2014

ZAKLJUČNA NALOGA

LAP

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

ZAKLJUČNA NALOGA

SIMULACIJA PO BINOMSKEM IN BLACK-SCHOLES MODELU VREDNOTENJA OPCIJ

PIA LAP

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Simulacija po binomskem in Black-Scholes modelu vrednotenja opcij

(Simulation of the Binomial and Black-Scholes option pricing model)

Ime in priimek: Pia Lap
Študijski program: Matematika v ekonomiji in financah
Mentor: doc. dr. Arjana Brezigar Masten
Somentor: mag. Rado Pezdir

Koper, september 2014

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Pia LAP

Naslov zaključne naloge:
Simulacija po binomskem in Black-Scholes modelu vrednotenja opcij

Kraj: Koper

Leto: 2014

Število listov: 48 Število slik: 15 Število tabel: 2

Število prilog: 2 Število strani prilog: 2 Število referenc: 21

Mentor: doc. dr. Arjana Brezigar Masten

Somentor: mag. Rado Pezdir

Ključne besede: izvedeni finančni instrumenti, opcije, opcijske mere občutljivosti, binomski model, Black-Scholes model, nevronske mreže.

Math. Subj. Class. (2010):

Izvleček:
Namen zaključne naloge je primerjava vrednotenja evropske opcije po dveh najbolj tipičnih matematičnih modelih, to je binomskem in Black-Scholes modelu. Zaključna naloga obsega teoretični in empirični del. Teoretični del obsega obrazložitev najpomembnejših pojmov, povezanih z opcijami. V nadaljevanju so predstavljeni dejavniki, ki pomembno vplivajo na višino vrednosti opcije in pojasnjeni njihovi vplivi na občutljivost vrednosti opcije (t.i. opcijske mere občutljivosti). V empiričnem delu strukturirano, to je računsko, tabelarno in grafično izčrpno simuliramo binomski in Black-Scholes potek vrednotenja opcije kot izvedenega finančnega instrumenta in ugotovimo, da se cena opcije bolj približa tržni vrednosti po slednjem, tj. Black-Scholes modelu. Nadalje poskušamo napovedati ceno osnovnega instrumenta v prihodnosti s pomočjo uporabe nevronskih mrež. V zadnjem poglavju so strnjene pomembne ugotovitve zaključne naloge.

Key words documentation

Name and SURNAME: Pia LAP

Title of final project paper:
Simulation of the Binomial and Black-Scholes option pricing model

Place: Koper

Year: 2014

Number of pages: 48 Number of figures: 15 Number of tables: 2

Number of appendices: 2 Number of appendix pages: 2 Number of references: 21

Mentor: Assist. Prof. Arjana Brezigar Masten, PhD

Co-Mentor: Rado Pezdir, MsC

Keywords: derivative financial instruments, options, option sensitivity rates, Binomial model, Black-Scholes model, neural networks

Math. Subj. Class. (2010):

Abstract:
The purpose of thesis is to compare the valuation of an European options on two of the most typical mathematical models, i.e. the binominal and the Black-Scholes model. The thesis consists of theoretical and empirical parts. The theoretical part covers an explanation of the most important concepts, associated with options. The following presents factors, which significantly affect the value of the option and explains their influence on the sensitive value of the option (the option sensitivity rates). The empirical part structuraly simulates the binominal and Black-Scholes course of valuating options as a derivative financial instrument. The findings suggest that the price of the option is closest to the market option value, using Black-Scholes model. Furthermore we try to predict the price of the underlying instrument in the future through the use of neural networks. The final chapter includes important findings of the thesis.

Zahvala

Za strokovno usmerjanje in pomoč pri izdelavi zaključne naloge se zahvaljujem mentorici, doc. dr. Arjani Brezigar Masten in somentorju, mag. Radu Pezdirju.

Hvala staršema za izkazano zaupanje in finančno podporo.

Hvala tudi vsem ostalim, ki ste mi vsa ta leta stali ob strani.

Kazalo vsebine

Kazalo tabel

Kazalo slik

Kazalo prilog

Seznam kratic

$CBOE$	Čikaška borza (angl. Chicago Board Options Exchange)
$ZTFI$	Zakon o trgu finančnih instrumentov
NV	Notranja vrednost premije
$B-S$	Black-Scholes
$VARP$	Funkcija, ki omogoča izračun variance v Excelu

1 Uvod

Namen pričujoče zaključne naloge je s pomočjo izbranih matematičnih modelov ovrednotiti vrednost opcije kot izvedenega finančnega instrumenta ter ugotoviti, po katerem izmed modelov se izračunana vrednost opcije najbolj približa tržni ceni opcije.

V uvodnih poglavjih se posvetimo razlagi in opisu finančnega trga, principu njegovega delovanja in opredelitvi izvedenih finančnih instrumentov.

V nadaljevanju so podrobneje predstavljene opcije, vrste opcij ter podan praktični primer evropske opcije, s katerim poskušamo poenostaviti razumevanje predstavljenega izvedenega finančnega instrumenta. Širše so izpostavljeni dejavniki, ki bistveno vplivajo na oblikovanje cene opcije in pojasnjeni njihovi vplivi na občutljivost vrednosti opcije (t.i. opcijske mere občutljivosti).

Zgodovina je pokazala, da obstajajo razhajanja med vrednostjo opcije, izračunano na podlagi matematičnih modelov, in tržno vrednostjo opcije, zato težišče oziroma osrednji del tega zaključnega dela predstavlja analiza primerjave vrednotenja evropske opcije po dveh najbolj tipičnih modelih, binomskem in Black-Scholes modelu. Vprašanje je, pri katerem izmed omenjenih matematičnih modelov se cena opcije najbolj približa realni, torej tržni ceni opcije.

Za konec omenimo t.i. umetne nevronske mreže in z njihovo pomočjo poskušamo napovedati vrednost osnovnega finančnega instrumenta v prihodnosti. V zaključku je na podlagi predhodne simulacije matematičnih modelov podana razrešitev osnovnega vprašanja o izbiri ustreznega modela za ocenjevanje vrednosti opcij.

2 Finančni trg

2.1 Pojem finančnega trga

Finančni trg (angl. financial market) je širok pojem, ki opisuje katerikoli trg, na katerem kupci in prodajalci sodelujejo v menjavi finančnih sredstev, kot so delnice, obveznice, valute in izvedeni finančni instrumenti. [19]

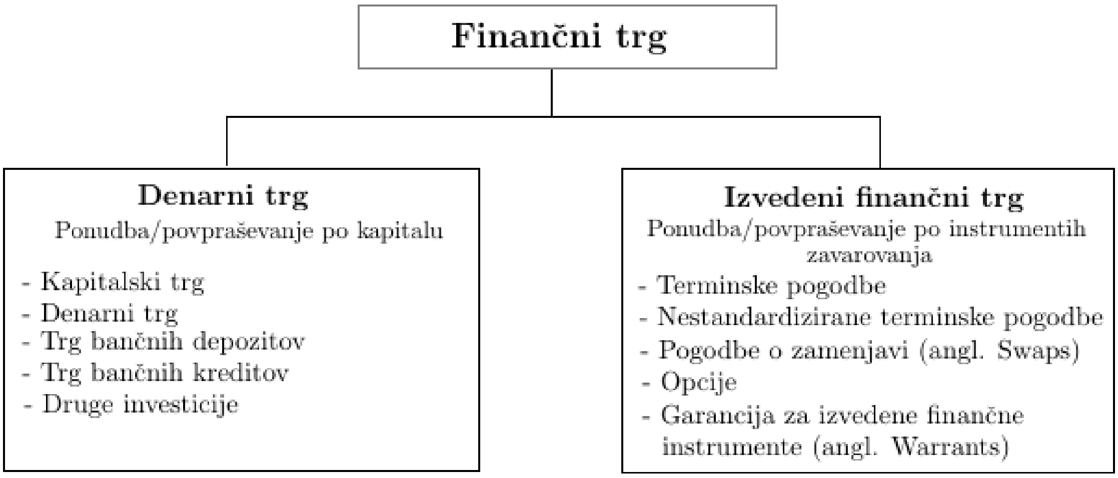
Finančni trg je torej prostor, kjer se srečujeta povpraševanje in ponudba po denarju in kapitalu. Denar pomeni praviloma kratkoročna sredstva (z ročnostjo do enega leta), kapital pa pomeni dolgoročna sredstva (z ročnostjo, daljšo od enega leta). [8]

Trgovati pomeni prodajo ali nakup določenega vrednostnega papirja ali valute. Prostor, kjer se vse to odvija, imenujemo borza. Na borzi ekonomski agenti trgujejo s finančnimi instrumenti z namenom ustvariti nek pozitivni izid (tj. dobiček) ob zapadlosti instrumenta oziroma ob izteku njegovega roka. Seveda obstaja tudi možnost, da bo izid negativen (investitor bo dosegel izgubo). Investitorja torej najbolj zanima vprašanje, ali bo v prihodnosti cena finančnega instrumenta padla ali narasla. Odgovor na to vprašanje nam bo v nadaljevanju podala analiza binomskega modela vrednotenja opcij, ki nam bo poleg ovrednotenja opcije razkrila tudi, kolikšna je verjetnost, da bo cena v prihodnjem obdobju narasla oziroma padla. Pred tem pa se z namenom boljšega razumevanja posvetimo še nekaterim osnovnim pojmom finančnega trga.

2.2 Vrste trgov

Ločimo dve vrsti trgov, finančnega in deviznega, na prvem se trguje z vrednostnimi papirji (delnicami, obveznicami), na drugem pa z nekoliko drugačnimi instrumenti, tj. valutami (zamenjave denarja). Skupna lastnost teh dveh trgov je, da lahko vse instrumente oziroma oblike uvrstimo pod skupni izraz: finančni instrumenti. [8]

Finančni trg v grobem delimo po spodnji shemi [18]:



Slika 1: Shema finančnega trga

2.2.1 Finančni instrument

Finančni instrument ni nič drugega kot pogodba (pravni dogovor), ki ima monetarno (denarno) vrednost oziroma omogoča monetarno transakcijo. S takšno pogodbo pridobi imetnik pogodbe pravico prejeti denar ali kakšen drug finančni instrument po pogojih, ki so določeni v pogodbi. Z drugimi besedami, na podlagi pogodbenega razmerja postane finančni instrument finančno sredstvo pri enem ter hkrati finančna obveznost pri drugem podpisniku pogodbe. [16]

Zakon o trgu finančnih instrumentov (ZTFI) določa in opredeljuje vrste finančnih instrumentov v 7. členu. Najbolj značilni finančni instrumenti so:

1. prenosljivi vrednostni papirji,
2. instrumenti denarnega trga,
3. enote kolektivnih naložbenih podjemov,
4. opcije, terminske pogodbe, posli zamenjave in drugi izvedeni posli v zvezi z vrednostnimi papirji, valutami, obrestnimi merami ali donosi,
5. izvedeni finančni instrumenti za prenos kreditnega tveganja,
6. finančne pogodbe na razlike, idr. [11]

2.2.1.1 Izvedeni finančni instrumenti

Finančni trg je negotov in se nenehno spreminja, s tem pa se spreminjajo tudi cene finančnih instrumentov. Jasno je torej, da trgovanje s seboj prinaša tudi neko tveganje, tj. tveganje za izgubo investicije. To tveganje lahko občutno zmanjšamo, če trgujemo z izvedenimi finančnimi instrumenti (angl. financial derivatives).

Beseda "izvedeni"pomeni, da gre za finančni instrument, katerega cena je izvedena oziroma zasnovana na podlagi cene osnovnega instrumenta (angl. underlying asset). Osnovni instrumenti najpogosteje vključujejo delnice (angl. stocks), obveznice (angl. bonds), surovine (angl. commodities), borzne indekse (angl. stock indices) ali tuje valute (angl. foreign currencies). [2]

Izvedeni finančni instrumenti imajo dvojni namen. V prvi vrsti so namenjeni zavarovanju pred naložbenimi tveganji (npr. zavarovanje pred upadom cene delnice), po drugi strani pa so namenjeni špekulacijam, saj omogočajo trgovanje s finančnim vzvodom. Finančni vzvod omogoča trgovanje s kreditiranjem. Na ta način lahko trgovec trguje z večjimi zneski, kot jih ima dejansko fizično na računu. [6]

Med izvedene finančne instrumente spadajo npr. pogodbe za razliko (angl. contract for difference), standardne terminske pogodbe (angl. futures contract) in opcije (angl. options). [6]

3 Opcije

3.1 Definicija opcij

Opcije so posebni izvedeni (derivirani) finančni instrumenti, ki omogočajo njihovim uporabnikom pravico, ne pa obveznost, da v določenem času ali na določen dan v prihodnosti kupijo ali prodajo določen znesek oziroma količino osnovnih instrumentov oziroma oblik (na katere so opcije napisane) po fiksni, vnaprej določeni ceni. Za to pravico mora uporabnik opcije plačati njenemu prodajalcu določeno premijo (ceno ali vrednost opcije). [8]

Trgovanje z opcijami poteka na Čikaški borzi - Chicago Board Options Exchange (CBOE) že od leta 1973. [2]

Cena oziroma vrednost opcije je odvisna od več dejavnikov, ki jih podrobneje obravnavamo v poglavju 4 te naloge.

V nadaljevanju se podrobneje posvetim delniškim opcijam, saj so le-te najbolj razširjen finančni instrument, s katerim se trguje na borzah.

3.2 Vrste opcij

Opcije običajno razvrščamo v nakupne (angl. call option) in prodajne (angl. put option). Ločimo pa jih tudi glede na to, ali so standardizirane ali ne.

Pri standardiziranih opcijah so parametri opcije določeni v skladu z nekimi standardi. Določena je vrsta opcije, velikost pogodbe (količina osnovnega instrumenta), datum zapadlosti, izvršilna cena in provizije. Med standardizirane opcije uvrščamo ameriške in evropske, pri čemer izraza nikakor nista povezana z lokacijo borze, edina razlika je v času zapadlosti; ameriške opcije je mogoče uporabiti katerikoli dan pred zapadlostjo, medtem ko je evropske opcije možno izvršiti le na dan zapadlosti. [6, 9]

Tako rekoč vsak dan pa se rojevajo nove vrste opcij, imenovane tudi eksotične opcije. Te uvrščamo med nestandardizirane opcije. Nestandardizirane opcije so narejene z namenom, da bi zadostile specifičnim potrebam določenih udeležencev trga. Primeri eksotičnih opcij: opcija za nazaj (angl. lookback option), azijska opcija (angl. Asian option), kričeča opcija (angl. shout option). [9]

3.2.1 Nakupna (call) opcija

Nakupna opcija na določen osnovni instrument daje njenemu imetniku pravico, ne pa tudi obveznost, kupiti osnovni instrument po vnaprej določeni ceni na določen dan v prihodnosti (evropska opcija), v določenem obdobju v prihodnosti (ameriška opcija) ali ob posebni vnaprej dogovorjeni priložnosti (ameriška opcija). [8]

3.2.2 Prodajna (put) opcija

Prodajna opcija na določen osnovni instrument daje njenemu imetniku pravico, ne pa tudi obveznost, prodati osnovni instrument po vnaprej določeni ceni na določen dan v prihodnosti (evropska opcija), v določenem obdobju v prihodnosti (ameriška opcija) ali ob posebni vnaprej dogovorjeni priložnosti (ameriška opcija). [8]

Prodajalec opcije je dolžan na zahtevo kupca izvršiti nakup ali prodajo osnovnega instrumenta, na katerega se glasi opcija, pod pogoji, ki so določeni v opcijski pogodbi. Za to svojo obveznost dobi premijo, ki mu jo plača kupec opcije, ne glede na to, ali bo opcija vnovčena ali ne. [8]

Najpomembnejša elementa vsake opcije sta izvršilna oziroma udarna cena (angl. exercise or striking price) in obdobje do zapadlosti opcije (angl. expiration date). Izvršilna cena je neka vnaprej določena cena v opcijski pogodbi, s katero lahko kupec opcije vnovči pravico iz opcije, tj. nakup ali prodajo osnovnega instrumenta. [8]

Na podlagi primerjave med postavljeno izvršilno ceno in tržno ceno osnovnega instrumenta lahko ugotovimo, ali se opcija splača (angl. in the money) ali se ne splača (angl. out of money) ali je na meji (at the money). [8]

Označimo tržno ceno z S in izvršilno ceno z X. Ločimo nakupno in prodajno opcijo.

1. Nakupna opcija:
   - $S < X$: opcija se ne splača
   - $S = X$: opcija je na meji
   - $S > X$: opcija se splača
2. Prodajna opcija:
   - $S > X$: opcija se ne splača

- $S = X$: opcija je na meji
- $S < X$: opcija se splača

Za lažje razumevanje delovanja opcij bomo uvedli nekaj oznak in si ogledali call in put opcijo na preprostem primeru.

S = prvotna cena delnice (cena delnice v trenutku 0)
S_T = cena delnice na dan zapadlosti opcije
C = cena call opcije
P = cena put opcije
X = izvršilna cena opcije
T = čas do zapadlosti opcije
I = izplačilo opcije na dan zapadlosti

3.2.3 Primer evropske opcije

Vzemimo za primer Google delnico, ki na borzi kotira pod imenom GOOG (GOOGLE INC.).

Tržna cena delnice dne 22.8.2014 znaša $S = \$583,37$, izvršilna nakupna cena pa $X = \$582,5$. Datum zapadlosti opcije je $T = 7$ dni (29.8.2014).

3.2.3.1 Call opcija

Odločimo se za nakup opcije na to delnico (kupimo call opcijo) in plačamo premijo (ceno opcije), ki znaša C = \$5,2843.

Opomba: Premija je vezana na opcijo (ne na število delnic, ki jih opcija določa) in se na koncu odšteje od dobička. Ko odštejemo še premijo, dobimo čisti dobiček.

Na dan dospetja opcije sta možna dva scenarija:

1. *Cena delnice na dan zapadlosti opcije znaša $S_T = \$590$ ($S_T > X$, opcija se splača)*

   V tem primeru smo naredili \$2,2157 čistega dobička (kot kupec opcije imamo na dan zapadlosti opcije pravico kupiti delnico po ceni \$582,5, čeprav je trenutna cena višja - saj smo si to zagotovili s plačilom premije; delnico tako lahko prodamo naprej po trenutni ceni \$590).

   Naš dobiček: $I = S_T - X = \$590 - \$582,5 = \$7,5$. Ko odštejemo še plačano premijo, znaša čisti dobiček $\$7,5 - \$5,2843 = \$2,2157$.

2. *Cena delnice na dan zapadlosti opcije znaša S_T = $580 ($S_T < X$, opcija se ne splača)*

   V tem primeru pustimo, da nam opcija zapade, saj ne bi bilo smiselno kupovati delnice po izvršilni ceni $582,5, če jo lahko na trgu kupimo ceneje, tj. po ceni $580. V tem primeru imamo izgubo v višini plačane premije, torej $5,2843.

3.2.3.2 Put opcija

Odločimo se za nakup te opcije (kupimo put opcijo) - plačamo premijo (ceno opcije), ki znaša, P = $4,3966.

Ponovno sta možna dva scenarija:

1. *Cena delnice na dan zapadlosti opcije znaša S_T = $575 ($S_T < X$, opcija se splača)*

   V tem primeru smo naredili $3,1034 čistega dobička (kot kupec put opcije imamo na dan zapadlosti opcije pravico prodati delnico po ceni $582,5, čeprav je trenutna cena nižja - saj smo si to zagotovili s plačilom premije; delnico tako lahko kupimo po ceni $575 in jo prodamo naprej po ceni $582,5).

   Naš dobiček: $I = X - S_T = \$582,5 - \$575 = \$7,5$. Ko odštejemo še plačano premijo, znaša čisti dobiček $\$7,5 - \$4,3966 = \$3,1034$.

2. *Cena delnice na dan zapadlosti opcije znaša S_T = $585 ($S_T > X$, opcija se ne splača)*

   V tem primeru smo v izgubi za višino premije, tj. $4,3966.

Pomembna ugotovitev je sledeča: v kolikor pričakujemo rast cene osnovnega instrumenta, se bomo vedno odločili za nakup call opcije, in obratno; pričakovan padec cene bo pomenil nakup put opcije.

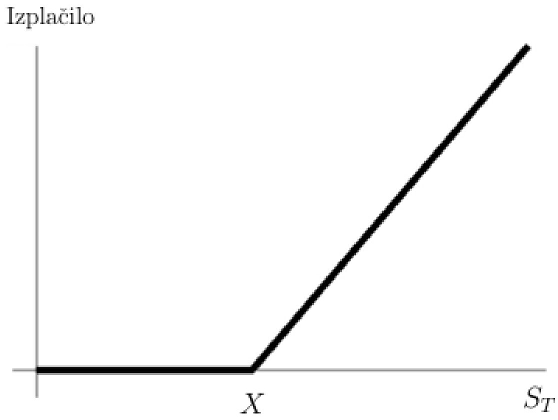
Cena $\downarrow$ = PUT

Cena $\uparrow$= CALL

Matematično gledano sta izplačili evropske call in put opcije naslednji (brez upoštevanja premije):

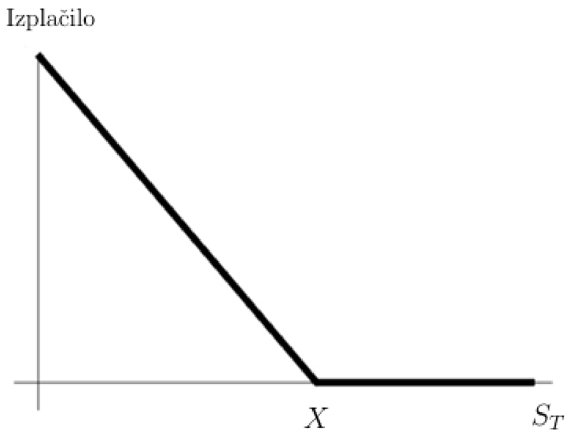
- call opcija: $I = max(S_T - X, 0)$
- put opcija: $I = -max(S_T - X, 0)$ oziroma $max(X - S_T, 0)$

Grafični prikaz izplačila call in put opcije (brez upoštevanja premije):



Slika 2: Izplačilo call opcije

Dokler se cena delnice S_T giblje pod izvršilno ceno X, je izplačilo enako 0. Ob premiku S_T nad abscisno osjo bo naše izplačilo pozitivno. [2]



Slika 3: Izplačilo put opcije

Dokler se cena delnice S_T giblje nad izvršilno ceno X, je izplačilo enako 0. Ob premiku S_T pod abscisno osjo bo naše izplačilo pozitivno. [2]

4 Dejavniki oblikovanja cene opcije

V nadaljevanju si bomo pogledali parametre, ki najbolj bistveno vplivajo na oblikovanje cene delniške opcije oziroma premije.

Delniške opcije so izvedene iz delnice, na katero se nanašajo. Zbašnik trdi (*Opcije in drugi terminski (izvedeni) finančni instrumenti*), da je najpomembnejši dejavnik oblikovanja premije oziroma delniške opcije njena tekoča tržna cena. Nakupna opcija na dražjo delnico je višja od tiste na cenejšo delnico, pri prodajni opciji pa velja ravno obratno; prodajna opcija na cenejšo delnico bo višja od tiste na dražjo delnico. [10]

Premija je sestavljena iz notranje in časovne vrednosti. Znotraj vsake izmed omenjenih vrednosti ponovno ločimo primera call in put opcije. [12]

Notranja vrednost (angl. intrinsic value, v nadaljevanju NV) je absolutna vrednost razlike med trenutno ceno osnovnega instrumenta in izvršilno ceno opcije.

- NV nakupne opcije se izračunava iz razlike med trenutno tržno ceno osnovnega instrumenta in izvršilno ceno: $NV_C = S - X$
- NV prodajne opcije se izračunava iz razlike med izvršilno ceno in tržno ceno osnovnega instrumenta: $NV_P = X - S$ [12]

Druga pomembna sestavina cene opcije, časovna vrednost, se izračunava na podlagi razlike med ceno opcije in notranjo vrednostjo.

Časovna vrednost je odvisna od dveh parametrov:

1. *časa do zapadlosti opcije*: daljši kot je čas do zapadlosti opcije, višja bo cena premije, saj obstaja večja verjetnost, da se bo v daljšem časovnem obdobju uresničila rast cene osnovnega instrumenta (nakupna opcija) oziroma padec cene osnovnega instrumenta (prodajna opcija)
2. *volatilnosti osnovne vrednosti*: opcija na osnovni instrument z močnim nihanjem bo vedno dražja od tiste z majhnim cenovnim nihanjem. [8, 12]

Najpomembnejši dejavniki oblikovanja cene premije so torej: osnovna vrednost, izvršilna cena, volatilnost, čas do dospetja. Na tem mestu omenimo še dva dejavnika, ki vplivata na višino premije: obrestna mera za naložbe brez tveganja (npr. državne obveznice) in dividenda, ki bo izplačana med trajanjem opcije. [10]

Netvegana obrestna mera pomeni teoretično stopnjo donosa investicije, če tveganje za finančno izgubo ni prisotno. Ta mera pomeni, da bo investitor v določenem časovnem obdobju iz absolutno netvegane naložbe pričakoval donos v višini netvegane obrestne mere. [20]

Za lažjo predstavo si dejavnike in njihov vpliv na nakupno/prodajno opcijo ponazorimo s spodnjo tabelo.

Višja osnovna vrednost finančnega instrumenta (ali višje obrestne mere) bo pomenila višjo nakupno premijo in nižjo prodajno premijo, pri izvršilni ceni (in dividendah) velja ravno obratno, višja izvršilna cena bo pomenila nižjo nakupno in višjo prodajno premijo. Rast volatilnosti osnovnega instrumenta bo povzročila dvig cene tako nakupne kot prodajne opcije, enako velja za čas do dospetja.

Tabela 1: Vpliv pomembnih dejavnikov na oblikovanje premije

Dejavnik	Nakupna opcija (call)	Prodajna opcija (put)
Osnovna vrednost $\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Downarrow$
Izvršilna cena $\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
Volatilnost $\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Uparrow$
Čas do dospetja $\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Uparrow$
Dividende $\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
Obrestne mere $\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Downarrow$

4.1 Opcijske mere občutljivosti

Opcijske mere občutljivosti merijo vpliv majhne spremembe posameznega parametra (osnovna vrednost, čas do dospetja, volatilnost, obrestna mera) na vrednost opcije. Označimo jih z grškimi črkami.

1. Delta (δ)

   Parameter delta meri občutljivost cene opcije glede na spremembo cene osnovnega sredstva. Pove nam za koliko enot se spremeni vrednost opcije, če se cena osnovnega sredstva poviša za eno enoto (ob vseh ostalih nespremenjenih dejavnikih). Ta parameter zavzame neko vrednost med -1 in 1. Pri call opcijah je delta pozitivna, pri put opcijah je negativna.

Primer: Predpostavimo, da kupimo call opcijo na delnico Oracle z delto 0,35, cena delnice Oracle naj bo \$21,48. Razlaga je naslednja: če bo cena delnice narasla na \$22,48, bo opcija narasla za \$0,35. Če bo cena delnice padla na \$20,48, bo opcija padla za \$0,35. [13]

2. Gamma (γ)

   Gamma je stopnja spremembe delte glede na vrednost osnovnega sredstva. Za razliko od delte je gamma vedno neka pozitivna vrednost, tako pri call kot pri put opcijah. Razlog za to je, da povišanje vrednosti osnovnega sredstva pri nakupni opciji vedno pomeni višjo premijo in znižanje te vrednosti pri prodajni opciji vedno pomeni višjo premijo. Gamma bo večja pri opcijah na meji (at the money) in drastično manjša pri opcijah, ki se splačajo in pri opcijah, ki se ne splačajo (in the money, out of money). [13]

3. Theta (θ)

   Theta nam pove, kolikšna je sprememba vrednosti opcije v razmerju do enote časa. Theta po večini zavzame negativno vrednost (s časom se bližamo zapadlosti opcije, to pa pomeni, da pada opcijska vrednost). [8]

4. Vega (τ)

   Nekateri vego označujejo tudi z lambdo (λ), sigmo (σ) ali kappo (κ). [2]
   Vega meri občutljivost cene opcije glede na spremembo v volatilnosti osnovnega instrumenta. Vega se ne spreminja veliko, razen če pride do velike spremembe v razmerju med ceno osnovnega instrumenta in izvršilno ceno (večja kot bodo nihanja, višja bo cena opcije).

   Primer: Če je vega opcije enaka 0,15 in se nestanovitnost oziroma volatilnost poveča za 1%, se bo vrednost opcije povečala za isti znesek, tj. \$0,15. [5]

5. Rho (ρ)

   Rho nam pove, kolikšna bo sprememba v ceni opcije ob 1% spremembi netvegane obrestne mere osnovnega instrumenta. [15]

5 Vrednotenje opcij

V prejšnjem poglavju smo spoznali dejavnike, ki vplivajo na oblikovanje cene opcije. Obstaja veliko matematičnih modelov, na podlagi katerih je s pomočjo podatkov o dejavnikih moč izračunati vrednost opcije. Hull navaja tri najpomembnejše:

1. *Binomski model* (ameriške in evropske opcije)

2. *Black-Scholes model* (evropske opcije)

3. *Modeli zasnovani na metodi Monte Carlo* (eksotične opcije)

Pri vrednotenju opcij se vselej pojavlja problem ali vprašanje, kolikšno vrednost pripisati opciji v nekem času. V kolikor plačila premije ne bi bilo, je jasno, da bi lahko udeleženci trga ustvarjali dobičke brez kakršnegakoli tveganja. [6]

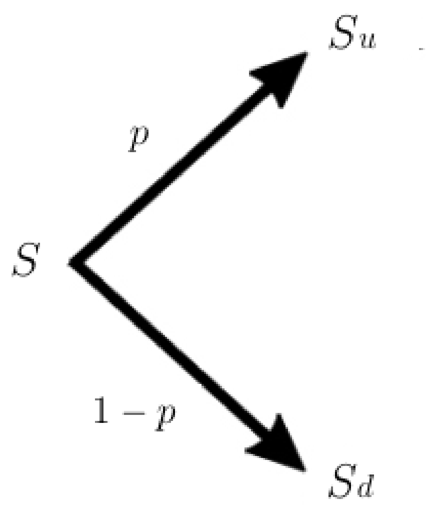
Opcijo poskušamo v nadaljevanju ovrednotiti po binomskem in Black-Scholes modelu, gre namreč za dva najbolj tipično uporabljena modela vrednotenja opcij v praksi. Namen vrednotenja je ugotoviti, kateri izmed modelov je zanesljivejši pri vrednotenju evropske nakupne opcije oziroma pri katerem modelu je cena opcije najbližja realni ceni opcije, izračunani na Čikaški borzi, tj. tisti, ki jo na koncu plačamo.

5.1 Binomski model vrednotenja realnih opcij

Dokaj zapleten model Blacka in Scholesa so leta 1979 poskušali poenostaviti John C. Cox, Stephen A. Ross in Mark Rubinstein, ki so svoj model zasnovali na principu diskretnega časovnega pristopa. Tako jim je uspelo obiti zelo zahtevne matematične formule v modelu Blacka in Scholesa in z osnovnimi matematičnimi veščinami priti do zelo podobnega rezultata. [7]

Binomski model vrednotenja opcij predpostavlja osnovni instrument, katerega cena na koncu vsakega časovnega obdobja lahko zavzame eno izmed dveh vrednosti: višjo vrednost S_u (angl. stock moves up) z verjetnostjo p ali nižjo vrednost S_d (angl. stock moves down) z verjetnostjo $1 - p$. Pri tem velja: $0 < p < 1$.

Ponazorimo grafično:



Slika 4: Enostopenjski binomski model vrednotenja opcij

Spremenljivki u in d nam povesta, za koliko se bo vrednost delnice v naslednjem časovnem trenutku povečala (u - stock goes up) oziroma za koliko se bo ta vrednost zmanjšala (d - stock goes down).

Da bi ovrednotili nakupno/prodajno opcijo potrebujemo sledeče:

- tržno ceno osnovnega instrumenta S,
- izvršilno ceno X,
- čas do zapadlosti opcije T,
- število binomskih korakov N, na katere bo razdeljen čas T (vsak korak bo dolžine $\Delta t = T/N$),
- letno netvegano obrestno mero r (vsaka denarna enota, investirana v netvegani instrument v trenutku t=0, bo v Δt letih vredna $e^{r\Delta t}$),
- volatilnost cene delnice σ.

Opis poteka vrednotenja opcije je prikazan v nadaljevanju.

S pomočjo volatilnosti in časa do zapadlosti opcije lahko izračunamo faktorja u in d, in sicer po formuli:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{1}$$

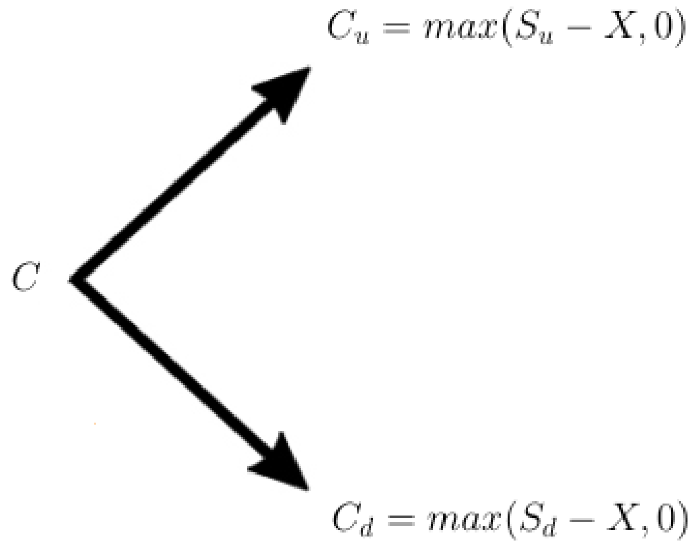
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u} \tag{2}$$

Ko enkrat imamo u in d, lahko po naslednji formuli izračunamo verjetnost p in $1 - p$.

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{3}$$

Z omenjenimi vrednostmi lahko sestavimo binomsko drevo gibanja cene osnovnega instrumenta.

Na drugi strani je potrebno sestaviti še drevo, ki bo prikazovalo gibanje cene nakupne ali prodajne opcije.



Slika 5: Drevo gibanja cene nakupne opcije

Postopek vrednotenja vedno začnemo na koncu binomskega drevesa in za vsako časovno obdobje izračunamo vrednost opcije. Postopek ponavljamo toliko časa, da pridemo na začetek binomskega drevesa, kjer dobimo končno vrednost nakupne opcije C ali prodajne opcije P.

Vrednost nakupne opcije dobimo po formuli:

$$C = e^{-r\Delta t} \cdot (p \cdot C_u + q \cdot C_d) \tag{4}$$

, kjer je $q = 1 - p$

5.1.1 Binomski model z dvema korakoma (angl. two-period Binomial model)

V tem razdelku si bomo podrobneje pogledali potek vrednotenja izvedenega finančnega instrumenta z dvema časovnima korakoma. Binomski model z dvema korakoma obdobje do zapadlosti opcije razdeli na dve obdobji, kar pomeni, da nam prikaže tri možne cene delnice ob zapadlosti opcije, torej eno več kot tisti z enim korakom.

Opomba: Od sedaj naprej bomo ceno delnice v korakih $0, 1, 2, ..$ označevali z $S(0), S(1), S(2), ..$

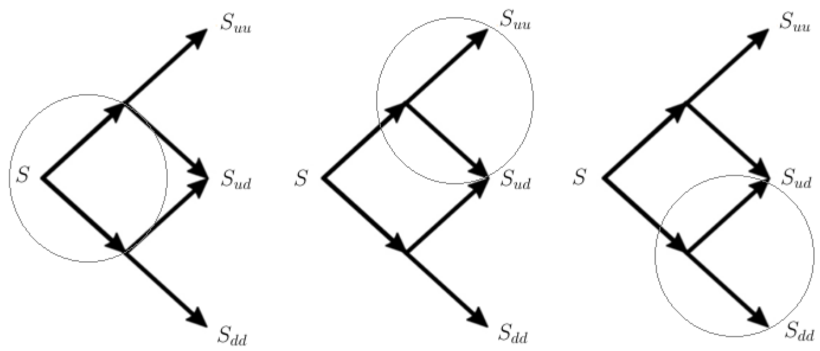
Vemo, da lahko cena delnice $S(0)$ v prvem koraku zavzame dve vrednosti:

$$S(1) = \begin{cases} S_u = S \cdot u & \text{z verjetnostjo } p, \\ S_d = S \cdot d & \text{z verjetnostjo } 1 - p. \end{cases}$$

V drugem koraku cena delnice zavzame eno izmed spodnjih treh vrednosti:

$$S(2) = \begin{cases} S_{uu} = S_u \cdot u & \text{z verjetnostjo } p^2, \\ S_{ud} = S_u \cdot d = S_d \cdot u & \text{z verjetnostjo } p(1-p), \\ S_{dd} = S_d \cdot d & \text{z verjetnostjo } (1-p)^2. \end{cases}$$

Na spodnji sliki si lahko ogledamo drevo z dvema korakoma, ki je sestavljeno iz poddreves z enim korakom. Najlažje bomo postopek vrednotenja razumeli na primeru.



Slika 6: Dvostopenjski binomski model vrednotenja opcij

Primer: Vzemimo evropsko nakupno opcijo na delnico Google s sledečimi podatki:

$S = \$583, 37$ (tržna cena)
$X = \$582, 5$ (izvršilna cena)
$\sigma = 14, 99\%$ (volatilnost)
$T = 7$ dni oziroma $7/365$ izraženo v letih (čas do zapadlosti)
$r = 0, 1555\%$ (netvegana obrestna mera)

Tržna cena delnice torej znaša \$583,37. Prvotna cena delnice bo v prihodnjem obdobju z verjetnostjo p (izračunana v nadaljevanju) narasla za u ali padla za d. Izračunajmo u in d.

$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{\frac{7}{365}}{2} = 0, 0096$

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0{,}1499\sqrt{0{,}0096}} = 1,0148$

$d = \frac{1}{u} = \frac{1}{1{,}0148} = 0,9854$

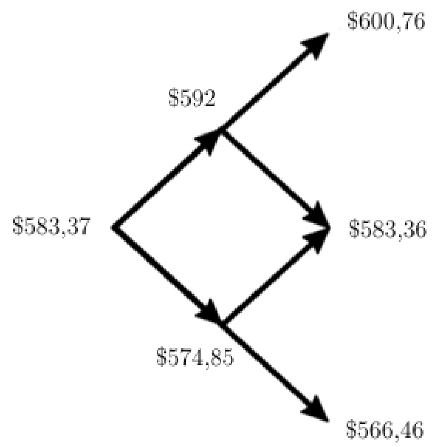
Sestavimo binomsko drevo z dvema korakoma:

1. korak:

$$S(1) = \begin{cases} S_u = \$592 & \text{z verjetnostjo } p, \\ S_d = \$574,85 & \text{z verjetnostjo } 1-p. \end{cases}$$

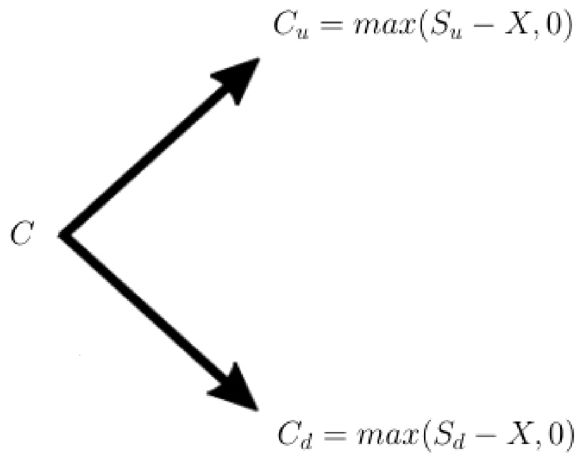
2. korak:

$$S(2) = \begin{cases} S_{uu} = \$600,76 & \text{z verjetnostjo } p^2, \\ S_{ud} = \$583,36 & \text{z verjetnostjo } p(1-p), \\ S_{dd} = \$566,46 & \text{z verjetnostjo } (1-p)^2. \end{cases}$$



Slika 7: Drevo gibanja cene delnice (dva koraka)

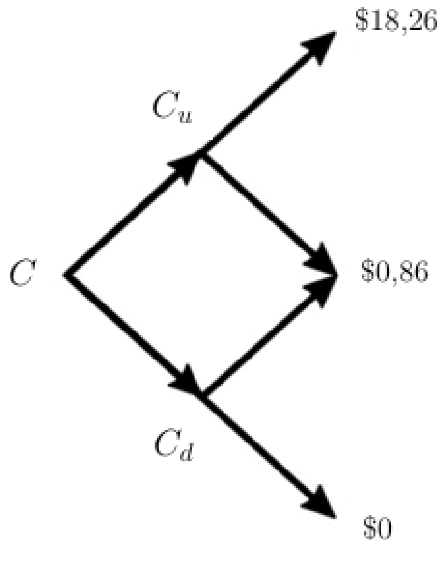
Podatke o gibanju cene delnice v prihodnjih dveh obdobjih smo sedaj pridobili. Sestaviti moramo še drevo gibanja cene opcije. V binomskem modelu z enim korakom prihodnji ceni opcije (C_u, C_d) dobimo po naslednjem vzorcu:



Slika 8: Drevo gibanja cene nakupne opcije (en korak)

V dvostopenjskem modelu bo slika nekoliko drugačna: 2. korak sledi zgornjemu vzorcu, 1. in 0. korak pa posebni formuli, opisani v (4).

2. korak:



Slika 9: Drevo gibanja cene nakupne opcije (dva koraka)

1. korak:

$C_u = e^{-r\Delta t} \cdot (p \cdot C_{uu} + q \cdot C_{ud})$

Potrebujemo še vrednost p:

$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} = \frac{e^{0,001555 \cdot \frac{\frac{7}{365}}{2}} - 0,9854}{1,0148 - 0,9854} = 0,5$

Vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo:

$C_u = e^{-0,001555 \frac{\frac{7}{365}}{2}} \cdot (0,5 \cdot \$18,26 + 0,5 \cdot \$0,86) = \$9,56$

C_d dobimo na podoben način kot C_u, le da v formuli C_{uu} zamenjamo s C_{ud} in C_{ud} zamenjamo s C_{dd}. C_d = \$0,43.

In končno dobimo vrednost call opcije na izbrano delnico, $C = \$4,99$.

0. korak:

$C = e^{-r\Delta t}(p \cdot C_u + q \cdot C_d)$

$C = e^{-0,001555 \frac{\frac{7}{365}}{2}} \cdot (0,5 \cdot \$9,56 + 0,5 \cdot \$0,43)$

$C =$ **\$4,99**

Ob zapadlosti opcije so možni 4 scenariji:

1. Cena v prvem koraku \$592, v drugem koraku \$600,76 ($S_T > X$)
2. Cena v prvem koraku \$592, v drugem koraku \$583,36 ($S_T > X$)
3. Cena v prvem koraku \$574,85, v drugem koraku \$583,36 ($S_T > X$)
4. Cena v prvem koraku \$574,85, v drugem koraku \$566,46 ($S_T < X$)

Opcijo bi bilo smiselno vnovčiti le pri 1. scenariju. Pri ostalih treh bi pustili da nam opcija zapade. Pri 2. in 3. scenariju se opcija sicer splača, saj je tržna cena višja od izvršilne, vendar ne tako zelo visoka da bi pokrila tudi strošek plačane opcije (\$4,99).

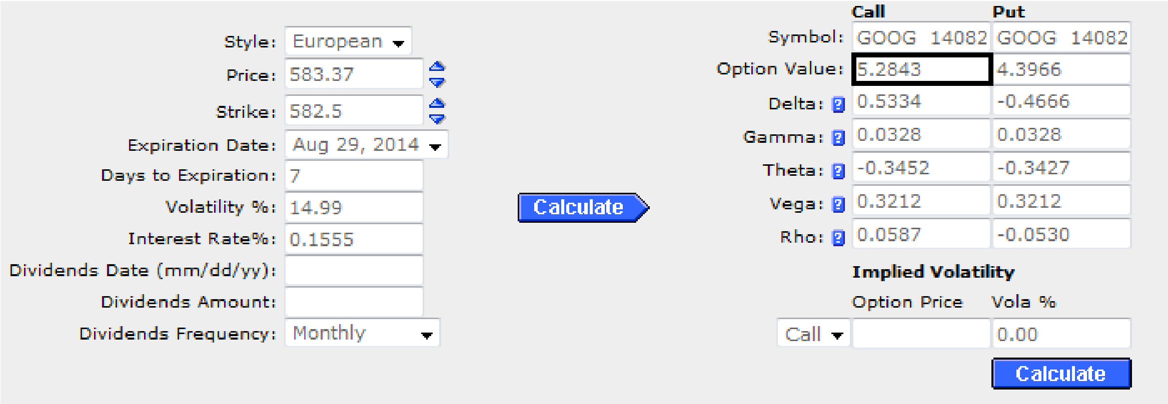
Poglejmo si, kakšno bi bilo izplačilo, če bi cena v drugem koraku znašala \$600,76. Spomnimo se, izvršilna cena je bila \$582,5.

$I = \alpha \cdot (S_T - X) - C$, kjer je α število delnic (predpostavimo $\alpha = 1$).
$I = (\$600,76 - \$582,5) - \$4,99 = \$13,27$

Zaslužili bi torej le v primeru, če bi cena v obeh korakih narasla. To bi se zgodilo z verjetnostjo $p^2 = 0,5^2 = 0,25$ ali 25%.

<u>Opomba:</u> Natančnejši izračuni so podani v Prilogi A.

Za nakup evropske call opcije na delnico Google bomo na Čikaški borzi odšteli \$5,2843. [15]



Slika 10: CBOE izračun cene evropske nakupne opcije na delnico Google

Kaj nam torej povedo grške črke?

Delta (δ) nam pove, za koliko se bo cena opcije povečala ali zmanjšala v odvisnosti od spremembe cene osnovnega instrumenta. Konkretno, v našem primeru, če bo cena delnice narasla na \$584,37, bo cena opcije narasla v višini delte, torej za \$0,5334.

Gamma (γ) nam pove, za koliko se bo spremenila delta, če se cena osnovnega sredstva spremeni za \$1. Če torej cena delnice naraste za \$1, bo delta narasla v višini game, tj. 0,0328; delta bo znašala 0,5334+0,0328 = 0,5662

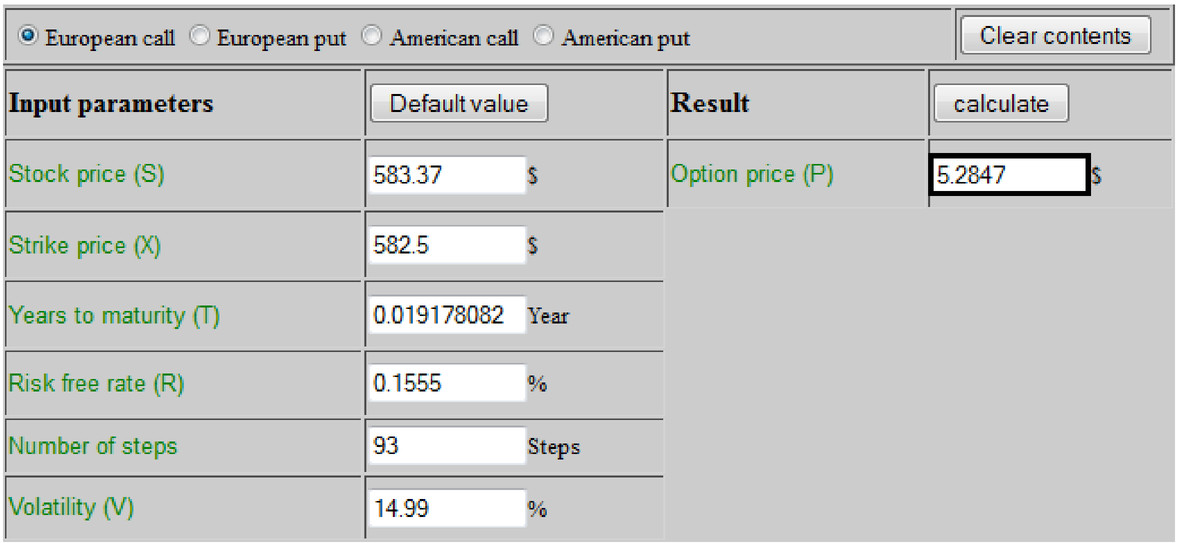
Podatek -0,3452 (Theta (θ)) izda, da bo vsak dan cena call opcije padla za to isto vrednost. Jutri bo tako opcija vredna \$4.9391 (\$5,2843 - \$0,3452).

V kolikor pride do spremembe v volatilnosti v višini 1%, bo cena opcije dražja za \$0,3212. (Vega (τ)).

Rast netvegane obrestne mere za 1% bo povzročila rast cene opcije za vrednost Rho-ja (ρ), tj. \$0,0587.

Če primerjamo dobljeni vrednosti, \$5,2843 (CBOE) in \$4,99 (binomski model), vidimo, da se razlikujeta v višini \$0,2943. Binomski model je namreč zasnovan tako, da je potrebno narediti nekaj več kot le 2 koraka, da bo cena nakupne opcije kar se da najbližja realni tržni ceni opcije. Razlog za to tiči v tem, da binomski model z dvema korakoma prikaže le tri možne cene osnovnega instrumenta po pretečenem obdobju do zapadlosti opcije, kar pa vsekakor ni relevantno glede na dejansko stanje na trgu, kjer se cene finančnih instrumentov nenehno spreminjajo. Potrebno je sestaviti binomsko drevo s čim večjim številom korakov, ker le tako vidimo vse vrednosti, ki jih lahko delnica zavzame na datum zapadlosti opcije. Poznavanje vseh možnih vrednosti delnice na datum zapadlosti opcije bo med drugim povečalo tudi število scenarijev, po katerih bi se nam opcijo splačalo vnovčiti.

Z našimi podatki se cena opcije najbližje približa realni ceni šele v 93. koraku, računanje "na roke" bi bilo tako zelo zamudno. Na pomoč nam priskočijo "online" kalkulatorji. [14]



Slika 11: Binomski kalukator

V prvi vrsti nam verjetnosti p in $1-p$ veliko olajšata računanje cene opcije, po drugi strani pa nam ne povesta kaj dosti o pričakovani vrednosti cene delnice. Finančni trg je namreč zasnovan tako, da so vsi podatki skrbno premišljeni in podani na način, da sta p in q zelo blizu druga drugi, tako kot v našem primeru - razlike med njima sploh ni. Primera, da bi bil p enak npr. 85% in q enak 15% in bi se kot investitor odločili za nakup call opcije, saj bo cena s 85% verjetnostjo v prihodnjem obdobju narasla, mi pa bomo imeli pravico kupovati delnice po nižji ceni in jih nato prodajati po višji, v finančnem svetu skoraj zagotovo ne bomo našli.

5.2 Black-Scholes model

Skoraj sočasno z odprtjem prve opcijske specialistične borze na svetu, Chicago Board Options Exchange (1973), sta Fisher Black in Myron Scholes objavila svojo razpravo o vrednotenju evropskih opcij in formulo za določanje vrednosti opcij. [8]

Black-Scholes model (v nadaljevanju B-S) uvrščamo med tako imenovane verjetnostne modele, saj imamo v B-S formuli med drugim opravka tudi s standardizirano normalno porazdelitvijo.

Najpomembnejša lastnost njunega modela je v predpostavki, da z opcijo njen uporabnik nevtralizira svoje tveganje, kar avtorja imenujeta "idealna odprava tveganja" (angl. perfect hedge). To uporabnik stori tako, da kupi osnovni instrument in hkrati proda opcijo na isti osnovni instrument in obratno; proda osnovni instrument in kupi opcijo na isti osnovni instrument. Pomanjkljivost modela pa se kaže predvsem v neizplačevanju dividend in v omejenosti zgolj na evropske opcije. [1]

Postavke, na podlagi katerih temelji izpeljava B-S modela, so sledeče:

1. Kratkoročna obrestna mera je znana, konstantna in netvegana;
2. Obnašanje tržne cene osnovnega instrumenta usteza log-normalni razporeditvi verjetnosti, pričakovana stopnja donosa osnovnega instrumenta pa normalni razporeditvi verjetnosti;
3. Varianca donosa osnovnega instrumenta je konstantna;
4. Če je osnovni instrument lastniški (delnica), v opcijskem času ni izplačil dividend;
5. Opcija je lahko vnovčena samo ob svoji zapadlosti, to pa pomeni, da formula velja le za tako imenovano evropsko različico opcije;
6. Pri nakupu in prodaji osnovnega instrumenta in opcij na osnovni instrument ni transakcijskih stroškov, provizij, davkov, itd.;
7. Ni arbitražnih priložnosti;
8. Investitorji si lahko sposodijo ali posodijo denar po enaki netvegani (kratkoročni) konstantni obrestni meri;
9. Volatilnost cene osnovnega instrumenta je konstantna. [8]

Arbitraža pomeni izkoriščanje tečajnih razlik istega instrumenta na različnih trgih. Najpogostejši vrsti arbitraže sta arbitraža vrednostnih papirjev ter devizna arbitraža, poznamo pa tudi obrestno arbitražo, pri kateri gre za izkoriščanje razlik v obrestnih merah na istovrstne kredite v različnih državah. [6]

V nadaljevanju bomo podali B-S formulo, pred tem pa moramo podati še nekaj oznak, da si jo bomo lažje interpretirali.

5.2.1 Black-Scholes formula

Označimo sledeče:

$S =$ tržna cena delnice

X = izvršilna cena delnice
r = letna, netvegana obrestna mera
σ = standardni odklon, ki določa volatilnost cene delnice
T = čas do zapadlosti opcije
$N(x)$ = standardizirana normalna porazdelitev

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \tag{5}$$

Z zgornjimi oznakami sta Black in Scholes izpeljala naslednjo formulo:

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2) \tag{6}$$

, kjer je

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \tag{7}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \tag{8}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{9}$$

Pri tem so tržna cena delnice S, izvršilna cena delnice X in čas do zapadlosti opcije T znani podatki. Netvegano obrestno mero r je možno oceniti, varianco σ^2 pa se lahko izračuna iz pretekle spremenljivosti cene delnice ali pa na podlagi trenutne tržne cene opcije. [2]

Opomba: Model je izčrpno predstavljen v [2].

Primer: Vzemimo identične podatke o Google delnici kot v binomskem primeru in izračunajmo ceno opcije po B-S modelu.

S = \$583,37
X = \$582,5
σ = 14,99%
r = 0,1555%
T = 7 dni

Vstavimo podatke v B-S formulo:

$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$

$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{583,37}{582,5}\right)+\left(0,001555+\frac{0,1499^2}{2}\right)\cdot\frac{7}{365}}{0,1499\cdot\sqrt{\frac{7}{365}}}$
$d_1 = 0,084$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$
$d_2 = 0,084 - 0,1499\sqrt{\frac{7}{365}}$
$d_2 = 0,063$

Vrednosti $N(d_1)$ in $N(d_2)$ dobimo v Prilogi B.

$N(d_1) = N(0,08) = 0,5319$
$N(d_2) = N(0,06) = 0,5239$

Končno, po B-S formuli, ceno nakupne opcije dobimo po formuli:

$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r\cdot T} \cdot N(d_2)$
$C = \$583,37 \cdot 0,5319 - \$582,5 \cdot e^{-0,001555\cdot\frac{7}{365}} \cdot 0,5239$
$C =$ **$5,13**

Ko smo opcijo vrednotili po binomskem modelu smo po 93. koraku dobili $5,2847. Točna vrednost po B-S (Priloga A) pa znaša $5,2841. CBOE vrednost znaša $5,2843 (Slika 10).

Na podlagi primerjave vrednotenja evropske opcije na Google delnico po obeh matematičnih modelih lahko sklepamo, da je v prvi vrsti bolj zanesljiv Black-Scholes model, saj se vrednost nakupne opcije izračunana po tem modelu najbolj približa realni vrednosti, tj. vrednosti na Čikaški borzi.

Postopek vrednotenja evropske nakupne opcije po B-S modelu je sicer enostavnejši kot tisti po binomskem, vendar za razliko od binomskega modela ne razkriva nobenega podatka o gibanju cene osnovnega instrumenta v prihodnosti, kar pa je ključnega pomena za vsakega investitorja. Prednost binomskega modela se kaže tudi v izračunavanju verjetnosti rasti ali padca osnovnega instrumenta. Po binomskem modelu obdobje do zapadlosti opcije razdelimo na več časovnih obdobij, pri čemer lahko v vsakem obdobju za vsako možno zavzeto ceno finančnega instrumenta izračunamo verjetnost, da bo finančni instrument zavzel ravno to vrednost. Na podlagi teh podatkov se potem odločamo o smiselnosti investicije.

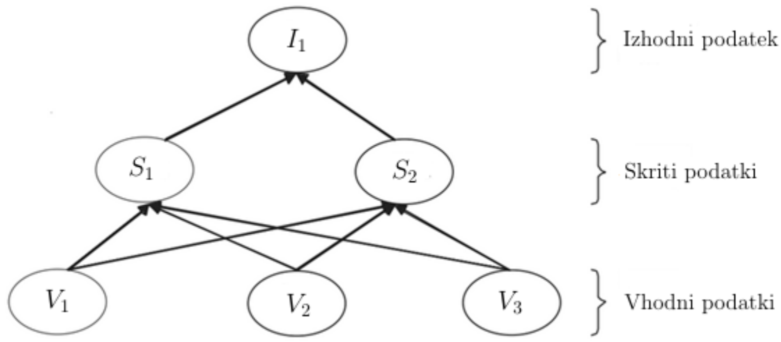
Verjetnost za padec ali rast cene delnice ni zadosten podatek, na podlagi katerega bi se kot dobro poučeni investitor o delovanju opcij in finančnega trga odločili za nakup opcije. Pri vrednotenju Google delnice po binomskem modelu je bila verjetnost za dobiček po pretečenem obdobju do zapadlosti opcije enaka 25%. To je zelo majhna številka, nakup call opcije na to delnico bi lahko bila čista loterija.

Kako se potem odločimo, kaj in v katerem trenutku investirati? Za začetek si je pomembno ogledati zgodovino trgovanja določenega finančnega instrumenta in poskušati izbrati manj volatilen instrument, tj. instrument z manjšim standardnim odklonom, torej instrument, katerega cena v povprečju ne odstopa veliko. Ideja je sledeča: za nakup call opcije se bomo odločili v primeru, da pričakujemo rast cene osnovnega instrumenta in obratno; pričakovan padec cene osnovnega instrumenta bo pomenil nakup put opcije. Naravno vprašanje na tej točki je, ali je mogoče na podlagi zgodovinskih podatkov o osnovnem instrumentu napovedati ceno le-tega v prihodnosti.

6 Nevronske mreže

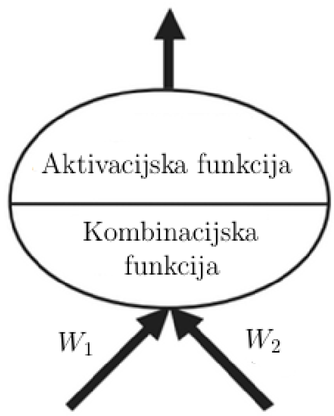
Jasno je, da je ekonomski svet in s tem tudi finančni trg zelo nepredvidljiv in da je prihodnost težko napovedovati, vendar obstajajo programi zasnovani na podlagi tako imenovanih nevronskih mrež, s katerimi je na podlagi zgodovinskih podatkov finančnega instrumenta moč predvideti, koliko bo ta instrument vreden v prihodnosti.

Nevronska mreža, tudi umetna nevronska mreža (angl. neural network) je naprava za obdelavo informacij, ki deluje po vzoru človeških oz. živalskih možganov. Sestavljena je iz množice umetnih nevronov. Nevroni, osnovni gradniki nevronskih mrež, so t.i. pragovne funkcije, ki imajo več različno uteženih vhodnih podatkov, skritih podatkov in en izhodni podatek ter so med seboj povezani. [17]



Slika 12: Nevronska mreža

Nevron opravlja dvojno funkcijo, v prvi vrsti kombinacijsko (angl. combination function) in v drugi aktivacijsko fukcijo (angl. activation function).



Slika 13: Aktivacijska in kombinacijska funkcija

Pri tem kombinacijska funkcija poskuša ustvariti nek vzorec med prejetimi vhodi (angl. inputs) oziroma ugotoviti pravilo, ki povezuje vhodne podatke z izhodnimi, aktivacijska funkcija pa z uporabo različnih funkcij, na primer logistične ali sigmoidne funkcije, generira izhodni podatek. [3]

Kombinacijsko funkcijo opišemo s spodnjo enačbo:

$$y_t = \Theta_0 + \sum_{j=1}^{q} \Theta_j a_{tj} \tag{10}$$

,kjer je y_t izhodni podatek v časovnem trenutku t, a_{tj} vrednost skritega podatka v času t za podatek j, in so Θ_j vhodni parametri. Nevronska mreža prejme skupno q skritih podatkov.

Vrednost skritega podatka v času t za podatek j definiramo kot:

$$a_{tj} = S\left(\sum_{i=1}^{q_j} w_{ji} x_{it}\right) \tag{11}$$

,kjer je x_{it} vhodni podatek za podatek i v času t, w_{ji} pa parameter v j-tem skritem podatku za i-ti izhodni podatek.

Zgoraj opisano funkcijo imenujemo sigmoidna funkcija, pri čemer velja:

$$S(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \tag{12}$$

6.1 Napovedovanje vrednosti osnovnih instrumentov

V nadaljevanju bomo s pomočjo nevronskih mrež poskušali napovedati vrednost Google delnice po pretečenem sedem dnevnem obdobju do zapadlosti opcije. Zanimala nas bo cena ob zaprtju borze.

Za pridobivanje podatkov je bil uporabljen DownloaderXL (dodatek v Excelu), s pomočjo katerega uporabnik lahko naloži zgodovinske podatke o izbrani delnici (v našem primeru Google, oznaka GOOG INC.). Izbrani podatki so bili naloženi od vključno 27.3.2014 do vključno 21.8.2014, skupno torej 103 vnosov. Podatki so bili črpani iz Yahoo!Finance.

DownloaderXL je zajel sledeče:

- datum trgovanja,
- vrednost delnice ob odprtju in zaprtju borze na izbrani datum trgovanja (angl. open/close),
- najvišjo in najnižjo vrednost na izbrani datum trgovanja (angl. high/low),
- ter število izvedenih transakcij na izbrani datum trgovanja (angl. volume).

Ko imamo zbrane podatke, lahko z dodatkom NeuroXL Predictor napovemo, koliko bo čez en teden (tj. dne 29.8.2014) vredna Google delnica. To storimo tako, da za vhodne podatke izberemo vse podatke (open, high, close, low, volume) od 28.3.2014 do 22.8.2014, za izhodne pa stolpec s cenami ob zaprtju borze na dotični dan trgovanja (close). Nadalje NeuroXL omenjene podatke sprocesira na način, da ustvari vzorec čimbolj podoben vzorcu gibanja cene v preteklosti. Nato izberemo še izhodni podatek, tj. tisto okence v Excelu, v katerem bo prikazan končni rezultat (angl. prediction output).

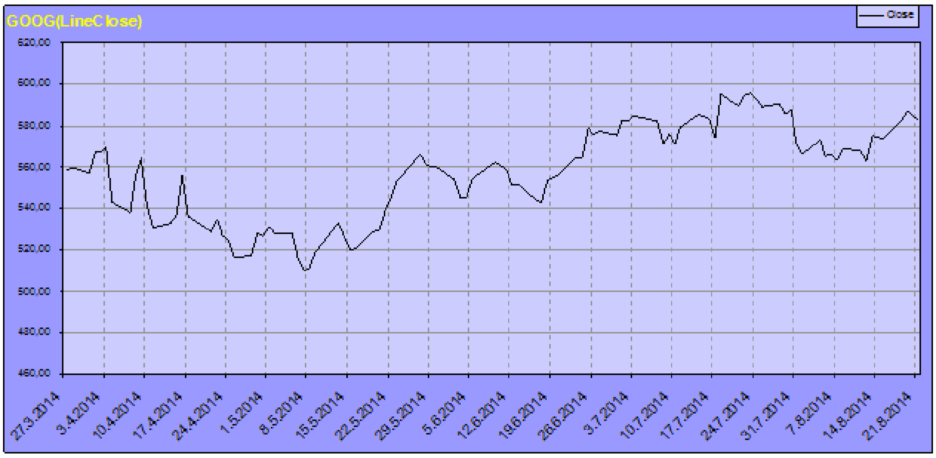
Nevronski napovedovalec je izračunal, da bo dne 29.8.2014 Google delnica vredna $581,7663.

Tabela 2: Podatki o cenah Google delnice za avgust 2014

Datum	Open	High	Low	Close	Volume
1.8.2014	570, 40	575, 96	562, 85	566, 07	1949900
4.8.2014	569, 04	575, 35	564, 10	573, 15	1423400
5.8.2014	570, 05	571, 98	562, 61	565, 07	1547000
6.8.2014	561, 78	570, 70	560, 00	566, 37	1330700
7.8.2014	568, 00	569, 89	561, 10	563, 36	1107900
8.8.2014	563, 56	570, 25	560, 35	568, 77	1490700
11.8.2014	569, 99	570, 49	566, 00	567, 88	1211400
12.8.2014	564, 52	565, 90	560, 88	562, 73	1537800
13.8.2014	567, 31	575, 00	565, 75	574, 78	1437900
14.8.2014	576, 18	577, 90	570, 88	574, 65	982800
15.8.2014	577, 86	579, 38	570, 52	573, 48	1515000
18.8.2014	576, 11	584, 51	576, 00	582, 16	1280600
19.8.2014	585, 00	587, 34	584, 00	586, 86	976000
20.8.2014	585, 88	586, 70	582, 57	584, 49	1033900
21.8.2014	583, 82	584, 50	581, 14	583, 37	912300
22.8.2014	583, 946	585, 6098	578, 5602	582, 9054	814803, 3
25.8.2014	583, 8117	586, 6394	578, 5962	582, 2372	1071248
26.8.2014	583, 5406	586, 2345	578, 3317	580, 7568	1201486
27.8.2014	581, 3705	585, 6781	577, 7678	581, 1995	1219499
28.8.2014	585, 2298	585, 2418	577, 3484	580, 7524	1230300
29.8.2014	581, 2696	585, 6273	577, 5835	**581,7663**	1196190

Če bo temu res tako, potem se nam naša nakupna opcija ne bo splačala, saj bo tržna cena nižja od izvršilne ($S_T < X$). Tudi prodajna opcija ne pride v poštev, čeprav je tržna cena nižja od izvršilne kar v teoriji sicer pomeni zeleno luč za nakup prodajne opcije, vendar temu ni tako v tem primeru; ko od dobička odštejemo še premijo dobimo negativno vrednost, in s tem ustvarimo izgubo.

Spodnji graf prikazuje gibanje cene Google delnice (cena ob zaprtju na dotični dan trgovanja) v obdobju od 27.3.2014 do 21.8.2014.



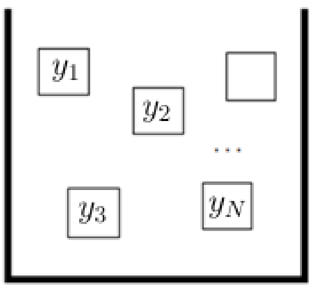
Slika 14: Gibanje cene Google delnice ob zaprtju borze (naključno izbran dan v mesecu; marec 2014 - avgust 2014)

6.1.1 Volatilnost cene finančnega instrumenta

Pred začetkom kakršnih koli statističnih analiz običajno predstavimo opisne statistike vseh spremenljivk. Poleg aritmetične sredine običajno preverimo tudi mere variabilnosti oz. razpršenosti, tj. varianco in standardni odklon. [21] Standardni odklon je tisti, s katerim merimo volatilnost neke spremenljivke, v našem primeru cene finančnega instrumenta.

6.1.1.1 Osnove statistike

Predpostavimo, da imamo škatlo, v kateri je N listkov, ki so označeni z: y_1, y_2, ... ,y_N.



Slika 15: Škatla z N listki

Povprečje škatle ali pričakovano aritmetično sredino označimo z μ, in izračunamo po formuli:

$$\mu = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \tag{13}$$

Varianca (σ^2) in standardni odklon (σ) sta dve izmed najpogosteje uporabljenih mer variabilnosti oz. razpršenosti enot. Varianca je definirana kot povprečje kvadratov odklonov posameznih vrednosti od aritmetične sredine.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \mu)^2 \tag{14}$$

Standardni odklon je definiran kot kvadratni koren iz variance. S standardnim odklonom lahko izmerimo, kako so razpršene vrednosti okoli aritmetične sredine populacije oz. vzorca. Višja kot je vrednost standardnega odklona, bolj so enote v populaciji oz. vzorcu razpršene in obratno, nižja vrednost kaže na manjšo razpršenost okoli aritmetične sredine. [4, 21]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \mu)^2} = \sqrt{\sigma^2} \tag{15}$$

<u>Primer:</u> Vzemimo škatlo, v kateri imamo naslednjih 6 naključnih števil: 1,1,5,2,3,6

Povprečje škatle bo torej enako vsoti vseh šestih naključnih števil deljeni s številom vseh števil v škatli, tj. $N = 6$:

$\mu = \frac{1+1+5+2+3+6}{6} = 3$

Varianca: $\sigma^2 = \frac{((1-3)^2+(1-3)^2+(5-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(6-3)^2)}{6} = 3,667$

Standardni odklon: $\sigma = \sqrt{3,667} = 1,915$

Sklepamo lahko, da števila v škatli v povprečju odstopajo za 2 standardna odklona.

Vrnimo se nazaj k našemu primeru. Cene Google delnice ob zaprtju borze na dotični dan trgovanja, torej stolpec "Close" s 103 vnosi si lahko predstavljamo kot škatlo, v kateri imamo 103 števil. Računanje na roke bi bilo zamudno, zato v Excelu izberemo funkciji AVERAGE za izračun povprečja in VARP za izračun variance, označimo vseh 103 vrednosti in dobimo naslednje izračune:

$\mu = 558,62$
$\sigma^2 = 518,08$
$\sigma = 22,76142$

Cena naše delnice v povprečju odstopa za skoraj 23 standardnih odklonov, kar je ogromna številka. Na podlagi statističnih podatkov ugotavljamo, da je Google delnica ena izmed bolj volatilnih delnic.

7 Zaključek

Primarni namen opcij je zavarovanje investitorja pred tveganji. Z opcijo namreč zavarujemo svojo naložbo na način, ki nam omogoča odložitev plačila naložbe za določen čas proti plačilu premije. Osnovna vrednost finančnega instrumenta, izvršilna cena, čas do zapadlosti opcije, volatilnost in netvegana obrestna mera so najpomembnejši dejavniki oblikovanja višine premije tako pri binomskem kot pri Black-Scholes modelu.

Primerjavo vrednotenja evropske opcije smo pri obeh matematičnih modelih izvedli na identičnem primeru, tj. na primeru Google delnice. Predpostavili smo enake vrednosti zgoraj omenjenih dejavnikov in ugotavljali, pri katerem modelu se izračunana vrednost opcije najbolj približa realni vrednosti opcije.

Temeljna ugotovitev je sledeča: vrednost opcije na Google delnico se bolj približa tržni vrednosti opcije pri Black-Scholes modelu. Prednosti B-S modela sta predvsem hitrost in natančnost izračunavanja rezultatov, največja pomanjkljivost pa se kaže v omejitvi zgolj na evropske opcije. Z vidika gibanja cene delnice v prihodnosti, zanimale so nas cene Google delnice v naslednjih sedmih dneh, saj smo predpostavljali sedemdnevno obdobje do zapadlosti opcije, se izkaže za bolj uporabnega binomski model. Le-ta razdeli čas do zapadlosti na več vmesnih obdobij in omogoča vpogled v možne cene delnice v vsakem obdobju, kar nam na koncu koristi pri izračunu pričakovanega izplačila investicije. V vsakem koraku binomskega drevesa lahko preverimo možnost predčasne izvršitve opcije, česar nam ravno zaradi omejitve zgolj na evropske opcije, B-S formula ne omogoča. Predčasno je možno izvršiti ameriško opcijo, evropsko lahko izvršimo samo na dan dospetja. Po binomskem modelu lahko tudi izračunamo, kolikšna je verjetnost, da bo izplačilo pozitivno, torej da bomo ustvarili dobiček. Z nevronskim napovedovalcem smo napovedali ceno delnice na dan dospetja opcije in ugotovili, da bo cena padla za $2, torej nakup call opcije v tem primeru odpade. V teoriji bi prišla v poštev prodajna opcija, vendar zaradi višine premije, ki bi jo plačali za nakup te opcije, to ne bi bila smiselna investicija, kajti po odštetju premije od dobička, bi čisti dobiček zavzel negativno vrednost. Standardni odklon ali mera razpršenosti cen Google delnice ob zaprtju borze na dotični dan trgovanja nam je pokazala, da cene v povprečju močno odstopajo, zato bi bilo investirati v tako delnico, vsaj na kratki rok, zelo tvegano dejanje. Ni nepomembno investirati v delnico z nižjim standardnim odklonom.

8 Literatura

[1] F. Black in M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy* 3 (1973), 637–654. *(Citirano na strani 22.)*

[2] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Prentice-Hall International, Inc., Second Edition, 1993. *(Citirano na straneh 4, 5, 9, 12 in 23.)*

[3] D. A. Kendrick, P. Ruben Mercado in H. M. Amman, *Computational Economics*, Princeton University Press, 2006. *(Citirano na strani 27.)*

[4] M. Perman, *Zapiski iz predmeta Statistika*, Univerza na Primorskem, 2013. *(Citirano na strani 31.)*

[5] A. Ritonja, *Vrednotenje in strategije trgovanja z opcijami*, Diplomsko delo, Univerza v Mariboru, 2010. *(Citirano na strani 12.)*

[6] M. Tovšak, *Diskretni matematični modeli in algoritmi za vrednotenje delniških opcij*, Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, 2011. *(Citirano na straneh 4, 5, 13 in 22.)*

[7] A. Učakar, *Uporaba opcij pri vrednotenju podjetij*, Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, 2009. *(Citirano na strani 13.)*

[8] D. Veselinovič, *Opcije in drugi terminski (izvedeni) finančni instrumenti*, Gospodarski vestnik, 1998. *(Citirano na straneh 2, 5, 6, 10, 12, 21 in 22.)*

[9] D. Zbašnik, *Mednarodne poslovne finance*, Ekonomsko-poslovna fakulteta, Univerza v Mariboru, Tretja izdaja, 2001. *(Citirano na straneh 5 in 6.)*

[10] D. Zbašnik, *Mednarodno finančno ravnanje*, Ekonomsko-poslovna fakulteta, Univerza v Mariboru, 1999. *(Citirano na straneh 10 in 11.)*

[11] Zakon o trgu finančnih instrumentov, *(ZTFI - Uradni list RS, st. 108/10 - uradno prečiščeno besedilo, 78/11, 55/12, 105/12 - ZBan-1J in 63/13 - ZS-K)*, . *(Citirano na strani 3.)*

[12] Opcije, *finport.si*, `http://www.finport.si/Dokument.aspx?ID=7&mID=14`, Dostop: 14. 7. 2014. *(Citirano na strani 10.)*

[13] Jim Graham: Using "The Greeks" To Understand Options, *investopedia.com*, `http://www.investopedia.com/articles/optioninvestor/04/121604.asp`, Dostop: 27. 7. 2014. *(Citirano na strani 12.)*

[14] Binomial Option Calculator, *mngt.waikato.ac.nz*, `http://www.mngt.waikato.ac.nz/kurt/frontpage/studentwork/danielchainov2003/bitree2.htm`, Dostop: 21. 8. 2014. *(Citirano na strani 21.)*

[15] Chicago Board Options Exchange (CBOE), *cboe.com*, `http://www.cboe.com`, Dostop: 22. 8. 2014. *(Citirano na straneh 12 in 20.)*

[16] Finančni instrument, *financnislovar.com*, `http://www.financnislovar.com/definicije/financni-instrument.html`, Dostop: 15. 7. 2014. *(Citirano na strani 3.)*

[17] Nevronska mreža, *sl.wikipedia.org*, `http://sl.wikipedia.org/wiki/Nevronska_mrea`, Dostop: 5. 8. 2014. *(Citirano na strani 26.)*

[18] Financial Market, *six-swiss-exchange.com*, `http://www.six-swiss-exchange.com/knowhow/exchange/financial_market_en.html`, Dostop: 15. 7. 2014. *(Citirano na strani 2.)*

[19] Financial Market, *investopedia.com*, `http://www.investopedia.com/terms/f/financial-market.asp`, Dostop: 15. 7. 2014. *(Citirano na strani 2.)*

[20] Risk-free interest rate, *wikipedia.org*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Risk-free_interest_rate`, Dostop: 22. 8. 2014. *(Citirano na strani 11.)*

[21] Varianca in standardni odklon, *benstat.si*, `http://www.benstat.si/blog/varianca-standardni-odklon`, Dostop: 23. 8. 2014. *(Citirano na straneh 30 in 31.)*

Priloge

A Eksaktni izračuni po Binomskem in B-S modelu

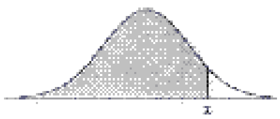
A.1 Binomski model

	Korak 0	Korak 1	Korak 2
			600,7502
		591,9963	
S	583,37		583,37
		574,8694	
			566,4927
			18,25016
		9,504988	
C	**4,939522**		0,87
		0,431578	
			0

A.2 B-S model

d_1	d_2	$N(d_1)$	$N(d_2)$	C
0,08371	0,062952	0,533357	0,525097	**5,284135**

B Vrednosti standardizirane normalne porazdelitve



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990