ enaka

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx,$$

saj je $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + y'^2dx^2 = (1 + y'^2)dx^2$.

Primer. Obseg krožnice s polmerom a je

$$o = 4\int_0^a \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

za $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Tedaj je $y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ in $1 + y'^2(x) = \frac{a^2}{a^2-x^2}$. Z uvedbo nove spremenljivke $x = a\sin t$ tedaj sledi

$$o = 4\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}dt = 4at\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi a.$$

3.6.3 Računanje prostornine rotacijskega telesa

Če krivuljo $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli abscisne osi dobimo vrtenino, katere prostornina je

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx.$$

Primer. (i) Zavrtimo krivuljo $y = x^2$ okoli x-osi na intervalu $[0, 1]$. Prostornina nastale vrtenine je

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

(ii) Stožec s polmerom r in višino h dobimo z vrtenjem premice $y = \frac{rx}{h}$ okoli abscisne osi na intervalu $[0, h]$. Prostornina takega stožca je

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2} dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3.6.4 Računanje površine rotacijskega telesa

Če krivuljo $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli abscisne osi dobimo vrtenino, katere površina je

$$P = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

Primer. Izračunajmo površino paraboloida $y = \sqrt{x}$ (t.j., telesa, ki ga dobimo z vrtenjem parabole) na intervalu $[0, 1]$. Imamo $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ in $1+y'^2(x) = \frac{1+4x}{4x}$. Z uvedbo nove spremenljivke $t = 1 + 4x$ sledi

$$P = 2\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4x}dx = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{t}dt = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

Poglavje 4

Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta

Naj bo funkcija f poljubnokrat odvedljiva na realni osi. Po osnovnem izreku integralskega računa je

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt,$$

kar lahko z večkratno uporabo integracije po delih zapišemo kot

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt \\
&= ... \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) + ... + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.
\end{aligned}$$

To je **Taylorjeva formula**. Del

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + ... + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

imenujemo **Taylorjev polinom**, del

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

pa je **ostanek** Taylorjeve formule (*v integralski obliki*).

Ostanek Taylorjeve formule lahko za $(n+1)$-krat odvedljive funkcije zapišemo še drugače. Ker za neki realni števili m in M velja

$$m \le f^{(n+1)}(t) \le M$$

je

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt \le R_n(x) \le \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt$$

oziroma

$$\frac{m}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \le R_n(x) \le \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ker je funkcija $f^{(n+1)}(t)$ zvezna na intervalu $[a,x]$ in je po zgoraj zapisanem

$$m \le \frac{(n+1)!R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} \le M$$

obstaja vsaj ena točka $\xi \in [a,x]$ tako da velja

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(n+1)!R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

oziroma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

To je zapis ostanka v *Lagrangeevi obliki.*

Opomba. V določenih primerih lahko pokažemo, da gre za nekatere x (vsaj v bližini točke a) ostanek $R_n(x)$ proti nič ko $n \to \infty$. V tem primeru lahko zapišemo **Taylorjevo vrsto**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Če je $a = 0$ govorimo tudi o **McLaurinovi vrsti**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Primer. (i) McLaurinova vrsta za funkcijo $f(x) = e^x$ je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(ii) McLaurinova vrsta za logaritemsko funkcijo $f(x) = \ln(1+x)$ je

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

(iii) McLaurinovi vrsti za kotni funkciji $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$ sta

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

4.1 Uporaba Taylorjeve vrste in Taylorjeve formule

Taylorjevo formulo in Taylorjevo vrsto lahko uporabimo za

1. **Risanje grafov funkcij.** Pri risanju grafa dane funkcije si lahko pomagamo z lokalnimi aproksimacijami. To pomeni, da funkcijo aproksimiramo s Taylorjevim polinomom izbrane stopnje. Denimo
   (i) $\sin x \approx x$, $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$,
   (ii) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$,
   (iii) $e^x \approx 1 + x$.

2. **Računanje limit.** Denimo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + ...)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

3. **Računanje približnih vrednosti funkcije.** Vemo, da lahko približno vrednost funkcije v dani točki izračunamo s pomočjo diferenciala. Če gremo še korak dalje in funkcijo aproksimiramo s Taylorjevim polinomom višje stopnje, lahko dobimo boljši približek.

   Kot primer izračunajmo približno vrednost $\sqrt{1.2}$.

   Naj bo $f(x) = \sqrt{x}$. Tedaj je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ in $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$. Sledi

$$\sqrt{1.2} \approx f(1) + f'(1)(0.2) = 1.1.$$

Če funkcijo aproksimiramo s Taylorjevim polinomom druge stopnje dobimo

$$\sqrt{1.2} \approx f(1) + f'(1)(0.2) + \frac{1}{2} f''(1)(0.2)^2 = 1.095.$$

Točna vrednost $\sqrt{1.2}$ na pet decimalnih mest je 1.095445.

Poglavje 5

Diferencialne enačbe

Pri uporabi matematike v naravoslovnih vedah pogosto naletimo na enačbe, pri katerih poleg neznane funkcije nastopajo tudi odvodi neznane funkcije. Takim enačbam rečemo **diferencialne enačbe**.

Oglejmo si nekaj primerov diferencialnih enačb.

Primer. (i) $y''(x) - y(x) = 0$ je navadna diferencialna enačba 2.reda.

(ii) $x^3 y'''(x) - 1 = 0$ je navadna diferencialna enačba 3. reda.

(iii) Enačba

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

je parcialna diferencialna enačba 2. reda.

V tem poglavju se bomo (zelo na kratko) ukvarjali z diferencialnimi enačbami, kjer nastopajo le funkcije ene spremenljivke (in odvodi teh funkcij). Takim diferencialnim enačbam rečemo *navadne diferencialne enačbe.*

Definicija. Red *diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda, ki v tej enačbi nastopa.*

5.1 Navadna diferencialna enačba 1. reda

Splošna oblika navadne diferencialne enačbe 1. reda je

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

To je enačba v *implicitni obliki.* Včasih lahko enačbo zapišemo v *eksplicitni* obliki

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Rešitev enačbe 1. reda je zvezno odvedljiva funkcija. V nadaljevanju bomo spoznali nekaj družin diferencialnih enačb.

5.1.1 Enačba z ločljivima spremenljivkama

Je enačba oblike

$$y'(x) = f(x)g(y).$$

Če pišemo $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, lahko diferencialno enačbo zapišemo kot

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

oziroma

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Z integracijo obeh strani dobimo enačbo oblike $G(y) = F(x)+C$, torej implicitno izraženo rešitveno krivuljo. V nekaterih primerih lahko $y(x)$ izrazimo, v drugih ne.

Primer. Poiščimo rešitev diferencialne enačbe $y' = -2xy$. Zapišemo

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -2xy\\ \int \frac{dy}{y} &= \int -2xdx\\ \ln y &= -x^2 + C\end{aligned}$$

oziroma $y(x) = De^{-x^2}$.

Splošna rešitev diferencialne enačbe je enoparametrična družina funkcij. Konstanto D lahko določimo, če podamo vrednost funkcije v eni točki. Če denimo zahtevamo, da rešitev zadošča pogoju $y(0) = 1$, dobimo $D = 1$. Partikularna rešitev diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$ je torej $y(x) = e^{-x^2}$.

Oglejmo si še nekaj primerov uporabe diferencialnih enačb v naravoslovju.

Primer. Rast bakterijske populacije (naravna rast).

Denimo, da vsako enoto časa iz vsake bakterije nastane k novih. Če $x(t)$ označuje velikost bakterijske populacije ob času t, potem velja

$$x(t + \Delta t) - x(t) = kx(t)\Delta t.$$

Z besedami, prirastek populacije v časovnem intervalu Δt je sorazmeren dolžini časovnega intervala in velikosti bakterijske populacije, sorazmernostna konstanta je k. Izraz lahko zapišemo kot

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=kx(t).$$

V limiti $\Delta t \to 0$ imamo torej diferencialno enačbo

$$x'(t)=kx(t).$$

Enačba ima ločljive spremenljivke. Če torej pišemo $x'(t)=\frac{dx}{dt}$, enačbo preoblikujemo in integriramo obe strani, dobimo rešitev

$$x(t)=Ce^{kt}.$$

To je *Malthusov model neomejene rasti.*

Primer. Radioaktivni razpad.

Kadar imamo za nek $k>0$ enačbo

$$y'(t)=-ky(t)$$

dobimo rešitev $y(t)=Ce^{-kt}$ in govorimo o eksponentnem upadanju. Ta enačba se denimo uporablja kot model radioaktivnega razpada.

Izračunajmo razpolovno dobo, t.j., čas, ki je potreben za to, da se količina radioaktivne snovi prepolovi. Če je y_0 količina radioaktivne snovi na začetku torej iščemo čas $t_{\frac{1}{2}}$ za katerega je

$$y(t_{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}y_0.$$

Ker je $y_0=y(0)=C$ imamo enačbo

$$y(t_{\frac{1}{2}})=y_0e^{kt_{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}y_0,$$

oziroma $e^{kt_{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$. Z logaritmiranjem dobimo $t_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln 2}{k}$. Za element radij imamo oceno $k\approx 1.4\cdot 10^{-11}/s$, kar pomeni razpolovni čas $t_0\approx 5\cdot 10^{10}s\approx$ 2000 let.

Primer. Širjenje nalezljive bolezni v dani populaciji

Denimo, da se v zaprti populaciji velikosti N širi neka nalezljiva bolezen. Naj bo $x(t)$ število neokuženih (zdravih) posameznikov, $y(t)$ pa število okuženih ob času t. Ti dve skupini skupaj predstavljata celotno populacijo, t.j., $x(t) + y(t) = N$ za vsak t. Denimo, da je na začetku v populaciji en sam okužen, t.j.

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ x(0) &= N - 1. \end{aligned}$$

Predpostavimo, da je hitrost širjenja okužbe v vsakem trenutku sorazmerna z velikostjo obeh skupin (okuženih in dovzetnih). Poleg tega predpostavimo, da v populaciji ni rojstev in smrti (ta predpostavka je realistična le kadar spremljamo dinamiko bolezni v krajšem časovnem obdobju). Tedaj je

$$\frac{dy}{dt} = kx(t)y(t)$$

oziroma

$$\frac{dy}{dt} = k(N - y)y.$$

Pokažimo, da je rešitev te enačbe, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$ dana z

$$y(t) = \frac{Ne^{kNt}}{N - 1 + e^{kNt}}.$$

Enačba $\frac{dy}{dt} = k(N - y(t))y(t)$ je enačba z ločljivima spremenljivkama. Računamo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= k(N - y(t))y(t) \\ \frac{dy}{(N - y)y} &= kdt. \end{aligned}$$

Z dekompozicijo izraza na levi

$$\frac{dy}{(N - y)y} = \frac{1}{N}\frac{1}{y} + \frac{1}{N}\frac{1}{N - y}$$

in integracijo dobimo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{N}\frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{N}\frac{1}{N-y}dy = &\int kdt \\ \frac{1}{N}\ln y - \frac{1}{N}\ln(N-y) =& kt + c \\ \frac{1}{N}\ln\frac{y}{N-y} &= kt + c \\ \ln\frac{y}{N-y} &= kNt + C \\ \frac{y}{N-y} &= De^{kNt}.\end{aligned}$$

Če iz zadnje enakosti izrazimo y dobimo

$$y(t) = \frac{DNe^{kNt}}{1 - De^{kNt}}.$$

Preostane nam le še upoštevanje začetnega pogoja $y(0) = 1$. S tem lahko določimo D in sicer je $1 = y(0) = \frac{D}{1-D}$. Torej $D = \frac{1}{1-N}$ in rešitvena krivulja je podana z

$$y(t) = \frac{Ne^{kNt}}{N - 1 + e^{kNt}}.$$

Graf rešitvene krivulje je t.i. *logistična krivulja*.

5.1.2 Linearna diferencialna enačba 1. reda

Je enačba oblike

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

kjer sta f in g dani zvezni funkciji. Enačba je **homogena** če je $g(x) = 0$ in **nehomogena** če je $g(x) \neq 0$. Homogena enačba ima ločljive spremenljivke, torej jo znamo rešiti. Splošna rešitev homogene enačbe je oblike $y_H(x) = Cy_0(x)$ za poljubno konstanto C in eno netrivialno rešitev y_0.

Splošna rešitev nehomogene enačbe je oblike $y(x) = y_H(x) + y_1(x)$, kjer je y_H splošna rešitev homogenega dela, y_1 pa ena partikularna rešitev nehomogene enačbe.

Nehomogeno enačbo lahko rešujemo na dva načina:

(i) Če uganemo eno (partikularno) rešitev nehomogene enačbe y_1 (in preverimo, da je res rešitev), potem je splošna rešitev nehomogene enačbe oblike

$$y(x) = y_1(x) + Cy_0(x).$$

Razlika $y(x) - y_1(x)$ vedno reši homogeno enačbo.

(ii) Če partikularne rešitve ne moremo uganiti, jo lahko izračunamo z metodo *variacije konstant*. Splošno rešitev homogene enačbe $y(x) = Cy_0(x)$ pišemo kot
$$y(x) = C(x)y_0(x).$$
Tedaj je $y' = C'y_0 + Cy_0'$. Izraz vstavimo v nehomogeno enačbo in dobimo
$$C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x) + f(x)C(x)y_0(x) = g(x).$$
Ker je y_0 rešitev homogenega dela dobimo
$$C'(x)y_0(x) = g(x)$$
od koder lahko z integracijo dobimo $C(x)$.

Primer. (i) Poiščimo splošno rešitev enačbe $y' - y = e^{2x}$ in določimo tisto rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 2$.

Rešitev homogenega dela enačbe $y' - y = 0$ dobimo z ločitvijo spremenljivk in integracijo. Dobimo $y(x) = Ce^x$.

Z variacijo konstant dobimo: če $y(x) = C(x)e^x$ je
$$y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$
Vstavimo v enačbo in dobimo
$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^{2x},$$
oziroma
$$C'(x) = e^x.$$
Torej $C(x) = e^x + C$ in splošna rešitev nehomogene enačbe je
$$y(x) = (e^x + C)e^x = e^{2x} + Ce^x.$$
Za rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 2$ imamo $2 = 1 + C$, torej $C = 1$. Partikularna rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 2$ je torej
$$y(x) = e^{2x} + e^x.$$

(ii) Poiščimo splošno rešitev enačbe $xy' + y = \sin x$.

Najprej rešimo homogeni del:

$$\begin{aligned} xy' + y &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{-dx}{x} \\ \ln y &= -\ln x + c \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Variacija konstant: če $y(x) = \frac{C(x)}{x}$, je $y' = \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2}$. Vstavimo v enačbo in z integracijo dobimo $C(x) = -\cos x + C$. Splošna rešitev je torej $y(x) = \frac{C}{x} - \frac{\cos x}{x}$.

V nekaterih primerih se diferencialno enačbo da prevesti na linearno enačbo. To denimo velja za t.i. **Bernoullijevo** enačbo

$$y' + f(x)y = g(x)y^n,$$

kjer je $n \neq 1$ (če $n = 1$, imamo homogeno linearno enačbo). Če je $n \neq 1$, lahko z novo spremenljivko

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}$$

enačbo prevedemo na linearno diferencialno enačbo.

Primer. (i) Naj bo

$$xy' + y = y^2.$$

Tedaj je $n = 2$ in lahko uvedemo spremenljivko $z = y^{-1}$. Sledi $z' = \frac{-1}{y^2} y'$ oziroma $y' = \frac{-z'}{z^2}$. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$\frac{-xz'}{z^2} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2},$$

oziroma

$$-xz' + z = 1.$$

To je linearna diferencialna enačba, katere rešitev zlahka poiščemo: splošna rešitev je $z(x) = 1 + Cx$. Sledi $y = \frac{1}{1+Cx}$.

(ii) Tudi enačba

$$y' = k(N - y)y$$

je Bernoullijeva enačba. Preverimo lahko, da s substitucijo $z = y^{-1}$ in upoštevanjem začetnega pogoja $y(0) = 1$ res dobimo prej zapisano rešitev.

5.2 Linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantimi koeficienti

Je enačba oblike

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x),$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ dane konstante, $f(x)$ pa dana zvezna funkcija. Če je $f(x) = 0$ je enačba *homogena*, sicer je *nehomogena*.

Homogeno enačbo rešujemo z nastavkom

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Iščemo torej λ, ki zadošča enačbi

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0,$$

oziroma t.i. **karakteristični enačbi**

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Če ima karakteristična enačba dve različni ničli, λ_1 in λ_2, je splošna rešitev homogene enačbe

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

za poljubni konstanti $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Če pa sta korena karakteristične enačbe enaka λ, je splošna rešitev

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$

za poljubni konstanti $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Za dokaz dejstva, da drugih rešitev ni, bi potrebovali več znanja s področja diferencialnih enačb, kar pa je zunaj dosega tega predmeta.

Splošna rešitev nehomogene enačbe je oblike $y = y_H + y_1$, kjer je y_H splošna rešitev homogenega dela, y_1 pa partikularna rešitev nehomogene enačbe. Partikularno rešitev bodisi uganemo (in preverimo, da je res rešitev) bodisi jo dobimo z variacijo konstant. Variacijo konstant bomo prikazali na primeru.

Kadar sta korena karakteristične enačbe kompleksna, sta konjugirano kompleksna (saj ima karakteristična enačba realne koeficiente), denimo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ in $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Tedaj splošno rešitev lahko zapišemo tudi kot

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \\
&= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta + i\sin\beta) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta - i\sin\beta) \\
&= (C_1 + C_2)e^{\alpha x}\cos\beta + (C_1 - C_2)e^{\alpha x}\sin\beta \\
&= e^{\alpha x}(D_1\cos\beta + D_2\sin\beta),
\end{aligned}$$

kjer je $D_1 = C_1 + C_2$ in $D_2 = C_1 - C_2$.

Primer. (i) Poiščimo splošno rešitev enačbe $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$.

Enačba je homogena in jo rešujemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$. Karakteristična enačba je

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

ki ima rešitvi $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, torej je splošna rešitev enačbe

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Splošna rešitev enačbe je sedaj dvoparametrična družina funkcij. Če sta podana dva dodatna pogoja, ki ju mora izpolnjevati rešitvena krivulja, lahko konstanti C_1 in C_2 določimo.

Poiščimo tisto rešitev diferencialne enačbe, za katero velja $y(0) = 2$ in $y'(0) = 5$. Imamo $y(0) = C_1 + C_2 = 2$ in $y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 5$, iz česar sledi $C_1 = C_2 = 1$. Rešitev diferencialne enačbe, ki zadošča pogojem $y(0) = 2$ in $y'(0) = 5$ je torej $y(x) = e^{2x} + e^{3x}$.

(ii) Poiščimo splošno rešitev enačbe $y''(x) + 9y(x) = 0$.

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 9 = 0$ ima kompleksni rešitvi $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$, torej je splošna rešitev oblike $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

(iii) Poiščimo splošno rešitev enačbe $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x$. Vemo, da je splošna rešitev homogenega dela $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Do rešitve nehomogene enačbe lahko pridemo z variacijo konstant. Pišemo $y(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x}$. Tedaj je

$$y'(x) = C_1' e^{2x} + 2C_1 e^{2x} + C_2' e^{3x} + 3C_2 e^{3x}.$$

Zahtevajmo, da velja

$$C_1' e^{2x} + C_2' e^{3x} = 0.$$

Tedaj je

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$$

in

$$y''(x) = 2C_1' e^{2x} + 4C_1 e^{2x} + 3C_2' e^{3x} + 9C_2 e^{3x}.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo še eno enačbo za C_1' in C_2',

$$2C_1' e^{2x} + 3C_2' e^{3x} = x.$$

Rešujemo torej sistem enačb

$$\begin{aligned} C_1'e^{2x} + C_2'e^{3x} &= 0 \\ 2C_1'e^{2x} + 3C_2'e^{3x} &= x. \end{aligned}$$

Dobimo $C_1' = -xe^{-2x}$ in $C_2' = xe^{-3x}$. Z integracijo po delih dobimo

$$\begin{aligned} C_1(x) &= (\frac{x}{2} + \frac{1}{4})e^{-2x} + D_1, \\ C_2(x) &= -(\frac{x}{3} + \frac{1}{9})e^{-3x} + D_2 \end{aligned}$$

za poljubni konstanti D_1 in D_2.

Splošna rešitev enačbe je torej

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x} \\ &= (\frac{x}{2} + \frac{1}{4}) + D_1e^{2x} - (\frac{x}{3} + \frac{1}{9}) + D_2e^{3x} \\ &= D_1e^{2x} + D_2e^{3x} + \frac{x}{6} + \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

Do partikularne rešitve lahko pridemo tudi hitreje: ker je desna stran diferencialne enačbe polinom prve stopnje, lahko poskusimo partikularno rešitev iskati med linearnimi funkcijami $y(x) = Ax+B$. Vstavimo v enačbo, rešimo sistem enačb za neznanki A in B ter dobimo $A = \frac{1}{6}$ ter $B = \frac{5}{36}$.

5.3 Sistem linearnih diferencialnih enačb 1. reda s konstantnimi koeficienti

Pri modeliranju naravnih procesov pogosto naletimo na sisteme diferencialnih enačb. Najbolj enostaven primer sistema diferencialnih enačb je sistem dveh linearnih diferencialnih enačb 1. reda s konstantnimi koeficienti. Ta je oblike

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) + f(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) + g(t) \end{aligned}$$

za neznani funkciji $x(t)$ in $y(t)$, dane konstante $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ter dani zvezni funkciji $f(t)$ in $g(t)$. Če je $f(t) = 0$ in $g(t) = 0$ je sistem *homogen*, sicer je *nehomogen*.

Sistem lahko prevedemo na eno linearno diferencialno enačbo 2. reda s konstantnimi koeficienti. Osredotočimo se na homogeni sistem

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t). \end{aligned}$$

Tedaj iz prve enačbe sledi $x''(t) = ax'(t) + by'(t)$. Če iz prve enačbe izrazimo $y(t)$ ter vstavimo v drugo, potem iz enačbe $x''(t) = ax'(t) + by'(t)$ sledi

$$x''(t) - (a+d)x'(t) + (ad - bc)x(t) = 0.$$

To je linearna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti, ki ima karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Če sta λ_1 in λ_2 različna korena karakteristične enačbe, je

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Tedaj lahko $y(t)$ poiščemo iz ene od prvotnih enačb: če $b \neq 0$, iz prve enačbe dobimo

$$y(t) = \frac{1}{b}(x'(t) - ax(t)) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t},$$

kjer je $D_1 = \frac{(\lambda_1 - a)C_1}{b}$ in $D_2 = \frac{(\lambda_2 - a)C_2}{b}$.

Če ima karakteristična enačba dva enaka korena, potem vemo da je

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}.$$

Drugo funkcijo, $y(t)$, na podoben način kot prej določimo iz prve enačbe sistema (če $b \neq 0$).

Opomba. Če sistem

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

zapišemo v matrično obliki

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

potem je karakteristična enačba $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ enaka enačbi $\det(A - \lambda I) = 0$, torej je enaka karakteristični enačbi, ki smo jo spoznali v I. delu.

Primer. Poiščimo splošno rešitev sistema

$$x'(t) = x(t) + 4y(t)$$
$$y'(t) = 2x(t) + 3y(t).$$

Karakteristična enačba za diferencialno enačbo

$$x''(t) - (a+d)x'(t) + (ad-bc)x(t) = 0$$

je

$$0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Korena karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$, torej je splošna rešitev

$$x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}.$$

Iz prve enačbe sledi

$$y(t) = \frac{1}{4}(x'(t) - x(t)) = C_1 e^{5t} - \frac{1}{2} e^{-t}.$$

Literatura

1. I. Vidav: *Višja matematika I.* DMFA založništvo, Ljubljana (2008)

2. M. Hladnik: *Matematika za biologe.* Zapiski predavanj